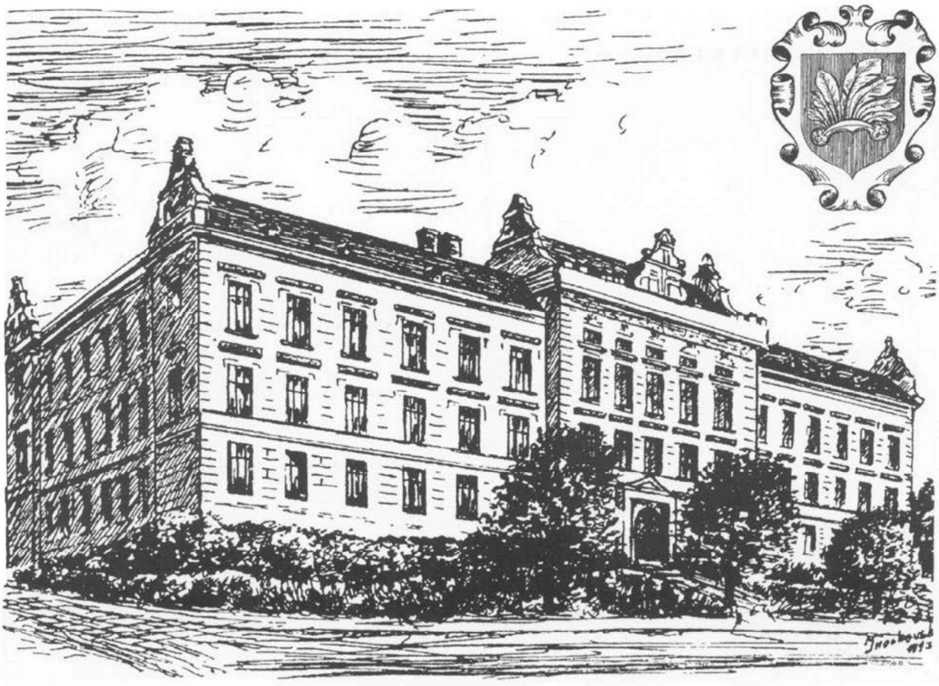
35. MEZINÁRODNÍ KONFERENCE

HISTORIE MATEMATIKY

Velké Meziříčí, 22. až 26. 8. 2014



Praha 2014

Recenzovali: J. Bečvář, M. Bečvářová, Z. Halas, M. Hykšová, B. Klemp-Dyczek, L. Kvazs, M. Melcer, V. Moravcová, L. Moravec, L. Obojska, M. Otavová, J. Rataj, K. Rusek, A. Slavík, J. Staněk, I. Sýkorová, M. Šimša, J. Veselý, L. Vízek, M. Zariczny.

ISBN 978-80-7378-265-8

Vážené kolegyně, vážení kolegové,

předkládáme vám sborník obsahující texty tří vyzvaných přednášek, texty delších a kratších sdělení, které programový výbor obdržel do 15. května 2014. Všechny příspěvky byly graficky a typograficky sjednoceny.[1] Zařazen byl též program konference a seznam všech účastníků, kteří se přihlásili do 1. června 2014.

V první části sborníku jsou otištěny rozšířené texty hlavních přednášek, o něž byli požádáni přednášející, kteří se dlouhodobě zabývají matematikou, její historií, vyučováním a aplikacemi.

Ve druhé části sborníku jsou publikovány příspěvky jednotlivých účastníků, které nejsou monotematicky zaměřeny, neboť konference se snaží poskytnout dostatečný prostor k aktivním vystoupením, diskusím a neformálním setkáním všem přihlášeným, tj. matematikům, historikům matematiky, učitelům vysokých i středních škol, doktorandům oboru *Obecné otázky matematiky a informatiky*, studentům i všem dalším zájemcům o matematiku a její historii.

Program letošní konference je poměrně pestrý. Věříme, že každý najde témata, která ho zaujmou a potěší, že objeví nové kolegy, přátele a spolupracovníky, získá inspiraci, řadu podnětů, motivaci i povzbuzení ke své další odborné práci a ke svému studiu.

Informace o letošní konferenci i o všech předchozích konferencích a letních školách lze najít na adrese

http://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/konference/hlavnindex.html.

Martina Bečvářová a *Jindřich Bečvář*

V Praze, v červnu 2014

[1] Jednotlivé příspěvky neprošly jazykovou korekturou.

SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

- Augustínová Eva
- Bálint Vojtech
- Bálintová Anna
- Baštinec
- Bečvář Jindřich
- Bečvářová Martina
- Boháč Pavel
- Ciesielska Danuta
- Čižmár Ján
- Domoradzki Stanisław
- Durnová Helena
- Halas Zdeněk
- Hykš Oldřich
- Hykšová Magdalena
- Jedynak Katarzyna
- Kalousová Anna
- Karpińska Karolina
- Kotůlek Jan
- Koudela Libor
- Kvasz Ladislav
- Kvaszová Milena
- Lengyelfalusy Tomáš
- Marek Jaroslav
- Melcer Martin
- Moravcová Vlasta
- Moravec Luboš
- Netuka Ivan
- Otavová Miroslava
- Otisk Marek
- Pogoda Zdzisław
- Riečan Beloslav
- Riečanová Eva
- Sklenáriková Zita
- Slavík Antonín
- Sýkorová Irena
- Šatný Petr
- Štěpánová Martina
- Vajsábel Stanislav
- Vajsáblová Margita
- Vízek Lukáš
- Wójcik Wiesław
- Zamboj Michal

SEZNAM PŘEDNÁŠEK

I. Vyzvané přednášky

Halas Z.: *Archimédova Metoda, překlad a reflexe nového čtení*
Netuka I.: *Aritmetizace matematické analýzy a pojem úplnosti*
Vajsáblová M.: *Veľké osobnosti v histórii matematiky a matematickej kartografie*

II. Konferenční vystoupení

Augustínová E.: *Vydávanie matematickej literatúry na Slovensku do roku 1918*
Bálint V.: *Takmer uzavretá história jedného problému kombinatorickej geometrie*
Bálintová A.: *Al-Qushji, kuriér sultánskych tabuliek*
Bečvář J.: *Pseudoinverze*
Bečvářová M.: *Zkoušky učitelské způsobilosti (před německou zkušební komisí)*
Boháč P.: *O Pascalově větě*
Ciesielska D.: *„Zasady algebry wyższéj“ Władysława Zajączkowskiego*
Čižmár J.: *Predohra ku schémam*
Domoradzki S.: *O różnych aspekatch działalności prof. J. Puzyny (1856–1919) we Lwowie*
Durnová H.: *Počet grafický a graficko-mechanický Václava Lásky a Václava Hrušky*
Hykšová M.: *Kurt Hensel a p-adická čísla*
Jedynak K.: *Nauczanie geometrii analitycznej w krakowskich gimnazjach na przełomie XIX i XX wieku*
Kalousová A.: *Kvadratura cykloidy dle Robervala*
Karpińska K.: *O przenikaniu nowych teorii do kształcenia szkolnego w toruńskiej Szkole Realnej w XIX wieku*
Kotůlek J.: *Hrdinou proti své vůli? Věnováno Františku Čuříkovi*
Koudela L.: *Robervalova rektifikace cykloidy*
Kvasz L.: *Frege ako tvorca formálnej logiky*
Marek J.: *Mayerova metoda průměrů a problém zeměpisné délky*
Moravec L., Bečvářová M., Škoda J.: *Olomoucký konkurs*
Otavová M.: *Zrození kombinatoriky v díle Jana Caramuela z Lobkovic*
Otisk M.: *Mezi matematikou a filozofií: poznámky k dopisu Gerberta z Remeše Konstantinovi z Fleury*
Pogoda Z.: *Some Remarks on History of Poincaré Conjecture*
Riečan B.: *K základom modernej slovenskej matematiky*
Sýkorová I.: *Počátky algebry ve staré Indii*
Šatný P.: *Charles Babbage a jeho přínos v teorii funkcionálních rovnic*
Štěpánová M.: *Znovuzrození Weyrova kanonického tvaru*
Vízek L.: *Z historie početnic*
Wójcik W.: *Nowe idee topologiczne w pierwszych pracach twórców polskiej szkoły matematycznej*

ODBORNÝ PROGRAM KONFERENCE

Pátek 22. 8. 2014

Dopolední program 10:30–12:00
Zahájení konference
Plenární přednáška:
Halas Z.: *Archimédova Metoda, překlad a reflexe nového čtení*

Odpolední program 14:00–15:30
Konferenční vystoupení:
Otisk M.: *Mezi matematikou a filozofií: poznámky k dopisu Gerberta z Remeše Konstantinovi z Fleury*
Wójcik W.: *Nowe idee topologiczne w pierwszych pracach twórców polskiej szkoły matematycznej*

Odpolední program 16:00–18:00
Konferenční vystoupení:
Bečvář J.: *Pseudoinverze*
Ciesielska D.: *„Zasady algebry wyższéj" Władysława Zajączkowskiego*
Bečvářová M.: *Zkoušky učitelské způsobilosti (před německou zkušební komisí)*
Kalousová A.: *Kvadratura cykloidy dle Robervala*

Sobota 23. 8. 2014

Dopolední program 9:00–10:00
Konferenční vystoupení:
Koudela L.: *Robervalova rektifikace cykloidy*
Kotůlek J.: *Hrdinou proti své vůli? Věnováno Františku Čuříkovi*

Dopolední program 10:30–12:00
Plenární přednáška:
Netuka I.: *Aritmetizace matematické analýzy a pojem úplnosti*

Odpolední program 14:00–15:30
Konferenční vystoupení:
Bálint V.: *Takmer uzavretá história jedného problému kombinatorickej geometrie*
Domoradzki S.: *O różnych aspekatch działalności prof. J. Puzyny (1856−1919) we Lwowie*

Odpolední program 16:00–18:00
Konferenční vystoupení:
Jedynak K.: *Nauczanie geometrii analitycznej w krakowskich gimnazjach na przełomie XIX i XX wieku*
Durnová H.: *Počet grafický a graficko-mechanický Václava Lásky a Václava Hrušky*
Riečan B.: *K základom modernej slovenskej matematiky*
Karpińska K.: *O przenikaniu nowych teorii do kształcenia szkolnego w toruńskiej Szkole Realnej w XIX wieku*

Neděle 24. 8. 2014

Dopolední program 9:00–10:30
Konferenční vystoupení:
Bálintová A.: *Al-Qushji, kuriér sultánskych tabuliek*
Sýkorová I.: *Počátky algebry ve staré Indii*
Moravec L. (Bečvářová M., Škoda J.): *Olomoucký konkurs*

Dopolední program 11:00–12:00
Plenární přednáška:
Vajsáblová M.: *Veľké osobnosti v histórii matematiky a matematickej kartografie*

Pondělí 25. 8. 2014

Dopolední program 10:00–12:00
Konferenční vystoupení:
Čižmár J.: *Predohra ku schémam*
Augustínová E.: *Vydávanie matematickej literatúry na Slovensku do roku 1918*
Pogoda Z.: *Some Remarks on History of Poincaré Conjecture*

Odpolední program 14:00–15:30
Konferenční vystoupení:
Otavová M.: *Zrození kombinatoriky v díle Jana Caramuela z Lobkovic*
Hykšová M.: *Kurt Hensel a p-adická čísla*

Odpolední program 16:00–18:00
Konferenční vystoupení:
Šatný P.: *Charles Babbage a jeho přínos v teorii funkcionálních rovnic*
Štěpánová M.: *Znovuzrození Weyrova kanonického tvaru*
Kvasz L.: *Frege ako tvorca formálnej logiky*
Marek J.: *Mayerova metoda průměrů a problém zeměpisné délky*

Úterý 26. 8. 2014

Dopolední program 9:00–10:30
Konferenční vystoupení:
Vízek L.: *Z historie početnic*
Boháč P.: *O Pascalově větě*
Zakončení

VYZVANÉ PŘEDNÁŠKY

ARCHIMÉDOVA METODA, PŘEKLAD A REFLEXE NOVÉHO ČTENÍ

ZDENĚK HALAS

Abstract: In this article we focus on new advances caused by the publication of the new reading of *Archimedes palimpsest*, namely the *Method*. We refer about the new Czech translation of the *Method* and compare other selected translations from the point of view of textual criticism and attitude to translation.

1 Archimédův palimpsest

1.1 Historie a současnost kodexu obsahujícího Archimédovy spisy

Přibližně v polovině 10. století byl pořízen opis několika Archimédových spisů, které byly svázány do pergamenového kodexu velkého formátu. Začátkem 13. století však tento kodex nebyl považován tehdejším vlastníkem za užitečný, a tak byl rozvázán, jeho text seškrábán, oříznut na menší formát a jednotlivé listy byly přeloženy na polovinu, čímž vznikl kodex poloviční velikosti, do kterého byly zapsány modlitební a liturgické texty – byzantské Euchologion. Původní text však tímto postupem nezmizel úplně, ale mírně prosvítá na pozadí nového textu. Takovéto rukopisy, jejichž pergamen obsahuje zbytky předchozího textu, nazýváme palimpsesty. Euchologion je opatřeno datem 14. dubna 1229.

Počátkem 19. století byl tento kodex převezen z Jeruzaléma do knihovny Řeckého patriarchátu v Konstantinopoli, kde jej pak roku 1899 zanesl do katalogu [16] soukromý docent Petrohradské univerzity Papadopulos-Kerameus. Společně s obvyklými údaji tam opsal i tři řádky původního Archimédova textu, které bylo možno poměrně snadno přečíst. V létě roku 1906 se do této knihovny vypravil dánský klasický filolog a historik antické matematiky J. L. Heiberg a na místě kodex prostudoval. Nalezl v něm dosud neznámé texty dvou Archimédových spisů: *Metody* a *Stomachion*, a dále řecký text Archimédova spisu *O plovoucích tělesech*, který byl znám jen z latinského překladu. Na základě svých poznámek a profesionálních fotografií, které nechal pořídit, pak roku 1907 uveřejnil předběžné znění textu *Metody* [7]. Toto vydání vzbudilo značnou pozornost a bylo přeloženo do němčiny, angličtiny a češtiny (viz [8], [6], [18]).

J. L. Heiberg se do Konstantinopole vypravil roku 1908 znovu, aby ověřil některá nejasná místa. Pokračoval pak v ediční práci, která vyvrcholila v letech 1910–1915, kdy vydal zcela nové doplněné a opravené vydání Archimédova díla [9]. Ve spisu *Metoda* se mu podařilo dosáhnout oproti prvnímu vydání [7] podstatného zlepšení.

Od dvacátých let byl kodex nezvěstný. Objevil se až po druhé světové válce v soukromé sbírce jedné pařížské rodiny. Po neúspěšných pokusech o prodej kodexu vybraným knihovnám byl nakonec 29. října 1998 vydražen v aukční síni Christies v New Yorku za dva miliony dolarů a ocitl se opět v soukromých rukou.

Majitel, který zůstal v anonymitě, poskytl kodex na deset let k restaurování a vědeckému výzkumu, přičemž obojí sám po tuto dobu financoval. Restaurátorské práce byly mimořádně náročné, protože se stav kodexu během dvacátého století pronikavě zhoršil. Prakticky všechna folia byla zasažena plísní, výrazně se snížila čitelnost textu. Odstraňování vazby trvalo více než čtyři roky a poté byly jednotlivé listy postupně očišťovány a zasazovány do ochranných fólií. V roce 2007 vyšla populární kniha, v níž je popsán průběh těchto prací. V následujícím roce vyšel také její český překlad [14]. Přesně po deseti letech bylo zpracování kodexu ukončeno a výsledné fotografie ve vysokém rozlišení společně s transkripcí řeckého textu byly zveřejněny na webových stránkách [19].

