Extrémy funkcí více proměnných III

9. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Teorie:

<u>Věta</u> (Lagrangeova věta o multiplikátorech)
Nechť n a m jsou přirozená čísla. Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Nechť $g_1, g_2, \dots, g_m$ a f jsou funkce z $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Budiž

$$M := \{z \in \Omega:\ g_1(z) = 0, \dots, g_m(z) = 0\},$$

a nechť $z_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I) Vektory $\nabla g_1(z_0), \nabla g_2(z_0), \dots \nabla g_m(z_0)$ jsou lineárně závislé.

(II) Existuje reálná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ splňující

$$\nabla f(z_0) + \lambda_1 \nabla g_1(z_0) + \lambda_2 \nabla g_2(z_0) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(z_0) = 0.$$

Příklady:

Není-li řečeno jinak, pak určete sup a inf funkce f na množině M, a vyšetřete, zdali se těchto hodnot nabývá.

1. Určete rozměry vodní nádrže ve tvaru kvádru o objemu $32\,\mathrm{m}^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady nejmenší povrch.

2. $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$

   a) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

   b) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0\}$

3. $f(x,y,z) = xyz$

   a) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

   b) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0\}$

4. $f(x,y,z) = \sin(x)\sin(y)\sin(z)$

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3:\ x + y + z = \frac{\pi}{2},\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}.$$

5. $f(x,y,z) = xy^2z^3$

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3:\ x + 2y + 3z = a,\ x > 0,\ y > 0\}, \text{ kde } a > 0$$

* 6. $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^p + \cdots x_n^p$

$M = \{[x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n:\ x_1 + \cdots + x_n = a,\ x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$, kde $a > 0$, $p > 0$ a $n \geq 2$