

Matice I - hodnost, inverze

10. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Teorie:

DEFINICE

Elementární řádkovou úpravou matice rozumíme jednu z následujících operací:

- (i) Záměna dvou řádků.
- (ii) Vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem.
- (iii) Přičtení násobku jednoho řádku k druhému.

DEFINICE

Hodností matice A rozumíme počet nenulových řádků po transformaci na schodovitou matici (převedení do odstupňovaného tvaru), značíme ji $h(A)$.

TVRZENÍ

- (a) Každou matici lze pomocí elementárních řádkových úprav převést na schodovitou matici.
- (b) $h(A) = h(A^T)$.
- (c) Pro čtvercovou matici $A \in M(n \times n)$ je ekvivalentní:
 - (i) A je regulární (neboli existuje matice inverzní).
 - (ii) A lze pomocí elementárních úprav převést na jednotkovou matici.
 - (iii) $h(A) = n$.
 - (iv) A má nenulový determinant.

Příklady:

1. Určete hodnotu matic (v závislosti na parametru) a rozhodněte, zdali se jedná o matici regulární:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 2(a-1) & (3a+1) & a & 2a \\ (1-a) & -2 & -1 & 2 \\ a & 2a & a & a+1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 15 & 12 & 25 & 42 \\ 2 & 5 & 4 & 8 & 14 \\ 1 & -1 & 2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 7 & -2 & 2 & -10 \\ 7 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{g) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 & 2 & a \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & a & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 2(a-1) & (3a+1) & a \\ (1-a) & -2 & -1 \\ a & 2a & a \end{pmatrix}$$

2. Najděte inverzní matice k následujícím maticím:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- * 3. Na základě výsledků předchozích příkladů napište inverzní matice k maticím, které vzniknou:

a) Přehozením prvního a druhého řádku v matici z příkladu 2. a).

b) Vynásobením čtvrtého řádku matice z příkladu 2. c) číslem 11.

c) Přičtením sedminásobku třetího řádku k prvnímu řádku v matici z příkladu 2. b).

d) Z matice v příkladu 2. d) tak, že místo prvního řádku napíšeme trojnásobek druhého a místo druhého pětinasobek prvního.

Matice I - hodnost, inverze

10. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Výsledky:

1. a) 3
b) 3
c) 3 pro $a \neq 1$, 1 pro $a = 1$
d) 3 pro $a \notin \{0, -1, 2\}$, 2 jinak
e) 3 pro $a \neq -1$, 2 pro $a = -1$
f) 3
g) 4 pro $a \neq 1$, 3 pro $a = 1$

2. a)
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 0 & -1/21 & 5/42 & 11/42 \\ -1/2 & 23/42 & -5/42 & 5/21 \\ -1/2 & 13/42 & -1/42 & 1/21 \\ 1/2 & -5/42 & 1/21 & -25/42 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 5/6 & 1/6 \\ -1/2 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

d)
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Inverzní matice vzniknou z inverzní matice k původní matici

- a) přehozením prvního a druhého sloupce;
b) vynásobením čtvrtého sloupce číslem $1/11$;
c) odečtením sedminásobku prvního sloupce od třetího sloupce;
d) tak, že místo prvního sloupce napíšeme $1/3$ druhého a místo druhého sloupce $1/5$ prvního.

(To vše lze zdůvodnit například s použitím definice inverzní matice a definice maticového násobení. Jiná, méně přímá možnost je vhodně použít větu o násobení a transformaci.)