V prosinci roku 2011 vyšla dvoudílná kniha velkého formátu *The Archimedes Palimpsest* (viz [15]), která obsahuje všechny základní výsledky celého projektu. V prvním dílu této knihy je shrnuta historie kodexu a postup jeho zpracování. Druhý díl obsahuje fotografie jednotlivých stran kodexu a zrcadlově umístěný přepis řeckého textu, který prosvítá pod textem Euchologia, tj. spisů Archimédových, zlomky Hypereidových řečí a fragment komentáře k Aristotelovým Kategoriím. Cílem bylo vytvořit knihu, která by co nejpřesněji odrážela obsah původních kodexů, proto je vždy na levé straně fotografie příslušného bifolia (dvoustrany modlitební knihy, která vznikla přeložením jednoho listu původního kodexu) a na pravé straně je transkripce řeckého textu původních kodexů, která je také uspořádána ve dvou sloupcích. Uspořádání na jednotlivých bifoliích je i v transkripci zachováváno – odpovídá mu sazba do dvou sloupců, dělení na konci jednotlivých řádků i umístění obrázků překreslených z kodexu.

1.2 Obsah Archimédova palimpsestu

Na první pohled je tento kodex byzantským Euchologiem z první poloviny 13. století; okraje stránek jsou poznamenány ohněm, jednotlivé listy (folia) jsou značně poškozeny plísní, některé dokonce chybí. Dochovalo se nám 175 pergamenových listů (20 × 15 cm) a 7 listů papírových (vloženy až v 15.–16. stol.). Jedná se však o palimpsest, což znamená, že byla tato liturgická kniha vytvořena z jiných kodexů napsaných dříve.

Původní texty, které byly z pergamenu seškrábány, aby na ně mohlo být napsáno Euchologion, jsou pro nás mnohem zajímavější. Většina z nich se nám totiž dochovala pouze v tomto jediném rukopisu. Největší část listů nového kodexu pochází z kodexu obsahujícího některé Archimédovy spisy (polovina 10. stol.), z něhož se nám dochovalo 69 pergamenových listů. Sedm z nich není úplných a jeden list je dnes uložen samostatně v univerzitní knihovně v Cambridge. Všechna folia jsou průběžně číslována a obsahují následující spisy (některé neúplné): *O rovnováze rovinných útvarů II* (1r–3r)[1], *O plovoucích tělesech I, II* (3r–7r a 7r–15r), *Metoda* (15r–29v), *O spirálách* (30r–45r), *O kouli a válci I, II* (45r–63v, 64r–67v), *Měření kruhu* (68r–69r) a *Stomachion* (69r–69v).

Folia zbylé části celého palimpsestu pocházejí z dalších šesti kodexů. Jeden z nich je datován do 2. poloviny 11. století. Obsahoval řeči attického politika protimakedonského zaměření Hypereida (4. stol. př. Kr.). Z něj máme v Archimédově palimpsestu pouhých pět listů, které obsahují části jinde nedochovaných řečí *Proti Dióndovi* a *Proti Tímandrovi*. Jejich publikováním se tak rozšířil soubor původně šesti rozsáhlých fragmentů Hypereidových řečí, které pocházely z papyrů nalezených v druhé polovině

[1] Strany každého folia se standardně označují r (recto) a v (verso).

19. století. Z dalšího kodexu písař použil sedm listů, na nichž se podařilo identifikovat zlomek dosud neznámého komentáře k Aristotelovým *Kategoriím*. Sedm listů bylo dále převzato z kodexu obsahujícího hagiografické texty (příběhy svatých, patrně sv. Panteleémóna a sv. Kalliníka); z těchto folií je však čitelných jen několik frází. Dvě folia obsahují hymny ze sbírky pravoslavných liturgických textů (*Ménaion*); jejich text je velmi špatně čitelný, zdá se však, že obsahuje jen málo odchylek od standardního textu. Obsah tří listů se dosud nepodařilo identifikovat. Jisté je jen to, že pocházejí ze dvou různých kodexů.

2 Přínos nového čtení

2.1 Archimédův palimpsest

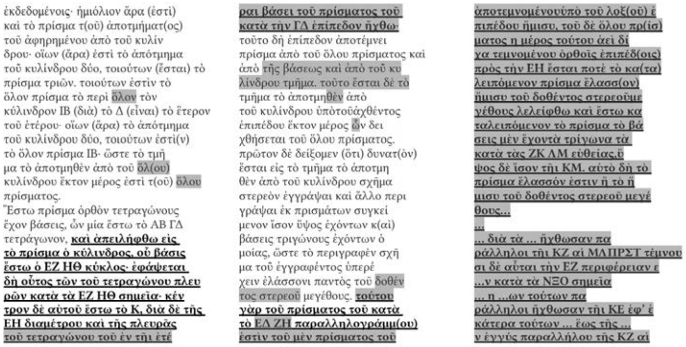
Archimédův palimpsest obsahuje téměř úplný text spisu *Metoda*, který není dochován nikde jinde, ani v překladu. Největší pozornost se tedy soustředila právě na tento spis, a to jak při prvním vydání Heibergově [7], tak také při následujícím zkoumání. Další spisy, pro něž je palimpsest velkým přínosem, jsou *O plovoucích tělesech I, II* a *Stomachion*, neboť jejich texty byly do objevu kodexu známy pouze v překladech.

Spis *Stomachion* byl znám jen z arabského překladu, v němž se popisuje známá konstrukce všech čtrnácti dílů této skládačky, které vznikají dělením čtverce. Následuje výpočet obsahů jednotlivých dílků a ukazuje se, že ty jsou s obsahem celého čtverce vždy souměřitelné. Řecký text se od arabského překladu značně liší. Archimédés v něm zkoumá velikosti jednotlivých dílků a snaží se ukázat, kdy je možno některé dílky zaměnit za jiné a kdy jejich vhodným přiložením vzniká např. pravý či přímý úhel. Interpretace tohoto spisu je nejistá, neboť z řeckého textu se nám zachoval pouze úvod, první věta a začátek druhé věty. V novém čtení, jak je publikováno v [15], došlo k zaplnění několika mezer v textu jediného folia, které zlomek textu *Stomachionu* obsahuje. Délka doplněného textu se tedy nijak nezvětšila. Interpretace je tedy stejně nejistá, jako před publikací [15]. Český překlad arabské verze i řeckého textu podle nového čtení je možno nalézt v knize [5].

Text dvoudílného pojednání *O plovoucích tělesech I, II*, které obsahuje mimo jiné formulaci slavného Archimédova zákona, bylo známo pouze z latinského překladu. Obě části tohoto spisu se nám v palimpsestu zachovaly v úplnosti a celý text je poměrně dobře čitelný. J. L. Heiberg tento text zahrnul do svého druhého vydání Archimédova díla [9]. V novém čtení [15] došlo k podstatnému zlepšení, tento text obsahuje nejvíce oprav a doplňků oproti Heibergovu vydání [9]. V celém dvoudílném spisu jich je celkem 414. Z matematického či fyzikálního hlediska zde sice nedošlo k nějakému zásadnímu objevu, nicméně na mnoha místech došlo k podstatným zlepšením – některé malé části důkazů se podařilo přečíst přesněji, takže celý důkaz pak vyznívá elegantněji.

2.2 *Metoda*

Bezesporu největší přínos nového čtení se projevil ve spisu *Metoda*. Výřez jeho malé části je na následujícím obrázku. Tučně a podtrženě jsou vyznačeny pasáže, v nichž došlo ke změnám (či které byly doplněny) ve druhém Heibergově vydání [9] oproti vydání prvnímu [7]. V rámci celého spisu tyto změny zasáhly necelou jeho třetinu. Části textu, v nichž došlo ke změnám či doplňkům v novém čtení [15], jsou zvýrazněny šedou podkladovou barvou (zasáhlo přibližně osminu celého spisu). Nejvíce změn bylo provedeno v druhé polovině spisu, zejména ve střední a závěrečné části.


ἐκδεδομένοις· ἡμιόλιον ἄρα (ἐστὶ)
καὶ τὸ πρίσμα τ(οῦ) ἀποτμήματ(ος)
τοῦ ἀφηρημένου ἀπὸ τοῦ κυλίν
δρου· οἵων (ἄρα) ἐστὶ τὸ ἀπότμημα
τοῦ κυλίνδρου δύο, τοιούτων (ἔσται) τὸ
πρίσμα τριῶν. τοιούτων ἐστὶν τὸ
ὅλον πρίσμα τὸ περὶ ὅλον τὸν
κύλινδρον ΙΒ (διὰ) τὸ Δ (εἶναι) τὸ ἕτερον
τοῦ ἑτέρου· οἵων (ἄρα) τὸ ἀπότμημα
τοῦ κυλίνδρου δύο, τοιούτων ἐστὶ(ν)
τὸ ὅλον πρίσμα ΙΒ· ὥστε τὸ τμῆ
μα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ ὅλ(ου)
κυλίνδρου ἕκτον μέρος ἐστὶ τ(οῦ) ὅλου
πρίσματος.
Ἔστω πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους
ἔχον βάσεις, ὧν μία ἔστω τὸ ΑΒ ΓΔ
τετράγωνον, **καὶ ἀπειλήφθω εἰς**
τὸ πρίσμα ὁ κύλινδρος, οὗ βάσις
ἔστω ὁ ΕΖ ΗΘ κύκλος· ἐφάψεται
δὴ οὗτος τῶν τοῦ τετραγώνου πλευ
ρῶν κατὰ τὰ ΕΖ ΗΘ σημεῖα· κέν
τρον δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ Κ, διὰ δὲ τῆς
ΕΗ διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς
τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐν τῆι ἑτέ
ραι βάσει τοῦ πρίσματος τοῦ
κατὰ τὴν ΓΔ ἐπίπεδον ἤχθω·
τοῦτο δὴ ἐπίπεδον ἀποτέμνει
πρίσμα ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος καὶ
ἀπὸ τῆς βάσεως καὶ ἀπὸ τοῦ κυ
λίνδρου τμῆμα. τοῦτο ἔσται δὲ τὸ
τμῆμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ
τοῦ κυλίνδρου ὑπὸτοῦἀχθέντος
ἐπιπέδου ἕκτον μέρος ὧν δει
χθήσεται τοῦ ὅλου πρίσματος.
πρῶτον δὲ δείξομεν (ὅτι) δυνατ(ὸν)
ἔσται εἰς τὸ τμῆμα τὸ ἀποτμη
θὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα
στερεὸν ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περι
γράψαι ἐκ πρισμάτων συγκεί
μενον ἴσον ὕψος ἐχόντων κ(αὶ)
βάσεις τριγώνους ἐχόντων ὁ
μοίας, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆ
μα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέ
χειν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ δοθέν
τος στερεοῦ μεγέθους. **τούτου**
γὰρ τοῦ πρίσματος τοῦ κατὰ
τὸ ΕΛ ΖΗ παραλληλογράμμ(ου)
ἐστὶν τοῦ μὲν πρίσματος τοῦ
ἀποτεμνομένουὑπὸ τοῦ λοξ(οῦ) ἐ
πιπέδου ἥμισυ, τοῦ δὲ ὅλου πρ(ίσ)
ματος η μέρος τούτου ἀεὶ δί
χα τεμνομένου ὀρθοῖς ἐπιπέδ(οις)
πρὸς τὴν ΕΗ ἔσται ποτὲ τὸ κα(τα)
λειπόμενον πρίσμα ἔλασσ(ον)
ἥμισυ τοῦ δοθέντος στερεοῦ με
γέθους λελείφθω καὶ ἔστω κα
ταλειπόμενον τὸ πρίσμα τὸ βά
σεις μὲν ἔχοντὰ τρίγωνα τὰ
κατὰ τὰς ΖΚ ΛΜ εὐθείας,ὕ
ψος δὲ ἴσον τῆι ΚΜ. αὐτὸ δὴ τὸ
πρίσμα ἔλασσόν ἐστιν ἢ τὸ ἥ
μισυ τοῦ δοθέντος στερεοῦ μεγέ
θους...
...
... διὰ τὰ ... ἤχθωσαν πα
ράλληλοι τῆι ΚΖ αἱ ΜΛΠΡΣΤ τέμνου
σι δὲ αὗται τὴν ΕΖ περιφέρειαν ε
...ν κατὰ τὰ ΝΞΟ σημεῖα
... η ...ων τούτων πα
ράλληλοι ἤχθωσαν τῆι ΚΕ ἐφ' ἑ
κάτερα τούτων ... ἕως τῆς ...
ν ἐγγύς παραλλήλου τῆς ΚΖ αἱ

Metoda – část textu s vyznačeným přínosem druhého vydání Heibergova [9] (tučně a podtrženě) a nového čtení [15] (šedý podklad)

První změna se týká přímo nadpisu, tedy názvu celé knihy. Nově v něm byla nalezena zvýšená tečka před posledním slovem, což změnilo smysl celého názvu:

Ἀρχιμήδους περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην · ἔφοδος

Archimédův <dopis> Eratosthenovi o mechanických větách; Metoda

Z jednoho nadpisu tak vznikly nadpisy dva. Původní název přitom zněl poněkud nelogicky, takže anglické překlady uvádějí nesmyslný překlad „The Method of Mechanical Theorems“ (Metoda mechanických vět). V ruském překladu je však správně „Послание к Эратосфену. О механических теоремах.“ (Dopis Eratosthenovi. O mechanických větách).

Podobné drobné změny nacházíme také v úvodu. Archimédés píše Eratosthenovi, že tato metoda poskytuje prostředek k tomu, aby byly některé matematické věty prozkoumány pomocí mechaniky. Podle dřívějšího čtení se Archimédés obracel jen na Eratosthena (… získáš prostředek, pomocí něhož budeš moci …). Metoda je tedy určena širokému plénu matematiků.

Jiná drobná změna s možnými většími důsledky se týká zmínky o Eudoxovi, který dle staršího čtení objevil (*ἐξηύρηκεν*) jako první důkaz tvrzení o objemu jehlanu. V novém čtení nacházíme opravu na „vydal, zveřejnil“ (*ἐξήνεγκε*). Eudoxos tak nemusí být původcem tohoto důkazu, ale jen tím, kdo jej zveřejnil. Zde však může být význam tohoto rozdílu diskutabilní.

Tento spis obsahuje jedenáct důkazů, z nichž byly čtyři podstatně upraveny. Největší změny jsou ve větách 6 – 7 a 14 – 15. Větu 14 máme nyní úplnou (viz [11], [12]) a důkaz věty 15, zachovaný v neúplnosti (konec *Metody* chybí) byl podstatně doplněn. V důkazu věty 6 (těžiště polokoule) jsme dříve byli odkázáni na rekonstrukci vycházející z důkazu věty 9 (těžiště kulové úseče). Nyní máme důkaz věty 6 doplněn natolik, že se nemusíme opírat o větu 9, naopak, z vedení důkazu věty 6 můžeme pozorovat, jak Archimédés převedl jednodušší případ na složitější. Důkaz věty 6 tak není pouhým speciálním případem důkazu věty 9 a došel navíc podstatného zjednodušení.

