Všehochuť funkcí více proměnných

4. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Příklady:

1. Spočtěte parciální derivace funkce $|y - \cos x|$ všude, kde existují. Určete, jak vypadá tečná nadrovina v bodech $(0, 0)$ a $\left(\frac{\pi}{3}, 42\right)$.

2. Uvažujme funkci
$$f(x, y) := \frac{\sqrt{4(3 - x) - 3y}}{\log y} \sqrt{\arctan x}.$$
   a) Určete definiční obor funkce f a načrtněte ho.
   b) Rozhodněte, zdali je ten definiční obor omezená množina v $\mathbb{R}^2$. Dokažte to.

$*$ 3. Nechť
$$G(x, y, z) = \left(x^2 \cdot e^z + \sin(x \cdot y), x, x \cdot z - y, x + 2y^4 + z^{17}\right),$$
$$F(t, u, v, w) = u + uv - \sin(vw) + ut + u \cdot v \cdot w.$$
   a) Spočítejte všechny parciální derivace funkce $F \circ G$.
   b) Určete rovnice tečné nadroviny v nule (v $(0, 0, 0)$).

4. Určete body, které by mohly být lokálním nebo globálním extrémem funkce
$$x^4 + y^2 + 2z^2 - xy - xz + 2yz + 4y - 2x.$$
(Neboli najděte body, kde je splněna nutná podmínka existence extrému.)

Všehochuť funkcí více proměnných

4. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Výsledky:

1. $\frac{\partial}{\partial x}|y - \cos x| = \sin x \operatorname{sign}(y - \cos(x))$, $\frac{\partial}{\partial y}|y - \cos x| = \operatorname{sign}(y - \cos(x))$ pro $y \neq \cos x$, navíc $\frac{\partial}{\partial x}|y - \cos x| = 0$ pro $(1, 2k\pi)$ a $(-1, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Jinde jiné parciální derivace neexistují.
   Tečné nadroviny jsou dány popořadě předpisy $-y$ a $\frac{\sqrt{3}}{2}x + y$.

2. Trojúhelník s vrcholy $(0,0), (0,4)$ a $(3,0)$. Hrana x tam je, hrana y tam není. Namíň tam ještě nejsou body, kde $y = 1$. Je to omezená množina.

* 3. Parciální derivace jsou

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z) &= 2x^2e^z + x\cos(xy)y + \\ &\quad + 1 + xz - y + x^2e^z + \sin(xy) + (xz - y)(x + 2y^4 + z^{17}) + \\ &\quad + z\left[x - \cos((xz - y)(x + 2y^4 + z^{17}))(x + 2y^4 + z^{17}) + x(x + 2y^4 + z^{17})\right] + \\ &\quad + x(xz - y) - \cos((xz - y)(x + 2y^4 + z^{17}))(xz - y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,z) &= x^2\cos(xy) - \\ &\quad - \left[x\left(x + 2y^4 + z^{17}\right) - \left(x + 2y^4 + z^{17}\right)\cos\left((xz - y)\left(x + 2y^4 + z^{17}\right)\right) + x\right] + \\ &\quad + 8y^3\left[x(xz - y) - (xz - y)\cos\left((xz - y)\left(x + 2y^4 + z^{17}\right)\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}F(x,y,z) &= x^3e^z + \\ &\quad + x\left[x - \cos((xz - y)(x + 2y^4 + z^{17}))(x + 2y^4 + z^{17}) + x(x + 2y^4 + z^{17})\right] + \\ &\quad + 17z^{16}\left[-\cos((xz - y)(x + 2y^4 + z^{17}))(xz - y) + x(xz - y)\right]\end{aligned}$$

Nadrovina je pak dána předpisem $x + 0y + 0z$.

4.

$$(0, -4, 2), \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{8}(32 + \sqrt{2}), 2\right), \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{8}(-32 + \sqrt{2}), 2\right)$$