

Extrémy funkcí více proměnných I

7. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Teorie:

VĚTA

Nechť K je kompaktní (tj. uzavřená a omezená) podmnožina \mathbb{R}^n . Nechť f je spojitá funkce z K do \mathbb{R} . Pak f nabývá na K svého minima i maxima.

VĚTA (Lagrangeova věta o multiplikátoru)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Nechť f a g jsou funkce z $\mathcal{G}^1(\Omega)$. Budiž

$$M := \{[x, y] \in \Omega : g(x, y) = 0\},$$

a nechť $[x_0, y_0] \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M . Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I)

$$\nabla g(x_0, y_0) = 0, \text{ neboli}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} g(x_0, y_0) = 0.$$

(II) Existuje reálné číslo λ splňující

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = 0, \text{ neboli}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial}{\partial x} g(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial}{\partial y} g(x_0, y_0) = 0.$$

Tomuto λ se pak říká Lagrangeův multiplikátor.

Příklady:

Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M :

1. $f(x, y) = x + y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$
2. $f(x, y, z) = xyz$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
3. $f(x, y) = e^x$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x^2 + 2y^2 \leq 1\}$
4. $f(x, y, z) = \sin(x) \sin(y) \sin(z)$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x + y + z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$
5. $f(x, y) = x^2 + y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$
6. $f(x, y, z) = xy^2z^3$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x + 2y + 3z = a, x \geq 0, y \geq 0, z > 0\}$, kde $a > 0$.
7. $f(x, y) = x$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: 2 \geq x \geq 0, 1 \geq y \geq 0, 2x + y \leq 2\}$
8. $f(x, y) = x + y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$
9. $f(x, y, z) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + z$, $M = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$
10. $f(x, y) = y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}$
11. $f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, $a > 0, b > 0$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$
12. $f(x, y) = x^2 + y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y \geq 0\}$