Porovnáním řeckého textu Heibergova [9] a nové transkripce [15] lze dojít k několika dalším pozorováním. Je zřejmé, že některá písmena označující body jednotlivých geometrických objektů někdy byla tak špatně čitelná, že je Heiberg místy označuje písmeny jinými. Zde zřetelně vyplývá náročnost celého procesu transkripce. Místy tak je Heibergův přepis výsledkem geniální intuice. Dalším faktorem, který ztěžoval transkripci Archimédových spisů, byly ligatury a písařské zkratky, které se v kodexech té doby běžně vyskytovaly. V transkripci [15] jsou všechny zkratky rozvedeny, nicméně pomocí kulatých závorek je jasně označeno, kde se která zkratka vyskytovala.

2.3 Obrázky

V kodexu je téměř za každou větou obrázek, který ilustruje geometrickou situaci příslušné věty. V celém kodexu máme dochováno 68 takových obrázků, z toho ve spisu *Metoda* jich je 10. Tyto obrázky obsažené v *Metodě* většinou obsahují páku, zkoumaný útvar a útvary, s nimiž je obsah či objem zkoumaného tělesa porovnáván. Třírozměrná tělesa jsou reprezentována svými osovými řezy. Tyto náčrtky vykazují (z dnešního hlediska) poměrně vážné nepřesnosti:

- některá písmena označující některé body nesouhlasí s textem, případně oproti textu označení některých bodů chybí,
- není dodržen správný tvar příslušného útvaru, např. osový řez rotačního paraboloidu (tj. parabola) je nahrazen půlkružnicí,
- nejsou dodrženy proporce jednotlivých útvarů (např. ve větě 1 je jedno rameno páky podstatně kratší).

Příčin, které vedly k těmto nepřesnostem, může být více:

- náčrtky tvořil opisovač bez hlubší znalosti celé problematiky (parabola je velmi nepřesně načrtnuta, nicméně připomíná parabolu; naproti tomu osový řez parabolické úseče je nahrazen půlkružnicí),
- náčrtky nemají být přesným odrazem skutečnosti, ale je třeba je chápat spíše jako schémata usnadňující orientaci v textu; podstatné je tedy správné označení příslušných bodů, ne přesný tvar jednotlivých geometrických útvarů; abstrahuje se tedy od většiny geometrických vlastností,
- opisovač si mohl být vědom správných tvarů a proporcí obsažených v jednotlivých náčrtcích, nicméně z praktických důvodů se uchýlil k některým deformacím; důvodem mohla být snadnost konstrukce (parabolu vzniklou jako osový řez rotačního paraboloidu bylo jednodušší nahradit půlkružnicí) nebo nedostatek místa (parabola z věty 1 by musela být výrazně menší, kdyby měly být u vahadla zachovány správné proporce; utrpěla by tak čitelnost a názornost náčrtku).

Tyto důvody se nám jeví jako pravděpodobnější než názor prezentovaný například v knihách [15] a [14], že jednotlivé obrázky tvořil opisovač, který neměl hlubší znalosti matematiky, a tak mechanicky překreslil do středověkého kodexu obrázky přesně dle předlohy. Ta pak, podle tohoto názoru, odráží původní náčrtek (nejspíše po několika takových přesných „opisovačských" cyklech), z něhož lze prý vysledovat antický přístup k náčrtkům (který je však většinou rekonstruován z těchto středověkých kodexů).

3 Nový překlad *Metody*

Vzhledem k tomu, že některé důkazy jsou v novém čtení podstatně doplněny, považujeme za užitečné tento nový text předložit společně s českým překladem, který se již připravuje. Chystaná publikace bude obsahovat kompletní řecký text *Metody* dle transkripce uvedené v druhém dílu monografie [15] a zrcadlový český překlad. Jelikož je text

Metody psán ve dvou úzkých sloupcích, budou tyto sloupce přesně zachovány, každý však bude vysázen z prostorových důvodů na samostatné stránce. Zrcadlově bude uveden český překlad. Vzhledem k tomu, že text v [15] je needitovaný, obsahuje značné množství chyb matematických i jazykových. Považujeme tedy za užitečné ponechat přesnou transkripci řeckého textu i se všemi nedostatky (pro srovnání) a v zrcadlovém českém překladu tyto nedostatky v nejnutnější míře systematicky odstraňovat (společně s poznámkou upozorňující na opravu), aby tak vznikl matematicky správný text. Pro usnadnění případného srovnávání s řeckým textem budou jednotlivé řádky českého překladu odpovídat, pokud to bude jen trochu možné, řeckému textu. Tento přístup však s sebou nese velké negativum – bude potřeba přizpůsobovat českou větu řecké syntaxi. Nebude se však jednat o překlad zcela doslovný, který by mechanicky zachovával řeckou stavbu dlouhých souvětí, četná participia a slovní popisy matematických operací. Stavba souvětí bude na místech, kde to vyžaduje srozumitelnost, v nejnutnější míře upravena, participia budou většinou nahrazována vedlejšími větami. Slovní popisy matematických postupů jsou doslovně nepřeložitelné, neboť hojně využívají řeckého členu. Jeho tvar naznačuje, zda se jedná o čtverec, poměr, obdélník či úsečku. Paralelní český překlad proto bude tyto informace obsahovat v hranatých závorkách. Přesto však v dlouhých souvětích bude poměrně komplikovaný matematický text trpět menší srozumitelností a přehledností.

V připravované publikaci nového překladu *Metody* bude proto uveden ještě jeden překlad, který bude plně respektovat zásady správného překládání i zásady českého jazyka, neboť nebude omezen úzkou sloupcovou sazbou.

Řecký text je v [15] opatřen stručným kritickým aparátem, který se omezuje na srovnání s předchozím čtením Heibergovým. Nerozlišuje se však přitom mezi prvním a druhým vydáním *Metody*. Aby čtenář získal přesnější představu o obou vydáních Heibergových ([7], [9]), budou u řeckého textu v připravované publikaci uvedeny poznámky obsahující kompletní informaci o rozdílech mezi těmito třemi vydáními.

Další úprava oproti monografii [15] se bude týkat obrázků. V [15] jsou některé obrázky v přepisu řeckého textu překresleny z kodexu nepřesně, a tak budeme při překreslování vycházet přímo z fotografií příslušných folií. Poloha obrázků vůči textu bude odpovídat umístění obrázků v kodexu, podobně jako je tomu v přepisu [15], aby si čtenář mohl udělat lepší představu o celkové podobě kodexu.

Vzhledem k tomu, že v kodexu jsou náčrtky k jednotlivým větám většinou nepřesné a nevyhovují dnešní představě o správně provedeném náčrtku, budou v českém překladu použity náčrtky opravené, aby nerušily českého čtenáře a také aby usnadnily pochopení českého textu. Český překlad tak bude konzistentní, neboť jeho text i doprovodné obrázky budou obsahovat takové opravy, aby vznikl matematicky správný text. Úpravy však budou pokud možno co nejmenší, aby byla v co největší míře zachována podobnost s náčrtky uvedenými v kodexu.

Jelikož je antický způsob prezentace matematických výsledků zatížen slovními popisy jednotlivých vztahů, bude za oběma překlady uveden také matematický přepis celého spisu. V něm budou důkazy všech vět přepsány stručnou a srozumitelnou formou, která je přijatelná pro současného matematika. V tomto přepisu *Metody* budou navíc obsaženy rekonstrukce nejasných míst a chybějících pasáží.

4 Srovnání vybraných zahraničních překladů

4.1 Anglické překlady

Nejznámějším překladem celého Archimédova díla do angličtiny je patrně Heathův překlad [6]. T. L. Heath překládal z prvního Heibergova vydání. Metoda pak byla připojena jako dodatek v roce 1912. Nejedná se však o překlad v pravém slova smyslu, ale spíše o parafrázi. Antické matematické pojmy jsou podávány v modernizované podobě, místo poměrů se tak v textu vyskytují zlomky, místo obdélníků a čtverců pak součiny a druhé mocniny. U některých vět jsou části důkazů zařazeny kvůli lepší přehlednosti na jiné místo. Těžko srozumitelné pasáže jsou nahrazeny svým modernizovaným výkladem. Díky tomuto přístupu se stalo Archimédovo dílo známým mezi širší matematickou veřejností. Archimédovy spisy jsou tak totiž k dispozici v srozumitelné podobě, která je dobře přístupná všem, kdo mají patřičný zájem o matematiku, aniž by se přitom předpokládala hlubší znalost poměrně komplikovaného pojmosloví antické matematiky.

Někteří historikové matematiky mají tendenci tento překlad označovat za nevyhovující. Například R. Netz, který už vydal první díl zamýšleného kompletního překladu celého Archimédova díla [13], tvrdí, že z tohoto překladu nelze pochopit Archimédovo myšlení, a nabízí zcela opačný přístup k překladu vedený snahou přesně zprostředkovat čtenáři neznalému staré řečtiny myšlenkové postupy Archimédovy. Jeho překlad [13] se drží velmi doslovně řeckého textu, zčásti je deformován řeckou syntaxí a pojmový aparát je pro nezasvěceného matematika těžko srozumitelný. Tento přístup však neodpovídá současné teorii překladu, kdy se za základní princip překladu považuje funkční ekvivalence. Přílišná snaha o formální ekvivalenci vede ke snížení srozumitelnosti natolik, že je výsledný překlad dobře srozumitelný spíše těm, kdo jsou obeznámeni jak s řeckým jazykem, tak také s antickou matematikou. Je tedy přirozené, že tento překlad oslovil jen malou skupinu čtenářů, neboť pro matematiky se zájmem o výsledky antických matematiků je obtížně čitelný a pro odborníky pracující v oblasti antické matematiky je nadbytečný, neboť řecký text jim poslouží lépe. Navíc se tento překlad pokouší vytvořit mylný dojem, že čím je překlad doslovnější, tím je přesnější a přesněji odráží myšlení autora, které z něj lze vysledovat. Zde je třeba poznamenat, že přílišná doslovnost při překladu vede k pokřivení významu původního textu, pokud čtenář tento doslovný překlad čte jako text v cílovém jazyce a nedomýšlí si na základě své znalosti výchozího jazyka, jak vznikly jednotlivé zvláštní obraty.

Velmi oblíbenou knihou, která zpřístupnila obsah Archimédových spisů širokému okruhu čtenářů, je monografie [3]. E. J. Dijksterhuis v ní zvolil velmi zajímavý přístup: základní postupy antické matematiky a některá lémmata, která se u Archiméda vyskytují na více místech, sdružil do úvodní kapitoly. Tím vznikla zajímavá stať o povaze antické matematiky a o základních matematických postupech Archimédových. Jednotlivé Archimédovy spisy pak už byly prezentovány v mnohem stručnější a přístupnější formě. Hlavním důvodem tohoto postupu byla snaha odlehčit technicky náročné spisy a nechat vyniknout tomu podstatnému, co je v nich obsaženo. Čtenář tak není unavován dlouhými řadami pomocných tvrzení, ale seznamuje se přímo s centrálními výsledky a zdlouhavé technické detaily jsou řešeny odkazy do úvodní kapitoly a stručnými jasnými komentáři. Je přirozené, že je tato kniha považována za jednu z nejlepších monografií o Archimédovi a mnoho zájemců z řad matematiků se seznamovalo s Archimédovým dílem právě z ní.

4.2 Ruský překlad

V našich zemích je poměrně dobře znám také ruský překlad [17] I. Veselovského, který přeložil z řečtiny (a latiny) všechny dostupné Archimédovy spisy. Vycházel přitom z druhého vydání Heibergova [9], takže jeho kniha obsahuje jako jedna z mála překlad *Metody* a *Stomachion* vycházející z posledního doplněného a upraveného textu vydaného roku 1913. Navíc do své knihy zařadil i překlady dochovaných spisů a zlomků arabských, které vypracoval B. Rozenfeľd. Všechny spisy jsou opatřeny kvalitním komentářem, který je u rozsáhlejších spisů oddělen do samostatných kapitol. Tím vzniklo unikátní komplexní dílo. Samotný překlad je přesný, spolehlivý, na místech, kde se nám text nedochoval, předkládá rekonstrukce Heibergovy nebo vlastní. U matematických vztahů jsou zachovány slovní formulace, nicméně pro přehlednost je vždy na okraji odpovídající formule v modernizované podobě, což velmi usnadňuje čtení. Tento překlad považujeme za patrně nejlepší z běžně dostupných překladů Archimédových spisů, neboť i po více než 50 letech vyhovuje současným požadavkům kladeným na překlady antických matematických děl.

V dnešní době už totiž nelze publikovat překlad, v němž by byly slovní popisy nahrazeny matematickými vzorci, i když si obojí často jednoznačně odpovídá – slovní popisy je možno přímo a jednoznačně přepisovat pomocí vzorců a naopak, ze vzorců takto získaných je možno prakticky jednoznačně zrekonstruovat původní slovní popis. Obecně je však vnášení současných matematických vztahů do překladů antických děl hodnoceno jako podstatné zkreslení. Napíšeme-li dnes totiž například zlomek, míníme tím zlomek reprezentující racionální číslo, jak je definováno v současné době (prvek množiny racionálních čísel vzniklé rozšířením pologrupy celých čísel na grupu); vytrácí se tak původní úsečky, jejich délky i antická teorie proporcí. Napíšeme-li součin $AB \cdot BC$, odhlédneme tím od faktu, že v původním textu je obdélník, tedy geometrický útvar; dochází tak k aritmetizaci, která byla v matematice dovršena o více než tisíc let později. Podobně při nahrazení čtverce pouhou druhou mocninou AB^2 se ztrácí původní čtverec, který je redukován na druhou mocninu.

Opuštění vzorců zčásti souvisí s kritikou tzv. řecké geometrické algebry, která proběhla v sedmdesátých letech 20. století. Nelze však automaticky říci, že by si těchto věcí někteří historikové matematiky nebyli dobře vědomi dříve, například ruský překlad [17] velmi přesně zachovává slovní formulace a moderní matematické vztahy uvádí jen na okraji pro snazší orientaci čtenáře.

4.3 Další překlady Archimédových děl

Cílem této kapitoly není pojednat o všech dostupných překladech, ale spíše poukázat na jednotlivé typy překladů Archimédových děl. Proto ostatní překlady zmíníme jen stručně a výběrově.

Francouzsky vyšly hned dva překlady obsahující všechna Archimédova díla. Jeden je velmi doslovný, vytvořil jej Paul Ver Eecke [4]. Jeho druhé dvoudílné vydání obsahuje také překlady Eutokiových komentářů. Druhý překlad [10] opatřený zrcadlově řeckým textem vytvořil C. Mugler. Tento překlad je velmi kvalitní, nicméně svým zaměřením je spíše filologický.

Z německých překladů můžeme zmínit čtivý překlad Czwalinův [2], který má vzhledem k době svého vzniku mírnou tendenci k modernizaci. S ohledem na spis *Metoda* nelze pominout překlad [8], který vypracoval při přípravě edice řeckého textu přímo J. L. Heiberg ve spolupráci s matematikem a historikem matematiky H. G. Zeuthenem. Jeho podíl byl zejména při vypracovávání obrázků, které rekonstruoval na základě textu, nepřebíral tedy obrázky z kodexu. Tento překlad byl prvním překladem Archimédovy *Metody* do moderního jazyka a je svým charakterem velmi podobný latinskému překladu, kterým Heiberg opatřil řecký text ve svém vydání [9].

Na závěr této kapitoly zmíníme také český překlad *Metody* [18], který vydal ve výroční zprávě prostějovského gymnázia za školní rok 1908/9 středoškolský profesor František Vrána. Díky tomuto počinu se čeština zařadila rokem vydání hned za překlad Heibergův. Podrobnější informace o Fr. Vránovi a jeho překladu lze nalézt v [1].

