Extrémy funkcí více proměnných II

8. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Teorie:

<u>Věta</u> (Lagrangeova věta o multiplikátoru)
Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Nechť f a g jsou funkce z $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Budiž

$$M := \{[x,y] \in \Omega\colon\ g(x,y) = 0\},$$

a nechť $[x_0, y_0] \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I)

$$\nabla g(x_0,y_0) = 0, \text{ neboli}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y} g(x_0,y_0) = 0.$$

(II) Existuje reálné číslo λ splňující

$$\nabla f(x_0,y_0) + \lambda \nabla g(x_0,y_0) = 0, \text{ neboli}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0) + \lambda \frac{\partial}{\partial x} g(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0) + \lambda \frac{\partial}{\partial y} g(x_0,y_0) = 0.$$

Příklady:

Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M:

1. $f(x,y) = x^2 + y,\ M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$

* 2. $f(x,y,z) = xy^2z^3,\ M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3\colon\ x + 2y + 3z = a,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$, kde $a > 0$.

3. $f(x,y) = x,\ M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon\ 2 \geq x \geq 0,\ 1 \geq y \geq 0,\ 2x + y \leq 2\}$

4. $f(x,y) = x + y,\ M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon\ x^3 + y^3 - 2xy = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

5. $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z,\ \ M = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

6. $f(x,y) = y,\ M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon\ (x^2+y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}$

7. $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b},\ a > 0, b > 0,\ M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

8. $f(x,y) = x^2 + y,\ M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon\ 4y^3 - 4y + x^2 = 0,\ y \geq 0\}$