Vránův překlad je kvalitně provedený, poměrně čtivý, je prost zbytečných archaismů a svým stylem kopíruje styl překladů Heibergových. Místo antických termínů, které by mohly být pro čtenáře těžkopádné a obtížné, uvádí termíny moderní (např. „parabola" na místě řeckého „řez pravoúhlého kuželu"). Komentáře tento překlad neobsahuje, ale vzhledem k zvolenému postupu je text dobře srozumitelný sám o sobě. Jediným problémem tohoto překladu je, že nedostatečně označuje pasáže chybějící v řecké předloze. Je tomu tak patrně kvůli úspoře místa. Jelikož byl pořízen z prvního Heibergova vydání, obsahuje takových mezer v textu více. Místy jen několik teček označuje chybějící odstavec, či dokonce celé folio.

Jedním z cílů nového překladu Archimédovy *Metody* do češtiny bylo doplnit tyto chybějící pasáže podle současného stavu poznání a navázat tak na Vránův přístup – když se objevil nový rukopis (v našem případě doplněná transkripce), tak jej zpřístupnil české veřejnosti. Jeho překlad je však v současné době velmi špatně dostupný, proto bude uveden v plném znění jako příloha připravovaného nového českého překladu.

5 Závěr

V tomto textu jsme stručně upozornili na pokrok, který přineslo nové zpracování a zveřejnění Archimédova kodexu. S tím však kontrastují poměrně dávná data vzniku existujících překladů do světových jazyků, podobně také překladu do češtiny. K tomu se pak také pojí dnešním nárokům ne vždy úplně vyhovující přístup těchto překladů.

Co se týče děl Archimédových, rozhodně by mohl být z hlediska novodobého bádání velmi zajímavý překlad spisu *O plovoucích tělesech I* a *II*, opatřený příslušnými komentáři. Z hlediska školské praxe pociťujeme archaičnost jediného tištěného vydání Eukleidových *Základů*, které navíc neobsahuje téměř žádné komentáře, a tak je na některých místech hůře srozumitelné. Nedávné vydání mírně modifikovaného Servítova překladu řeší tento problém jen částečně.

Literatura

[1] Bečvářová M.: *Archimédovy práce česky*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): Sborník mezinárodní konference historie matematiky. Matfyzpress, Praha, 2008, 93–102.

[2] Czwalina A.: *Archimedes Werke*. 5 vols., Teubner, Leipzig, 1922–1925.

[3] Dijksterhuis E. J.: *Archimedes. With a New Bibliographic Essay by Wilbur R. Knorr*. PUP, Princeton, 1987.

[4] Ver Eecke P.: *Les Oeuvres Complètes d' Archimède, traduites du grec en français avec une introduction et des notes*. De Brouwer & cie, Paris, Bruxelles, 1921.

[5] Halas Z. (ed.): *Archimédés. Několik pohledů do jeho života a díla*. Matfyzpress, Praha, 2012.

[6] Heath T. L.: *The Works of Archimedes*. CUP, Cambridge, 1897. Reprint with *A Supplement , The Method of Archimedes.* New York, 1912.

[7] Heiberg J. L.: *Eine neue Archimedeshandschrift*. Hermes 42(1907), 234–303.

[8] Heiberg J. L., Zeuthen H. G.: *Eine neue Schrift des Archimedes*. Bibliotheca Mathematica, 3 ser., 7(1906–1907), 321–363.

[9] Heiberg J. L.: *Archimedis opera omnia cvm commentariis Evtocii. I, II, III*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1910 až 1915.

[10] Mugler C.: *Les Oeuvres Complètes d' Archimède*. 4 vols., les Belles Lettres, Paris, 1970–1972.

[11] Netz R., Saito K., Tchernetska N.: *A New Reading of Method Proposition 14: Preliminary Evidence from the Archimedes Palimpsest (1).* Sciamvs 2(2001), 9–29.

[12] Netz R., Saito K., Tchernetska N.: *A New Reading of Method Proposition 14: Preliminary Evidence from the Archimedes Palimpsest (2)*. Sciamvs 3(2002), 109–125.

[13] Netz R.: Archimedes: *Translation and Commentary, with a Critical Edition of the Diagrams and a Translation of Eutocius' Commentaries I: The Sphere and Cylinder*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[14] Netz R., Noel W.: *Archimedův kodex*. DEUS, Praha, 2008.

[15] Netz R., Noel W., Tchernetska N., Wilson N.: *The Archimedes Palimpsest I, II*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[16] Papadopulos-Kerameus A.: *Ἱεροσολυμιτικὴ Βιβλιοθήκη. I–V*. St. Petersburg, 1891–1915 (*IV:* 1899).

[17] Веселовский И. Н.: *Архимед. Сочинения*. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1962.

[18] Vrána Fr.: *Archimédův výklad Eratosthenovi o mechanických způsobech zkoumání*. 3.výroční zpráva c. k. státního gymnasia v Prostějově za školní rok 1908/09, tiskem knihtiskárny Václava Horáka v Prostějově, Prostějov, 2–18.

[19] The Digital Archimedes Palimpsest [online]. [cit. 28. 4. 2014]. http://digitalpalimpsest.org, http://archimedespalimpsest.net.

Adresa

Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *Zdenek.Halas@mff.cuni.cz*

ARITMETIZACE MATEMATICKÉ ANALÝZY A POJEM ÚPLNOSTI

Ivan Netuka

Abstract: Nineteenth century mathematics was strongly influenced by the successive development of new standards of rigour in mathematical analysis. The notions of a limit, continuity and convergence of series were all given firm foundations. Definitions and theorems attained essentially the forms that are accepted today and currently taught in basic analysis courses at university. A key point in the arithmetization of mathematical analysis was the realization that it is necessary to construct the real numbers in a sound manner. Their construction by the completion of the rationals inspired far-reaching generalizations and applications in the modern mathematical analysis that developed in the twentieth century. The Bolzano-Cauchy condition, which arose in the context of working with real numbers, found a parallel in the theory of abstract spaces, and played a key role in the introduction and investigation of completeness of metric spaces and normed linear spaces. The purpose of this contribution is to outline the historical background to the notion of completeness and to highlight its significance for modern mathematics.

Úvod

Matematika 19. století byla silně poznamenána postupným vytvářením nových standardů přesnosti v matematické analýze. Na solidní základ byly postaveny pojmy jako limita, spojitost, konvergence řady atd. Definice a základní věty dostávaly tvar, který je víceméně akceptován dodnes a bývá prezentován v současných úvodních přednáškách z analýzy. Podstatným krokem k aritmetizaci matematické analýzy[1] bylo poznání, že je nezbytné vybudovat reálná čísla na zdravém základu. Proces jejich konstrukce spočívající v zúplnění racionálních čísel se stal inspirací pro dalekosáhlá zobecnění a široká uplatnění v rámci moderní matematické analýzy ve 20. století. Bolzano-Cauchyova podmínka platná pro reálná čísla nacházela odraz v teorii abstraktních prostorů a byla klíčem k zavedení a studiu úplných metrických prostorů a úplných normovaných lineárních prostorů.

Cílem příspěvku je nastínit historický vývoj vedoucí k pojmu úplnosti a poukázat na jeho význam pro moderní matematiku.

Analýza v 19. století

Za významný rys matematiky 19. století jsou považovány snahy o zpřesňování a konsolidaci základů matematické analýzy. Lze říci, že na jeho konci se výklad základních pojmů analýzy dostal na úroveň, která je v zásadě shledávána do dnešní doby za dostatečnou pro prezentaci ve výuce.

[1] Aritmetizaci matematické analýzy je věnována v literatuře značná pozornost. Uveďme např. [Jah], kap. 10, [Kli1], kap. 40, 41, 43, [BB], [Bur], [Dug6], [Fel], [Fis], [Gra1], [Gra2], [Grt], [Lut].

Zpřesňování pojmů a výsledků analýzy nebylo považováno samo o sobě za primární cíl, představovalo součást tvořivého procesu. Vycházelo jednak z prohlubování poznatků o pojmech, které v dřívější době nebyly pojímány s dostatečnou rigorózností (funkce, spojitost, derivace, integrál, číselné řady a řady funkcí), jednak doprovázelo rozvoj nových teorií (diferenciální rovnice, analytické funkce, Fourierovy a trigonometrické řady, bodové množiny apod.). Impulzů k nastolení přesnosti v analýze bylo však ještě více. Matematika 19. století se postupně odkláněla od těsné návaznosti na fyziku, stávala se nezávislou disciplínou a nebylo již udržitelné odvolávat se na fyzikálně názorné představy či geometrickou intuici. I v aplikacích matematiky více a více rostly požadavky na legitimní užívání matematických prostředků (důkazy existence, oprávněnost manipulace s řadami, operace s diferenciály a nekonečně malými veličinami atd.). Silnou motivací byly také snahy o zkvalitnění univerzitní výuky matematiky, a tak nastolování přesnosti v analýze bylo součástí reformního hnutí na význačných univerzitách. Selhávaly pokusy o důkaz matematických tvrzení, která se z názoru zdála být evidentní (např. věty o spojitých funkcích na intervalu), scházel zdravý pojmový aparát, na němž by bylo možné stavět. Geometrické a fyzikální představy nebyly již považovány za dostatečně spolehlivé prostředky pro ospravedlnění matematických výsledků a obecněji i pro potvrzení pravdivosti v matematice.

Postupně sílilo přesvědčení, že bezpečnou půdu představuje aritmetika, založená na přirozených číslech a od nich odvozených číselných systémech. Je pozoruhodné a překvapující, že např. k logické výstavbě reálných čísel došlo teprve v druhé polovině 19. století.[2] Přitom je kuriózní, že solidní teorie reálných čísel, zdálo by se, nevyžadovala o moc více, než nový pohled na Eukleidovu teorii proporcí.[3]

Toto by byl ovšem velmi zjednodušující pohled: fundovaná definice iracionálního čísla je sofistikovaná. Iracionální číslo není jediný symbol (jako např. přirozené číslo), ani dvojice symbolů (jako např. racionální číslo), je to ve své podstatě nekonečný objekt (jako Cantorova fundamentální (cauchyovská) posloupnost nebo Dedekindův řez; viz dále).

V tomto textu se soustředíme na malý úsek projektu aritmetizace analýzy. Budeme se věnovat pojmu úplnosti v souvislosti s konvergencí číselných posloupností a řad.[4] Předmětem našeho zájmu bude zejména pojem cauchyovské posloupnosti.

Cauchyovské a konvergentní posloupnosti

Říkáme, že posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel je *cauchyovská*,[5] jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \geq k$ platí

$$|x_m - x_n| \leq \varepsilon.$$

[2] Podrobný výklad lze nalézet např. v [Jah], kap. 10, [Kli1], kap. 41, [Dug1], [Dug2], [Dug3], [Dug4], [Dug5], [Dug6], [Dug7], [Dug9], [Mar], [Med1], [Med2].

[3] Zde odkazujeme na [Jah], kap. 1, [Kli1], kap. 3, 4, [Bec], [Sim].

[4] Konvergencí posloupností a řad se zabývá rozsáhlá literatura, např. [Jah], kap. 4, [Kli1], kap. 20, 47, [BB], [Fer1], [Fer2], [Fer3], [Fer4], [Fer5], [FP], [Roy], [Ste].

[5] Někdy se říká: posloupnost $\{x_n\}$ splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku.

Je užitečné zdůraznit odlišnost tohoto pojmu od pojmu konvergence. Posloupnost $\{x_n\}$ se nazývá *konvergentní*, jestliže *existuje* reálné číslo x, pro něž $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Podrobněji: pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m \geq k$, platí

$$|x_m - x| \leq \varepsilon.$$

Jak víme, úplnost reálných čísel je vyjádřena touto větou ze základní přednášky z analýzy.[6]

Věta. *Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *posloupnost $\{x_n\}$ je konvergentní;*

(ii) *posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská.*

Podmínka (ii), intuitivně řečeno, vyjadřuje, že se členy čím dál více k sobě blíží, posloupnost vykazuje tendenci určitého zhušťování, aniž by se přitom o objektu, k němuž se případně členy posloupnosti hustí, jakkoli mluvilo. Pro reálnou osu $\mathbb{R}$ ekvivalence ukazuje, že takový objekt, ke kterému se body x_n neomezeně blíží, je v $\mathbb{R}$ k dispozici. Ještě jinak řečeno: v $\mathbb{R}$ nejsou žádné mezery. Uvedená vlastnost úplnosti má celou řadu ekvivalentních vyjádření, o nichž se ještě v dalším zmíníme.

Původ a vývoj pojmu úplnosti[7]

Nekonečné řady se v matematice začínaly více studovat od 14. století.[8] Samozřejmě pojem konvergence byl chápán velmi vágně, zhruba řečeno takto: kdy součet nekonečně mnoha čísel dává konečnou hodnotu. Ve 14. století N. Oresme[9] ukázal, že „součet“ harmonické řady o obecném členu $\frac{1}{n}$ je „nekonečný“, neboť „3. a 4. člen řady má součet převyšující $\frac{1}{2}$, podobně 5. až 8. člen, také 9. až 16. a tak dále“.

Podmínka, že n-tý člen se blíží k nule, nezaručuje tedy konečnost součtu. Oresmův argument zahrnuje implicitně informaci, že posloupnost částečných součtů harmonické řady není cauchyovská. S určitou nadsázkou lze konstatovat, že se zde poprvé setkáváme s negací Bolzano-Cauchyovy podmínky.

L. Euler[10] udělal další krok ve směřování k vlastnosti později vyjádřené Bolzano-Cauchyovou podmínkou. V roce 1740[11] vyšetřoval řadu

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{c}{a + jb}$$

[6] Viz např. [Jar3], str. 76, [Ves1], str. 68.

[7] O úplnosti je podrobně diskutováno v [Dug7], [Dug9].

[8] Viz [Jah], kap. 4, [Kli1], kap. 20, [Fer3], [Roy].

[9] Viz [Bus].

[10] Existuje rozsáhlá literatura o Eulerových výsledcích z nekonečných řad, např. [Fer4], [FP], [Fra], [Kli2], [Kow], [Var].

[11] Viz [Eul].

(užíváme, i v dalším, současné označení), kde a, b, c jsou kladná čísla. Označme

$$s_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{c}{a+(j-1)b}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Euler konstatoval, že rozdíl $s_{nk} - s_n$ je větší než

$$\frac{(k-1)nc}{a+(kn-1)b}$$

a usuzoval, že studovaná řada „se blíží k nekonečnu, neboť pro n jdoucí k nekonečnu se rozdíl $s_{nk} - s_n$ neblíží k nule“.[12]

První, kdo přesně formuloval základní kritérium konvergence, byl B. Bolzano. V roce 1817[13] usiloval o důkaz věty o mezihodnotě. V §7 uvedl tuto větu (následuje překlad F. J. Studničky):

Lehrsatz. Wenn eine Reihe von Größen $\overset{1}{F}x, \overset{2}{F}x, \overset{3}{F}x, \ldots, \overset{n}{F}x, \ldots, \overset{n+r}{F}x, \ldots$ von der Beschaffenheit ist, daß der Unterschied zwischen ihrem nten Gliede $\overset{n}{F}x$ und jedem späteren $\overset{n+r}{F}x$, sey dieses von jenem auch noch so weit entfernt, kleiner als jede gegebene Größe verbleibt, wenn man n groß genug angenommen hat: so gibt es jedesmahl eine gewisse *beständige Größe*, und zwar nur *eine*, der sich die Glieder dieser Reihe immer mehr nähern, und der sie so nahe kommen können, als man nur will, wenn man die Reihe weit genug fortsetzt.

[12] A. Pringsheim ukázal v [Pri], že podmínka $s_{nk} - s_n \to 0$, $n \to \infty$, není pro konvergenci řad postačující. Příklad: řada $\sum_{n=2}^{\infty} (n \log n)^{-1}$ je divergentní.

[13] Viz [Bol], jedna z nejvýznamnějších publikovaných Bolzanových prací. Bolzanovu přínosu pro základy matematické analýzy je věnována publikace [Jar1]. Viz též [Fel], [Gra3], [Ste]. Na konci příspěvku jsou připojeny obrázky titulních listů německé a české verze Bolzanovy práce (viz [Bol]).

§. 7.

Poučka. Jestli v řadě hodnot

$$\overset{1}{Fx},\ \overset{2}{Fx},\ \overset{3}{Fx},\ \ldots,\ \overset{n}{Fx},\ \ldots,\ \overset{n+r}{Fx},\ \ldots$$

rozdíl mezi n-tým členem $\overset{n}{Fx}$ a každým pozdějším $\overset{n+r}{Fx}$ sebe vzdálenějším od něho menší nežli každá veličina daná, jest vždy určitá *stálá* veličina, jíž se členové této řady vždy více blíží a jíž se mohou tak přiblížiti, jak jen libo, prodlouží-li se řada dosti daleko.[24])

[24]) Zde zavádí se patrně pojem *meze* čili *limity*, jenž v naší algebraické analysi hrají úkol tak důležitý a jehož symbolem jest *lim*. — Poučku tuto nově vyvinuje *Hankel*, neznaje patrně této práce Bolzanovy, ač jiné jeho výklady chválí. *Std.*

Tato formulace je (na tehdejší dobu přesným) vyjádřením implikace, že cauchyovská posloupnost je konvergentní. Bolzano se jako první pokusil o důkaz tohoto tvrzení. Jeho důkaz nemohl mít úspěch, neboť neexistovalo rigorózní zavedení reálných čísel. Problém ležel hlouběji, než si mohl uvědomit. K problému se vrátil ve své *Grössenlehre* v roce 1835; jeho snahy o zavedení reálných čísel však zůstaly neúplné.[14] Nicméně Bolzano učinil jako první v historii matematiky závažný krok k programu, který později je nazýván aritmetizace analýzy.

Bolzanova práce z roku 1817 je pozoruhodná svou myšlenkovou bohatostí a je považována za výjimečné dílo z matematické analýzy počátku 19. století. Bolzanův přínos spočívá také v tom, že důrazně upozorňoval na skutečnost, že i tvrzení, která se jeví z názoru jasná či plauzibilní, je třeba dokazovat. Pro náš další výklad je důležité, že Bolzano na základě (ne korektně dokázané) věty o konvergenci cauchyovské posloupnosti vyslovuje větu o supremu (viz dále). Ve skutečnosti je pro něho klíčem k důkazu věty o mezihodnotě pro spojité funkce na uzavřeném intervalu.

Systematicky k otázce konvergence číselné řady přistoupil A.-L. Cauchy v kapitole VI díla *Cours d'analyse* (1821).[15] Ve volném překladu zde reprodukujeme část §1:[16]

[14] Viz [Jar1], [Ryc].

[15] Viz [Cau]; Cauchyovu přínosu pro matematickou analýzu je věnována rozsáhlá literatura, např. [Kli1], kap. 40, [Ale], [Cle], [Dug6], [Dug7], [Fel], [Fra], [Gra1], [Gra2], [Gra3], [Grt], [Lak], [Lut], [Ste]. V posledních desetiletích věnují historici matematiky velkou pozornost interpretaci Cauchyova přístupu k analýze z pohledu nestandardní analýzy (nekonečně malé, nekonečně velké veličiny). Uveďme autoritativní diskusi v [BK] a dále např. [Fis], [Lau], [Lut].

[16] Na konci příspěvku je připojen originální Cauchyův text (viz [Cau]).

Řadou nazýváme nekonečnou posloupnost veličin

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ etc.,$$

které jsou odvozeny jedna od druhé podle určitého zákona [určité zákonitosti]. *Tyto veličiny jsou různé členy řady, která se uvažuje. Nechť*

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

je součet prvních n členů, kde n je celé číslo. Jestliže, pro stále rostoucí hodnoty n, se součet s_n neomezeně blíží určité limitě s, řada se bude nazývat konvergentní a příslušná limita bude nazývána součtem řady. Na druhé straně, pokud n roste nade všechny meze, se součet s_n žádné pevné limitě neblíží, řada bude divergentní a žádný součet nebude mít.

Cauchy dále diskutoval geometrickou řadu a pokračoval:

... k tomu, aby řada

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ etc. \quad \ldots \tag{1}$$

konvergovala, je nutné a stačí, aby při rostoucích hodnotách čísel n se součty

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ etc. \cdots + u_{n-1}$$

neomezeně blížily pevné limitě s: jinak řečeno, je nutné a stačí, aby pro nekonečně velké hodnoty n se součty

$$s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ etc.$$

lišily od limity s, a v důsledku toho navzájem, o nekonečně malé veličiny. Dále rozdíly prvního součtu s_n a každého dalšího jsou určeny rovnicemi

$$\begin{aligned}
s_{n+1} - s_n &= u_n, \\
s_{n+2} - s_n &= u_n + u_{n+1}, \\
s_{n+3} - s_n &= u_n + u_{n+1} + u_{n+2},
\end{aligned}$$

etc. ...

Tudíž, pro konvergenci řady (1) *je především nutné, aby se obecný člen u_n neomezeně zmenšoval, když n roste; tato podmínka není však postačující a musí ještě platit, že pro rostoucí hodnoty n různé součty*

$$\begin{aligned}
&u_n + u_{n+1}, \\
&u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \\
&etc. \ldots,
\end{aligned}$$

což znamená součty veličin

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2},\ etc.\ \ldots$$

od prvního, ať vezmeme členů, kolik chceme, zůstávají pod jakoukoli přiřaditelnou mezí. Obráceně, pokud takové podmínky jsou splněny, konvergence řady je zaručena.

Cauchy tedy nutnost Bolzano-Cauchyovy podmínky (v dnešní terminologii) nedokazoval a postačitelnost prostě jen konstatoval. Je třeba zdůraznit, že Cauchyovo dílo *Cours d'analyse* mělo obrovský ohlas v matematice 19. století a „Cauchyovo kritérium konvergence“ se stalo centrální větou klasické analýzy.

Úplnost reálných čísel

Současná metodologie výstavby matematiky předpokládá a priori (v nějaké formě) definici reálných čísel,[17] teprve potom se buduje soustava základních pojmů a výsledků matematické analýzy (limita, spojitost, konvergence posloupností, řad a řad funkcí, derivace, integrál ...).

Historicky, jak je známo, vývoj probíhal zcela obráceným směrem. Pravidla kalkulu se datují do konce 17. století, 18. století je poznamenáno svobodným zacházením s matematickými objekty. Například na číselné či mocninné řady se nahlíží, jakoby to byly konečné součty, či polynomy nekonečného stupně. Do počátku 19. století nepatřila mezi starosti matematiků obava o oprávněnost a korektnost užívaných postupů, např. diferencování a integrování nebylo dostatečně zdůvodněno ve smyslu procesů založených na pojmu limity. Bolzano, Cauchy a další matematici první poloviny 19. století přispěli k pochopení limitního přechodu zásadním způsobem.[18] Na druhé straně problematika *existence limit* zůstávala stranou a nebyla předmětem aktivního zkoumání. Teprve druhá polovina 19. století znamenala zásadní zvrat. C. Méray, R. Dedekind, G. Cantor a další matematici navrhli konstrukce reálných čísel,[19] v nichž jedna či jiná podoba úplnosti hraje klíčovou roli, a de facto tak umožňuje garantovat existenci limit. Toto byl rozhodující poslední krok ke skutečnému završení snah o aritmetizaci analýzy a k postavení kalkulu na solidních základech.

Rekapitulujme a doplňme informace o přínosu Cauchyho a Bolzana. Cauchy v roce 1821 založil svůj důkaz věty o mezihodnotě na předpokladu, že omezená monotónní posloupnost má limitu. O čtyři roky dříve Bolzano postupoval jinak. Snažil se dokázat, že každá cauchyovská posloupnost je konvergentní a z této informace odvodil důkaz existence suprema, což užil k důkazu věty o mezihodnotě. Do roku 1821 tak zájem o důkaz věty o mezihodnotě vedl ke třem mimořádně důležitým tvrzením:

---

[17] Viz např. [HS], str. 32, [Jar2], str. 39–72, [Ves1], str. 20.

[18] Vývoj pojmů limita a spojitost je diskutován např. v [Kli1], kap. 40, [BB], [Cle], [Dug2], [Dug5], [Dug6], [Dug7], [Lau], [Lut], [Ste].

[19] Z mnoha relevantních odkazů uvedeme např. [Kli1], kap. 41, [Can1], [Can2], [Ded1], [Ded2], [Dug1], [Dug2], [Dug3], [Dug4], [Dug5], [Dug6], [Dug7], [Dug9], [Hei], [Mar], [Med1], [Mer], [Ste].

1. *Každá cauchyovská posloupnost má limitu.*
2. *Každá (neprázdná) shora omezená množina reálných čísel má supremum.*
3. *Každá omezená monotónní posloupnost má limitu.*

Ve skutečnosti je známo, že tato tvrzení jsou navzájem ekvivalentní[20] (viz dále) a všechna svým způsobem vyjadřují úplnost reálné osy, tj. na reálné ose nejsou žádné mezery.

Pro zajímavost uveďme Bolzanovu formulaci věty o supremu (viz [Bol], následuje překlad F. J. Studničky).

Lehrsatz. Wenn eine Eigenschaft M nicht allen Werthen einer veränderlichen Größe x, wohl aber allen, die kleiner sind, als ein gewisser u, zukömmt: so gibt es allemahl eine Größe U, welche die größte derjenigen ist, von denen behauptet werden kann, daß alle kleineren x die Eigenschaft M besitzen.

§. 12.

Poučka. Nepřisluší-li nějaká vlastnost *M* *všem* hodnotám proměnné veličiny *x*, nýbrž jen *těm*, kteréž jsou *menší* nežli jakési *u*: existuje vždy veličina *U*, která jest největší z těch, o nichž možná tvrditi, že všechny menší *x* mají vlastnost *M*.[26])

[26]) Tato veličina *U* podlé *Weierstrasse* sluje **svrchní hodnotou mezní** všech *x*, jimž přísluší vlastnost *M*. *Std.*

Co jsou reálná čísla?

Hodně lehkovážná odpověď zní: jsou to racionální a iracionální čísla, přičemž iracionální čísla jsou limity posloupností racionálních čísel. Zde je však vážná logická mezera, podstatná vada na kráse: limita, pokud je iracionální, nemá nárok na existenci, na takové pojmenování, dokud iracionální čísla nejsou definována. G. Cantor

[20] Detailní rozbor lze nalézt v [Noz]. V článku se a priori předpokládá, že reálná čísla máme. Pak se z každého z tvrzení 1., 2. a 3. jednotlivě odvozují ostatní. Ještě další „ekvivalentní“ tvrzení je zahrnuto: nekonečná omezená množina má hromadný bod (tzv. Bolzano-Weierstrassova věta).

poznamenal, že takový logický nedostatek unikal pozornosti proto, že nezpůsoboval žádné potíže. Ostatně ztotožňování geometrické přímky, která žádné mezery nemá, a reálných čísel, bylo považováno za nevinné a plausibilní.

Ve druhé polovině 19. století se poprvé v dějinách matematiky objevily pokusy o konstrukci reálných čísel. Z jejich autorů byli nejvýznamnější Ch. Méray (1868–1869),[21] K. Weierstrass (1859–1869),[22] G. Cantor (1872, 1883, Cantorův přístup uveřejnil E. Heine[23] v roce 1872),[24] R. Dedekind (1872, ideje již v roce 1858).[25] Méray vytvořil teorii *limites fictives*, v zásadě podobně jako u Cantora jde o jisté ztotožnění cauchyovských posloupností racionálních čísel s „novými" čísly. Weierstrassův přístup je složitý, do určité míry jej lze velmi nepřesně popsat jako přístup víceméně založený na desetinných rozvojích.

O Dedekindově teorii uvedeme několik nejdůležitějších informací. A.-L. Cauchy na École Polytechnique ve dvacátých letech 19. století usiloval o zdravý výklad pojmů, jako jsou např. limita, spojitost, konvergence. R. Dedekind, který učil na polytechnice v Curychu, hledal takřka o čtyřicet let později rozumnou cestu k rigoróznímu výkladu základů analýzy. Nebyl spokojen s Cauchyovým přístupem založeným mj. na nezdůvodněném faktu, že omezené monotónní posloupnosti mají limitu. Dedekind vyšel z představy, že reálná čísla, jako objekt čistě aritmetický, musí v sobě nést vlastnost úplnosti (říká *spojitosti*) jako přímka, objekt čistě geometrický. Musí to tedy být tedy kontinuum bez mezer.

Dedekindova primární představa vychází z geometrického faktu, že každý bod přímky ji dělí na dvě části takové, že každý bod jedné části leží nalevo od každého bodu z druhé části. Odtud usoudil, že body přímky odpovídají rozkladu s uvedenou vlastností. Reálné číslo je pak pro něho takový rozklad (A_1, A_2) množiny všech racionálních čísel, pro nějž A_1 leží nalevo od A_2. Takovou dvojici (A_1, A_2) nazývá řezem (*Schnitt*). Zřejmě každé racionální číslo definuje řez. Jestliže však například A_1 je sjednocením záporných racionálních čísel a nezáporných racionálních čísel, jejichž čtverec je menší než číslo 2, A_2 jsou ostatní racionální čísla, potom řez (A_1, A_2) není vytvořen žádným racionálním číslem. Takto jsou vytvářena iracionální čísla jako ty řezy racionálních čísel, které nejsou určeny žádným racionálním čísel.

---

[21] Viz [Mer] a [Dug1], [Dug2], [Dug7], [Dug9].

[22] Viz [Kos] a [Dug3], [Dug7], [Dug9].

[23] Viz [Hei].

[24] Viz [Can1], [Can2] a [Dug7], [Dug9]. Obecně se uvádí, že Ch. Méray, G. Cantor, R. Dedekind, E. Heine a E. Kossak (výklad Weierstrassovy teorie) kolem roku 1872 předložili dostatečně přesvědčivé teorie konstrukce reálných čísel a podali přijatelně spolehlivé důkazy úplnosti. F. A. Medveděv, renomovaný ruský historik matematiky, publikoval poměrně ostrou kritiku tohoto názoru; viz [Med1], [Med2]. Např. dokumentoval, že G. Cantor ve skutečnosti (pomocí tříd cauchyovských posloupností racionálních čísel) konstruoval iracionální čísla „první generace", takto obohacený číselný systém podrobil stejné proceduře a konstruoval iracionální čísla „druhé generace" atd. V práci [Can2] se G. Cantor ke konstrukci vrátil, ale ve skutečnosti neukázal, že úplnost je výsledkem už prvního kroku. A. I. Markuševič v [Mar] vyjádřil s Medveděvovou kritikou nesouhlas a předložil argumenty pro tvrzení, že není adekvátní.

[25] Viz [Ded1], [Ded2], [Dug7], [Dug9], [Wey]. Podrobný výklad o Dedekindových řezech je uveden v [Jar2], str. 39–72.

Racionální a iracionální čísla takto ztotožněná s řezy tvoří podle definice reálná čísla. Zbývá ovšem ještě mnoho práce: definovat uspořádání, algebraické operace a dokázat, že takto definovaný objekt R reálných čísel má vlastnost spojitosti. *Jestliže A_1, A_2 jsou části R, $A_1 \cup A_2 = R$, a pro každé $a_1 \in A_1$ a $a_2 \in A_2$ platí $a_1 < a_2$, potom existuje $a \in R$, které tento rozklad vytváří.*[26] Dedekind dokazuje, že R má výše uvedené vlastnosti 1., 2., 3., a tak se mj. ukazuje, že jeho teorie je ekvivalentní s teorií, kterou navrhli Ch. Méray, G. Cantor a E. Heine.

Význam úplnosti pro základy matematické analýzy

Nechť $\mathbb{F}$ je uspořádané (komutativní) těleso charakteristiky 0.[27] Je-li 1 jednotka v $\mathbb{F}$, pak prvky $1, 1+1, \ldots, n \cdot 1, \ldots$ se nazývají přirozená čísla v $\mathbb{F}$. Označme je $\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$. Od $\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ jsou přirozeným způsobem odvozena racionální čísla, která označíme $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$. Říkáme, že těleso $\mathbb{F}$ je archimedovsky uspořádané, jestliže pro každé $x \in \mathbb{F}$ existuje $n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ takové, že $|x| < n$; zde $|x| := \max\{-x, x\}$. Definice cauchyovské posloupnosti $\{x_n\}$ v $\mathbb{F}$ je doslova stejná: pro každé $\varepsilon \in \mathbb{F}$, $\varepsilon > 0$, existuje $k \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ takové, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}$, $m, n \geq k$, platí

$$|x_m - x_n| \leq \varepsilon.$$

Analogicky se definuje limita posloupnosti. Ani definice úplnosti nepřekvapí: těleso $\mathbb{F}$ se nazývá *úplné*, jestliže každá cauchyovská posloupnost prvků z $\mathbb{F}$ má limitu v $\mathbb{F}$.

Protože v $\mathbb{F}$ jsou přirozeným způsobem definovány intervaly, lze doslova převzít $\varepsilon - \delta$ definici limity, spojitosti a derivace pro funkci $f := \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \varepsilon, \delta \in \mathbb{F}$. Dedekindovy řezy jsou v $\mathbb{F}$ definovány zřejmým způsobem.

Není těžké dokázat, že každá dvě úplná archimedovsky uspořádaná tělesa $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ jsou izomorfní, tj. existuje prosté zobrazení $\mathbb{F}_1$ na $\mathbb{F}_2$, které zachovává algebraické operace a zachovává uspořádání. Tato informace o jednoznačnosti dává smysl definici: *Těleso reálných čísel je libovolné úplné archimedovsky uspořádané těleso.*[28]

Existence takového tělesa není ovšem vůbec samozřejmá; obvykle se dokazuje pomocí Cantorova či Dedekindova přístupu.[29]

Význam pojmu úplnosti pro základy matematické analýzy je patrný z následujícího seznamu ekvivalentních výroků.[30]

Věta. *Nechť $\mathbb{F}$ je archimedovsky uspořádané těleso. Potom jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) *Každá cauchyovská posloupnost prvků z $\mathbb{F}$ má v $\mathbb{F}$ limitu, tj. těleso je úplné.*

---

[26] Jinak řečeno: řezy „druhé generace“ už žádná „nová iracionální čísla“ nevytvářejí. Viz [Jar2], str. 67–68.

[27] Charakteristikou tělesa T rozumíme nejmenší přirozené číslo n takové, že součet $1+1+1+\ldots$ o n členech je roven 0. Pokud žádné takové n neexistuje, říkáme, že těleso T má charakteristiku 0. Podrobný výklad lze nalézt např. v [HS], str. 32–46.

[28] Viz [HS], str. 46.

[29] Podrobné konstrukce jsou popsány v [HS], str. 32–46, a v [Jar2], str. 39–72.

[30] Těmto (a dalším) ekvivalentním výrokům je věnována práce [Tei]. Tamtéž je uveden rozsáhlý seznam literatury.

(ii) *Pro každý řez* (A_1, A_2) *existuje* $x \in \mathbb{F}$ *takové, že* $a_1 \leq x \leq a_2$ *pro každé* $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$.

(iii) *Každá omezená monotónní posloupnost má v* $\mathbb{F}$ *limitu.*

(iv) *Každá neprázdná shora omezená podmnožina* $\mathbb{F}$ *má v* $\mathbb{F}$ *supremum.*

(v) *Každá nekonečná omezená množina má v* $\mathbb{F}$ *hromadný bod.*

(vi) *Každá nerostoucí posloupnost uzavřených intervalů v* $\mathbb{F}$ *má neprázdný průnik.*

(vii) *Každá spojitá funkce na* $[a, b]$ *nabývá na* $[a, b]$ *všech hodnot mezi* $f(a)$ *a* $f(b)$.

(viii) *Každá spojitá funkce na* $[a, b]$ *je omezená.*

(ix) *Každá spojitá funkce na* $[a, b]$ *je stejnoměrně spojitá.*

(x) *Každá spojitá funkce na* $[a, b]$ *nabývá na* $[a, b]$ *maxima.*

(xi) *Pro každou spojitou funkci* $f := [a, b] \to \mathbb{F}$ *diferencovatelnou na* (a, b) *existuje* $c \in (a, b)$ *takové, že* $f'(c) = \big(f(b) - f(a)\big)/(b - a)$.[31]

(xii) *Derivace každé diferencovatelné funkce* $f : [a, b] \to \mathbb{F}$ *nabývá na* $[a, b]$ *všech hodnot mezi* $f'(a)$ *a* $f'(b)$.

Tento seznam výroků ekvivalentních s úplností není samozřejmě kompletní.

Úplnost v abstraktní analýze

V prvních dekádách 20. století se v analýze formují nové směry s cílem přenést pojmy jako jsou limita a spojitost na mnohem obecnější situace, než jsou reálné funkce na reálné ose či v $\mathbb{R}^m$.[32] Množinové pojetí postupně získává více a více příznivců, do hry vstupuje nově koncipovaná teorie míry a integrálu, významné postavení získávají pojmy jako jsou otevřené a uzavřené množiny, hromadné body, kompaktní množiny atd. Vedle zkoumání bodových funkcí se ukazuje důležité vyšetřovat případy, kdy proměnné ve funkcích (= funkcionálech) jsou např. posloupnosti nebo bodové funkce. Počátek století znamená v analýze přechod k abstraktním spojitým strukturám, které vhodným způsobem umožňují, nezávisle na konkrétní uvažované situaci, zachytit dynamiku, formulovat pojem blízkosti, limitního přechodu, spojité změny apod. V prvních dvou dekádách 20. století se objevují struktury, jako jsou *metrické prostory*, *topologické prostory*, *normované lineární prostory*.

Metrický prostor,[33] což je množina zcela libovolných prvků (bodů), na níž je definována vzdálenost dvojice bodů, umožňuje do abstraktní situace přenést většinu pojmů klasické analýzy souvisejících s pojmem spojitosti.

Přirozeným způsobem jsou zavedeny *úplné metrické prostory*. Připomeňme, že d se nazývá metrika na množině X, jestliže d přiřazuje dvojici bodů $x, y \in X$ nezáporné reálné číslo $d(x, y)$ takové, že $d(x, y) = 0$, právě když $x = y$, d je symetrická

[31] O historii věty o přírůstku funkce se lze poučit v [Dug8].

[32] Z rozsáhlé literatury o původu a vývoji abstraktní analýzy uvádíme: [Jah], kap. 13, [Kli1], kap. 46, [Die], [Dud], [Fre], [Mon], [Pie].

[33] Základní poznatky o metrických prostorech lze nalézt např. v [Cec], [Ves2], kap. 12, 13.

a splňuje trojúhelníkovou nerovnost připomínající rovinnou elementární geometrii:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \quad x,y,z \in X.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ bodů z X se nazývá *cauchyovská*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m,n \in \mathbb{N}$, $m,n \geq k$, platí

$$d(x_m, x_n) \leq \varepsilon.$$

Také definice konvergentní posloupnosti je bezprostředním přenesením definice z reálné osy. Metrický prostor X se nazývá *úplný*, jestliže každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Je známo, že podprostor Y úplného metrického prostoru X je úplný prostor, právě když Y je uzavřená podmnožina X.[34]

Uveďme jeden příklad: Nechť X je metrický prostor a $C_b(X)$ je prostor všech reálných omezených spojitých funkcí na X. Metrika na $C_b(X)$ je definována

$$\varrho(f,g) := \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in X\}, \quad f,g \in C_b(X).$$

Potom $C_b(X)$ je úplný prostor (plyne snadno z toho, že konvergence v $C_b(X)$ znamená stejnoměrnou konvergenci na X).

Pozornost jsme věnovali tomu, že racionální čísla lze obohatit a doplnit na reálná čísla tak, že se „vyplní mezery". To je proces zúplnění. V roce 1914 ukázal F. Hausdorff,[35] že každý metrický prostor lze zúplnit. Podrobněji: *Nechť X je (libovolný) metrický prostor. Potom existuje úplný metrický prostor $\widetilde{X}$ obsahující X jako hustý podprostor. Prostor $\widetilde{X}$ se nazývá zúplnění metrického prostoru X (nebo úplný obal). Úplný obal je v zásadě určený jednoznačně: Jsou-li $\widetilde{X_1}$, $\widetilde{X_2}$ úplné obaly metrického prostoru X, pak existuje izometrické zobrazení F prostoru $\widetilde{X_1}$ na $\widetilde{X_2}$ takové, že $F(x) = x$ pro každé $x \in X$.* Většina důkazů existence zúplnění metrického prostoru X kopíruje postup, který Méray a Cantor užili u reálných čísel: ideální přidané body jsou vhodně faktorizované množiny cauchyovských posloupností bodů z X.

Uvedeme zde jiný, vcelku málo známý, důkaz[36] existence úplného obalu. Nechť X je metrický prostor s metrikou d, $a \in X$. Pro $x \in X$ definujme

$$h_x(t) := d(x,t) - d(a,t), \quad t \in X.$$

Potom je funkce h_x spojitá na X a z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$\varrho(h_x, 0) \leq d(x,a),$$

[34] Věta je dokázána v [Cec], str. 90.
[35] Viz [Hau], str. 315.
[36] Důkaz je převzat z [Haj].

takže $h_x \in C_b(X)$. Podobně pro $x, y \in X$ je

$$\varrho(h_x, h_y) = \sup\{|d(x,t) - d(y,t)| : t \in X\} \leq d(x,y).$$

Ve skutečnosti platí rovnost (stačí volit $t = y$). Zobrazení

$$h : x \longmapsto h_x, \quad x \in X,$$

což je zobrazení X do $C_b(X)$, je tedy izometrie. Nyní stačí položit

$$\widetilde{X} := \overline{h(X)}.$$

Potom $\widetilde{X}$ je uzavřený podprostor úplného prostoru $C_b(X)$, tedy h zobrazuje X izometricky na hustou podmnožinu úplného prostoru $\widetilde{X}$.

Mimořádný význam má úplnost ve funkcionální analýze.[37] Úplný lineární prostor se skalárním součinem se nazývá *Hilbertův prostor*. Úplný normovaný lineární prostor se nazývá *Banachův prostor*. Tyto prostory jsou velmi důležité v aplikacích matematické analýzy (například ve variačním počtu, diferenciálních a integrálních rovnicích). Od 20. až 30. let minulého století, kdy se jejich teorie začíná rozvíjet, se postupně staly nepominutelnou složkou vzdělání každého matematika a výzbrojí každého, kdo užívá matematiku ve fyzice, technických vědách apod.

Snaha zobecnit pojem úplnosti pro topologické prostory (případně topologické lineární prostory) vedla k definici uniformních prostorů, těmi se zde však zabývat nebudeme.[38]

Význam úplnosti v abstraktní analýze

Z klasické analýzy víme, že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{2}$$

konverguje, její částečné součty tvoří rostoucí posloupnost omezenou např. číslem 3. Tudíž úplnost nám garantuje, že existuje reálné číslo, které je řadou (2) *definováno*.

Součet této řady můžeme užít k definici čísla e. (Víme, že součet řady není racionální číslo,[39] částečné součty řady se v tomto případě hustí k mezeře v racionálních číslech.) Úplnost je zde tedy klíčem *k existenci limity*.

---

[37] Historie Hilbertova a Banachova prostoru je detailně popsána v [Die], [Mon], [Pie]; význam těchto prostorů pro aplikace je ilustrován např. v [GP], [Zei1], [Zei2]. Pod názvem *espace du type (B)* jsou poprvé Banachovy prostory systematicky studovány v [Ban3].

[38] Základní poznatky o historii a stěžejních výsledcích lze nalézt v [Dug9].

[39] Důkaz je uveden ve [Ves1], str. 88.

Z abstraktní analýzy jako příklad připomeňme *Banachovu větu o pevném bodu pro kontrahující zobrazení*,[40] v níž úplnost hraje podstatnou roli.

Věta. *Nechť* $q \in [0,1)$, X *je úplný metrický prostor s metrikou* d *a nechť pro zobrazení* $f : X \to X$ *platí*

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq q \cdot d(x,y), \quad x, y \in X. \tag{3}$$

Potom zobrazení f má právě jeden pevný bod, tj. existuje právě jedno $x \in X$ takové, že $f(x) = x$.

Uvedeme jen náznak důkazu. Zvolí se $x_0 \in X$ a vyšetřuje se posloupnost iterací (*orbita* bodu x_0) definovaná jako

$$f^0(x_0) := x_0, \quad f^n(x_0) := f\big(f^{n-1}(x_0)\big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Z podmínky (3) vyplývá, že posloupnost $\{f^n(x_0)\}$ je cauchyovská. Předpoklad úplnosti zaručuje existenci bodu $x \in X$ takového, že

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x.$$

Podle (3) je zobrazení f spojité. Proto

$$x = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = f\big(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)\big) = f(x).$$

Jednoznačnost plyne okamžitě z (3).

Úplnost se vyskytuje ve dvou ze tří základních pilířů lineární funkcionální analýzy, které mají četné aplikace.

Připomeňme, že pro normované lineární prostory X, Y a pro lineární zobrazení (zde je běžný termín *operátor*[41]) $T : X \to Y$ se definuje

$$||T|| := \sup\{||Tx|| : x \in X, ||x|| \leq 1\}.$$

Je známo, že $||T|| < \infty$, právě když operátor T je spojitý.

Uveďme tuto větu:[42] *Jestliže* X *a* Y *jsou Banachovy prostory (úplnost!),* T *je prosté spojité zobrazení* X *na* Y*, pak inverzní zobrazení* T^{-1} *je automaticky spojité.* To je překvapivé, obecně inverzní zobrazení ke spojitému zobrazení spojité není. Uvedená věta se nazývá *Banachova věta o inverzním zobrazení*.[43] Je speciálním případem tzv. *věty o otevřeném zobrazení*.

[40] Věta má původ v teorii integrálních rovnic a souvisí s tzv. Neumannovou řadou. S. Banach si v [Ban1] povšiml, že věta platí obecně pro *nelineární* kontrahující zobrazení.

[41] O historii lineárních operátorů podrobně pojednává [Die], [Mon], [Pie].

[42] Větu dokázal S. Banach v [Ban2]. Původní důkaz byl složitý, byl založen na slabé konvergenci; viz [Pie], str. 44. J. Schauder v [Sch] uvedl podstatně zjednodušený důkaz.

[43] Věta o otevřeném zobrazení pochází od J. Schaudera [Sch].

Úplnost Y v důkazu vstupuje do hry tím, že zaručuje konvergenci vhodně definovaných postupných aproximací. Úplnost X se obvykle uplatní prostřednictvím následujícího důsledku *Baireovy věty.*[44]

Věta. *Jestliže X je úplný metrický prostor, M_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou uzavřené množiny v X, pro něž*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n,$$

potom existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že množina M_k obsahuje vnitřní body.

Další pilíř lineární funkcionální analýzy, *Banach-Steinhausova věta*,[45] bývá dnes obvykle dokazována pomocí výše uvedeného důsledku Baireovy věty.

Věta. *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a nechť $T_\alpha : X \to Y$, $\alpha \in A$, spojitý lineární operátor. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *Systém $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je bodově omezený, tj. pro každé $x \in X$ je*

$$sup\{||T_\alpha x|| : \alpha \in A\} < \infty.$$

(ii) *Systém $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je stejnoměrně omezený, tj.*

$$sup\{||T_\alpha|| : \alpha \in A\} < \infty.$$

Poznamenejme, že implikace (ii) $\Rightarrow$ (i) je triviální neboť $||T_\alpha x|| \leq ||T_\alpha|| \cdot ||x||$, $x \in X$.

Závěr

Úplnost je jedním ze základních pojmů matematické analýzy. Svůj původ má v hlubokém pochopení struktury reálné osy. Jeho dalekosáhlý význam pro reálnou analýzu je nedocenitelný. Je to pojem, který, podobně jako spojitost, diferencovatelnost nebo kompaktnost, činí z matematické analýzy užitečný nástroj nejen pro matematiku jako takovou, ale i v rozsáhlé míře pro její aplikace.

---

[44] Baireova věta v $\mathbb{R}$ je dokázána v [Bai]. O jejím původu, vývoji a významu podrobně pojednává [NV].

[45] Název věty referuje k práci [BS]. Věta má zajímavou historii, viz [Die], str. 138–142, [Pie], str. 40–43.

Rein analytischer

Beweis des Lehrsatzes,

daß

zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege;

von

Bernard Bolzano,

Weltpriester, Doctor der Philosophie, k. k. Professor der Religionswissenschaft, und ordentlichem Mitgliede der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag

---

Für die Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wissenschaften.

Prag. 1817,
gedruckt bei Gottlieb Haase.
Facsimile-Druck Berlin 1894. Mayer & Müller.

RYZE ANALYTICKÝ
DŮKAZ POUČKY,

že

mezi dvěma hodnotami, jež poskytují opačně označené výsledky, leží nejméně jeden realný kořen rovnice.

Podal

BERNARD BOLZANO,
světský kněz, doktor filosofie, c. k. professor vědy náboženské a řádný člen král. společnosti náuk v Praze.

(Abhandlungen der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, V. Bd. 1817.)

Z němčiny přeložil, poznámkami opatřil

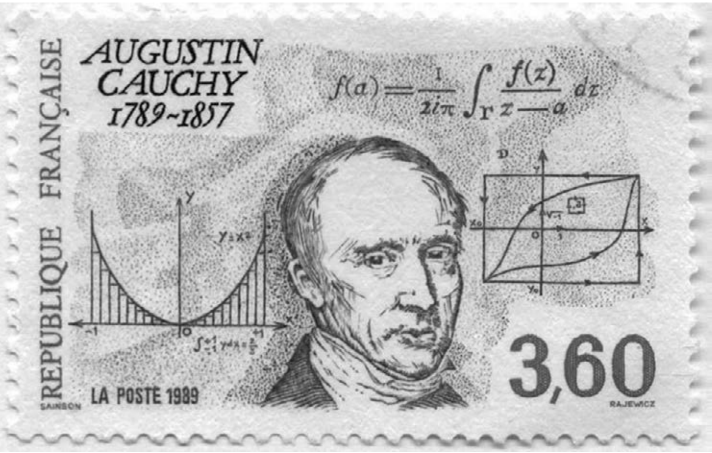
a k oslavě stoletých narození Bolzanových

vydal

Dr. F. J. STUDNIČKA,
v. ř. professor mathematiky na c. k. universitě, řádný člen král. české společnosti náuk v Praze a král. belgické společnosti náuk v Lutychu atd.

V PRAZE.
Nákladem Jednoty českých mathematiků.
1881.


UNESCO
1 Kčs
Československo
1781-1848
B. Bolzano


REPUBLIQUE FRANÇAISE
AUGUSTIN
CAUCHY
1789-1857
$f(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}dz$
LA POSTE 1989
3,60

CHAPITRE VI.

Des Séries convergentes et divergentes. Règles sur la convergence des Séries. Sommation de quelques Séries convergentes.

§. 1.$^{\text{er}}$ *Considérations générales sur les Séries.*

On appelle *série* une suite indéfinie de quantités

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \&c. \ldots$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différens *termes* de la série que l'on considère. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s; la série sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la *somme* de la série. Au contraire, si, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe; la série sera *divergente*, et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme qui correspond à l'indice n, savoir u_n, sera ce qu'on nomme le *terme général*. Il suffit que l'on donne ce terme général en fonction de l'indice n, pour que la série soit complétement déterminée.

L'une des séries les plus simples est la progression géométrique

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \&c. \ldots$$

qui a pour terme général x^n, c'est-à-dire, la puissance $n.^{me}$ de la quantité x. Si dans cette série on fait la somme des n premiers termes, on trouvera

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x};$$

et, comme pour des valeurs croissantes de n la valeur numérique de la fraction $\frac{x^n}{1-x}$ converge vers la limite zéro, ou croît au-delà de toute limite, suivant qu'on suppose la valeur numérique de x inférieure ou supérieure à l'unité, on doit conclure que dans la première hypothèse la progression

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \&c. \ldots$$

est une série convergente qui a pour somme $\frac{1}{1-x}$, tandis que dans la seconde hypothèse la même progression est une série divergente qui n'a plus de somme.

D'après les principes ci-dessus établis, pour que la série

$$(1) \qquad u_0,\ u_1,\ u_2 \ldots u_n,\ u_{n+1},\ \&c. \ldots$$

soit convergente, il est nécessaire et il suffit que des valeurs croissantes de n fassent converger indéfiniment la somme

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \&c. \ldots + u_{n-1}$$

vers une limite fixe s : en d'autres termes, il est nécessaire et il suffit que, pour des valeurs infiniment grandes du nombre n, les sommes

$$s_n, \quad s_{n+1}, \quad s_{n+2}, \quad \&c. \ldots$$

diffèrent de la limite s, et par conséquent entre elles, de quantités infiniment petites. D'ailleurs, les différences successives entre la première somme s_n et chacune des suivantes sont respectivement déterminées par les equations

$$s_{n+1} - s_n = u_n,$$

$$s_{n+2} - s_n = u_n + u_{n+1},$$

$$s_{n+3} - s_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$

$$\&c. \ldots .$$

Donc, pour que la série (1) soit convergente, il est d'abord nécessaire que le terme général u_n décroisse indéfiniment, tandis que n augmente ; mais cette condition ne suffit pas, et il faut encore que, pour des valeurs croissantes de n, les différentes sommes

$$u_n + u_{n+1},$$

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$

$$\&c. \ldots .$$

c'est-à-dire, les sommes des quantités

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \&c. \ldots$$

126 COURS D'ANALYSE.

prises, à partir de la première, en tel nombre que l'on voudra, finissent par obtenir constamment des valeurs numériques inférieures à toute limite assignable. Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée.

Literatura

[Ale] Aleksandrova N. V., *The theory of series in a real domain in the works of Cauchy*, Istor.-Mat. Issled. **45** (2005), 260–280 (rusky).

[Bai] Baire R., *Sur les fonctions de variables réelles*, Ann. Mat. Pura Appl. **(3) 3** (1899), 1–123.

[Ban1] Banach S., *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales*, Fund. Math. **3** (1922), 133–181.

[Ban2] Banach S., *Sur les fonctionnelles linéaires*, Studia Math. **1** (1929), 211–216, 223–239.

[Ban3] Banach S., *Théorie des opérations lineaires*, Monografje Matematyczne, vol. I., Warszawa, 1932.

[BS] Banach S., Steinhaus H., *Sur le principe de condensation des singularité*, Fund. Math. **9** (1927), 50–61.

[Bec] Bečvář J., *Teorie proporcí*, in Dostálová L. (ed.): *Euklides: Základy geometrie*, Západočeská univerzita, Plzeň, 2008, 63–105.

[BK] Błaszczyk P., Katz M. G., Sherry D., *Ten misconceptions from the history of analysis and their debunking*, Found. Sci. **18** (2013), 43–74.

[Bol] Bolzano B., *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Abhandlungen der königlich böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, 3. Folge, Band 5, 1. Abtheilung, 1817, 60 stran [česky: *Ryze analytický důkaz poučky, že mezi dvěma hodnotami, jež poskytují opačně označené výsledky, leží nejméně jeden reálný kořen*, z němčiny přeložil, poznámkami opatřil a k oslavě stoletých narozenin Bolzanových vydal František Josef Studnička, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **11**(1882), 1–38, vydáno též jako zvláštní otisk s týmž názvem, Dr. Ed. Grégr, Praha, 1881].

[BB] Bos H. J. M., Bunn R., Dauben J. W., Grattan-Guinness I., Hawkins T. W., Pedersen K. M., *From the calculus to set theory, 1630–1910*, An introductory history, Gerald Duckworth & Co. Ltd., London, 1980.

[Bur] Burn R. P., *Irrational numbers in English language textbooks, 1890–1915: constructions and postulates for the completeness of the real numbers*, Historia Math. **19** (1992), 158–176.

[Bus] Busard H. L. L. (ed.), *Nicole Oresme Questiones super Geometriam Euclidis*, Brill, Leiden, 1961 (anglicky).

[Can1] Cantor G., *Über die Ausdehung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, Math. Ann. **5** (1872), 123–132.

[Can2] Cantor G., *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, B. G. Teubner, Leipzig, 1883.

[Cau] Cauchy A.-L., *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*, Paris, 1821 [*Oeuvres Complètes*, série 2, volume 3].

[Cle] Cleave J. P., *Cauchy, convergence and continuity*, British J. Phil. Soc. **22** (1971), 27–37.

[Cec] Čech E., *Bodové množiny*, Academia, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1966.

[Ded1] Dedekind R., *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Vieweg, Braunschweig, 1872.

[Ded2] Dedekind R., *Was sind und was sollen die Zahlen*, Vieweg, Braunschweig, 1888.

[Die] Dieudonné J., *History of functional analysis*, North-Holland Mathematics Studies 49, Notas de Matemática 77, North-Holland Publishing Co., Amsterdam – New York, 1981.

[Dud] Duda R., *The discovery of Banach spaces*, in Więsław W. (ed.): *European mathematics in the last century*, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław, 2005, 37–46.

[Dug1] Dugac P., *Charles Méray (1835–1911) et la notion de limite*, Rev. Histoire Sci. Appl. **23** (1970), 333–350.

[Dug2] Dugac P., *The limit concept and irrational numbers: ideas of Charles Méray and Karl Weierstrass*, Studies in the history of mathematics, no. 18, Izdatel'stvo Nauka, Moscow, 1973, 176–180 (rusky).

[Dug3] Dugac P., *Éléments d'analyse de Karl Weierstrass*, Arch. Hist. Exact. Sci. **10** (1973), 41–176.

[Dug4] Dugac P., *Problèmes de l'histoire de l'analyse mathématique au XIXème siècle. Cas de Karl Weierstrass et de Richard Dedekind*, Historia Math. **3** (1976), 5–19.

[Dug5] Dugac P., *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Avec de nombreux text inédits, Collection de Travaux de l'Académie internationale d'Historie des Sciences No. 24, L'Histoire des Sciences, Textes et Études, Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 1976.

[Dug6] Dugac P., *Fondaments de l'Analyse*, in Dieudonné J. (ed.): *Abrégé d'histoire mathématiques 1700–1900*, Tome I., Algèbre, analyse classique, théorie des nombres, Hermann, Paris, 1978, 335–392.

[Dug7] Dugac P., *Sur les fondaments de l'analyse de Cauchy à Baire*, Thèse de doctorat d'état ès sciences mathématiques, L'université Pierre et Marie Curie, Paris, 1978.

[Dug8] Dugac P., *Histoire du théorème des accroissements finis*, Arch. Internat. Hist. Sci. **30** (1980), 86–101.

[Dug9] Dugac P., *Histoire des espaces complets*, Rev. Histoire Sci. Appl. **37** (1984), 3–28.

[Eul] Euler L., *De progresionibus harmonicis observationes*, Comm. acad. sci. Petropolitanae **7** (1734–1735), 1740, 150–161 [*Opera omnia* (1)XIV, 87–100].

[Fel] Felscher W., *Bolzano, Cauchy, epsilon, delta*, Amer. Math. Monthly **107** (2000), 844–862.

[Fer1] Ferraro G., *The first modern definition of the sum of a divergent series: an aspect of the rise of 20th century mathematics*, Arch. Hist. Exact. Sci. **54** (1999), 101–135.

[Fer2] Ferraro G., *Rigore e dimostrazione in Matematica alla metà del Settecento*, Physis Rivista internazionale di storia della scienza **(2) 36** (1999), 137–163.

[Fer3] Ferraro G., *Convergence and formal manipulation of series from the origins of calculus to about 1730*, Ann. of Sci. **59** (2002), 179–199.

[Fer4] Ferraro G., *Convergence and formal manipulation in the theory of series from 1730 to 1815*, Historia Math. **34** (2007), 62–88.

[Fer5] Ferraro G., *The rise and development of the theory of series up to the early 1820s*, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer, New York, 2008.

[FP] Ferraro G., Panza M., *Developing into series and returning from series: a note on the foundations of eighteenth-century analysis*, Historia Math. **30** (2003), 17–46.

[Fis] Fischer G., *Cauchy and the infinitely small*, Historia Math. **5** (1978), 313–331.

[Fra] Fraser C., *The calculus as algebraic analysis: Some observations on mathematical analysis in the 18th century*, Arch. Hist. Exact. Sci. **39** (1989), 317–335.

[Fre] Fréchet M., *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rendiconti Circolo mat. Palermo **22** (1906), 1–74.

[Fru] Freudenthal H., *Did Cauchy plagiarize Bolzano*, Arch. Hist. Exact. Sci. **7** (1970/71), 375–392.

[GP] Goffman C., Pedrick G., *First course in functional analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1965.

[Gra1] Grabiner J. V., *The origins of Cauchy rigorous calculus*, MIT Press, Cambridge, MA/London, 1981.

[Gra2] Grabiner J. V., *Who gave you the Epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus*, Amer. Math. Monthly **90** (1983), 185–194.

[Gra3] Grabiner J. V., *Cauchy and Bolzano*, in Mendelsohn E. (ed.): *Transformation and Tradition in the Sciences*, Cambridge Mass., UP, 1984, 105–124.

[Grt] Grattan-Guinness I., *Bolzano, Cauchy, and the „New Analysis“ of early nineteenth century*, Arch. Hist. Exact. Sci. **6** (1969/70), 372–400.

[Haj] Hájek O., *Metric completion simplified*, Amer. Math. Monthly **75** (1968), 62–63.

[Hau] Hausdorff F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp., Leipzig, 1914.

[Hei] Heine E., *Die Elemente der Funktionenlehre*, J. reine angew. Math. **74** (1872), 172–188.

[HS] Hewitt E., Stromberg K., *Real and abstract analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable*, second printing corrected, Springer-Verlag, New York – Berlin, 1969.

[Jah] Jahnke H. N. (ed.), *A history of analysis*, History of Mathematics 24, American Mathematical Society, Providence, RI, London Mathematical Society, London, 2003 (překlad z němčiny).

[Jar1] Jarník V., *Bolzano a základy matematické analýzy*, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1981.

[Jar2] Jarník V., *Diferenciální počet I.*, 7. vydání, Academia, Praha, 1984.

[Jar3] Jarník V., *Diferenciální počet II.*, 4. vydání, Academia, Praha, 1984.

[Kli1] Kline M., *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York, 1972.

[Kli2] Kline M., *Euler and infinite series*, Math. Mag. **56** (1983), 307–314.

[Kos] Kossak E., *Die Elemente der Arithmetik*, Berlin, 1873.

[Kow] Kowalenko V., *Euler and divergent seires*, Eur. J. Pure Appl. Math. **4** (2011), 370–423.

[Lak] Lakatos I., *Cauchy and the continuum*, The Mathematical Intelligencer **1** (1978), 151–161.

[Lau] Laugwitz D., *Infinitely small quantities in Cauchy's textbooks*, Historia Math. **14** (1987), 258–274.

[Lut] Lützen J., *The foundation of analysis in the 19th century*, in Jahnke H. N. (ed.): *A history of analysis*, History of Mathematics 24, American Mathematical Society, Providence, RI, London Mathematical Society, London, 2003, 155–195 (překlad z němčiny).

[Mar] Markuševič A. I., *Remarks on the paper: „Cantor's theory of real numbers"*, Istor.-Mat. Issled. **23** (1978), 71–76 (rusky).

[Med1] Medveděv F. A., *Cantor's theory of real numbers*, Istor.-Mat. Issled. **23** (1978), 56–70 (rusky).

[Med2] Medveděv F. A., *On the problem of completeness in the theories of real numbers*, Voprosy Istor. Estestvoznan. i Tekhn., 1981, no. 1, 106–107 (rusky).

[Mer] Méray C., *Remarques sur la nature des quantités définies de servir de limites à des variables données*, Revue des Sociétés Savantes, Sciences mathématiques, physiques et naturelles, série 2, **4** (1869), 280–289.

[Mon] Monna A. F., *Functional analysis in historical perspective*, Jonh Wiley & Sons, New York – Toronto, Ont., 1973.

[NV] Netuka I., Veselý J., *Sto let Baireovy věty o kategoriích*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **45** (2000), 232–256.

[Noz] Nožička F., *Věta o supremu a věta s ní ekvivalentní*, Časopis pro pěstování matematiky **76** (1951), 121–140.

[Pie] Pietsch A., *History of Banach spaces and linear operators*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

[Pri] Pringsheim A., *Über Eulersches Konvergenzkriterium*, Bibl. Math. **(3) 6** (1905), 252–256.

[Roy] Roy R., *Sources in the development of mathematics*, Infinite series and products from the fifteenth to the twenty-first century, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[Ryc] Rychlík K., *Theorie der reellen Zahlen in Bolzano's handschriftlichen Nachlasse*, Prag, 1962.

[Sch] Schauder J., *Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen*, Studia Math. **2** (1930), 1–6.

[Ste] Stedall J. A., *Mathematics emerging*, A sourcebook 1540–1900, Oxford University Press, Oxford, 2008.

[Sim] Šimša J., *Vývoj představ o reálných číslech*, in Bečvář J., Fuchs E. (eds.): *Matematika v 16. a 17. století*, Dějiny matematiky, svazek č. 12, Prometheus, Praha, 1999, 259–282.

[Tei] Teismann H., *Toward a more complete list of completeness axioms*, Amer. Math. Monthly **120** (2013), 99–114.

[Var] Varadarajan V. S., *Euler and his work on infinite series*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **44** (2007), 515–539.

[Ves1] Veselý J., *Základy matematické analýzy*, první díl, Matfyzpress, Praha, 2004.

[Ves2] Veselý J., *Základy matematické analýzy*, druhý díl, Matfyzpress, Praha, 2009.

[Wey] Weyl H., *Das Kontinuum: Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Veit & Co. Leipzig, 1918.

[Zei1] Zeidler E., *Applied functional analysis*, Applications to mathematical physics, Applied Mathematical Sciences 108, Springer-Verlag, New York, 1995.

[Zei2] Zeidler E., *Applied functional analysis*, Main principles and their applications, Applied Mathematical Sciences 109, Springer-Verlag, New York, 1995.

Poděkování: Děkuji Martině Bečvářové za cenné připomínky a podněty a za pomoc a spolupráci při technickém zpracování textu.

Adresa

Prof. RNDr. Ivan Netuka, DrSc.
Matematický ústav
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8 – Karlín
e-mail: *netuka@karlin.mff.cuni.cz*

VEĽKÉ OSOBNOSTI V HISTÓRII MATEMATIKY A MATEMATICKEJ KARTOGRAFIE

MARGITA VAJSÁBLOVÁ

Abstract: Map creation, Earth and astronomical surveying have motivated new mathematical ideas in historical context. Vice versa, mathematics is a fundamental support of mathematical carthography, whose major task is to reliably project the reference surfaces of the Earth. Several examples of the historical moments and the famous names (like Aristoteles, Eratosthenes, Hipparchos, Hypatia, Ptolemaios, Regiomontanus, Gauss and others) of both sciences are described in this contribution.

1 Úvod

Tvar Zeme a jej zobrazenie, ako aj tajomstvá vesmíru a zobrazenie hviezdnej oblohy sú oddávna pre ľudstvo veľkou inšpiráciou k rozvoju matematiky, geometrie a zememeračstva, ktoré má v súčasnosti rôzne podoby. Matematická kartografia je jednou z nich a jej úlohou je formulácia matematického základu mapy, teória kartografických zobrazení a skreslení v týchto zobrazeniach. Vzájomnú motiváciu podnecujúcu rozvoj týchto vedeckých oblastí dokazujú svojim pôsobením viaceré významné osobnosti, a to od starovekého Grécka až do novoveku.

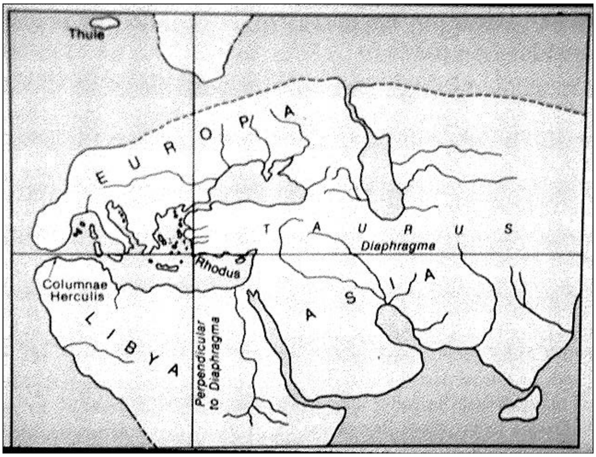
2 Poznámky z histórie kartografie

Kedy a kde bola zhotovená prvá mapa nie je známe. Najstaršia známa mapa pochádza zo severnej Mezopotámie a jej pôvod je určený na 4. tisícročie pred Kr. Časté záplavy v Egypte podnietili rozvoj zememeračstva, no keďže mapy boli zhotovované na papyruse a koži, nezachovali sa [10].

Vývoj kartografie bol veľmi úzko spätý s vývojom matematiky. V knihe [11] autor Milan Hejný prirovnáva matematiku k rieke, ktorej horný tok sa končí v Babylone a dolný tok začína v 6. storočí pred Kr. v starovekom Grécku. Matematika horného toku je matematikou bezprostrednej praxe, ktorá rieši odpovede na otázku „Ako ...?“. Grécka matematika hľadá zákonitosti a podstatu, a teda odpovede na otázku „Prečo ...?“. Staroveké Grécko je tiež právom považované za kolísku európskej kartografie s vedeckými základmi. Gréci poznali guľový tvar Zeme, používali zemepisné súradnice a prví tvorili kartografické metódy zobrazenia. V tejto súvislosti je nutné spomenúť nasledujúce mená a ich prínos [14], [17], [22], [30]:

- Anaximandros z Milétu (6. storočie pred Kr.) tvrdil, že Zem má tvar valca vznášajúceho sa vo vesmíre, hoci Gréci vychádzali z kruhového tvaru Zeme. Zdokonalil slnečné hodiny, gnómon, zostavil model nebeskej sféry a prvú známu antickú mapu sveta.
- Aristoteles zo Stageiry (384 až 322 pred Kr.) je považovaný za najvýznamnejšieho antického gréckeho filozofa, polyhistora a zakladateľa logiky, zaoberal sa tiež mnohými ďalšími oblasťami, napr. fyzikou, biológiou, zoológiou, astronómiou, meteorológiou, psychológiou, matematikou. Urobil dôkaz o guľatosti Zeme (kapitola 3.1), preferoval geocentrický model vesmíru, ktorý sa zachoval až do konca stredoveku.
- Dikaiarchos z Messiny (okolo 320 pred Kr.) bol Aristotelov žiak, ktorý ako prvý zakreslil do mapy sveta jednu rovnobežku (tzv. diafragmu) cez Gibraltarský prieliv k Rodosu,

neskôr na ňu zostrojil kolmicu, teda poludník, ktorý prechádzal ústím Dnepra, ostrovom Rodos a Alexandriou (Obr. 1).



Obr. 1. Dikaiarchova mapa

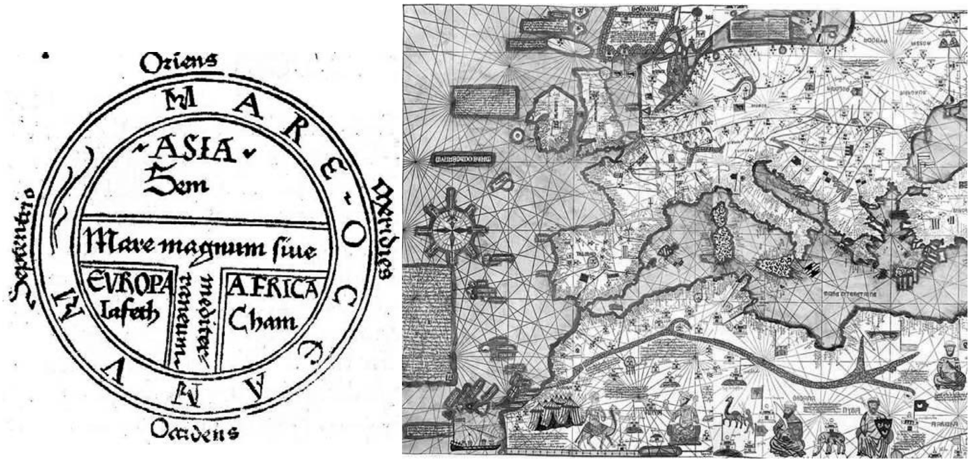
- Eratostenes z Kyrény (Alexandrijský) (asi 276 až 194 pred Kr.) zaviedol termín „geografia“, na mape Stredozemného mora a okolia zostrojil sieť rovnobežiek a poludníkov cez miesta určené astronomickým pozorovaním, a tiež vypočítal obvod Zeme na základe určenia dĺžky meridiánového oblúka (kapitola 3.1).
- Poseidónios z Apameie (2. storočie pred Kr.) urobil nové určenie veľkosti Zeme, ktoré prevzal aj Ptolemaios a v stredoveku aj Toscanelli.
- Strabón z Amazeie (1. storočie pred Kr.) sa považuje za „otca“ geografie a napísal 17 zväzkové dielo *Geografica* obsahujúce opis krajín a národov, a tiež vysvetlenie geografických javov.
- Marinos z Tyru (asi 100 po Kr.) ako prvý použil kartografické zobrazenie, vyznačil úplnú stupňovú kartografickú sieť zobrazenú na valcovú plochu, teda štvorcovú aj obdĺžnikovú sieť. Táto mapa bola doplnkom geografického diela, ktoré sa nezachovalo.

V oblasti kartografických zobrazení mala veľký význam formulácia azimutálnych projekcií, za ich autorov sa považujú [13]:
- Táles z Milétu (624 až 547 pred Kr.) – grécky filozof, matematik astronóm sa považuje za autora gnómonickej projekcie, v ktorej vypracoval mapu hviezdnej oblohy. Hlásal názor o plochom tvare Zeme (doska plávajúca na vodách), avšak vedel vysvetliť a predpovedať zatmenie Slnka.
- Apollonius z Pergy (asi 240 pred Kr.) – grécky geometer a astronóm formuloval ortografickú projekciu. Prínos jeho práce je tiež v teórii kužeľosečiek.
- Hipparchos z Nikaie (180 až 125 pred Kr.) je autorom stereografickej projekcie, zdokonalil učenie Eratostena a položil základy matematickej kartografie. Zaviedol zemepisné súradnice a jeho práce majú veľký prínos v astronómii. Podrobnejšie sa Hipparchovým výsledkom venuje kapitola 3.2.

Vedecké základy matematickej kartografie a sférickej trigonometrie položil Klaudios Ptolemaios, ktorý žil na prelome 1. a 2. storočia. Vydal súbor kníh z oblasti geografie, astronómie a matematiky a je autorom kužeľového a nepravého valcového zobrazenia. Ptolemaiovo dielo malo nadčasový význam a bolo používané aj v dobe kartografickej renesancie, čomu je venovaná kapitola 3.3.

Po páde Rímskej ríše nastal úpadok vedných odborov, aj kartografie [21]. Dedičmi staroveku boli Arabi, uchovali Ptolemaiovo dielo, avšak robili bezprojekčné mapy bez zemepisnej siete. Kreslili sa kruhové mapy (vplyv Ríma) s centrom v Jeruzaleme, ďalšie kruhové mapy boli v Nemecku a Anglicku, ktoré ak obsahovali tvar písmena T boli nazývané O-T mapy (Obr. 2 vľavo).

Koncom 13. storočia sa začali tvoriť portulánové (kompasové) mapy, ktoré mali obdĺžnikový tvar, v strede smerové ružice, mierku 1 : 4 až 7 miliónom, sú bez zemepisnej siete, avšak neskôr sa vyznačovala zemepisná šírka. Najstaršia dochovaná portulánová mapa je tzv. pisánska mapa (1300). Katalánsky atlas sveta z r. 1375 obsahuje portulánové mapy (Obr. 2 vpravo) súvisiace s výsledkami ciest Marca Pola.



Obr. 2. Výtlačok klasickej O-T mapy od Günthera Zainera (vľavo), mapa Európy z Katalánskeho atlasu (vpravo)

Renesancia (14. až 16. storočie) sa považuje za znovuzrodenie antickej civilizácie. Pokrok v kartografii v tejto historickej etape vyvolali tri okolnosti:

- získanie Ptolemaiovho diela,
- vynález kníhtlače,
- informácie z veľkých objavných ciest.

Ptolemaiovo dielo zaznamenalo do konca 16. storočia približne 50 vydaní a bolo doplnené súborom rekonštruovaných máp. Jeho dielo pomohlo efektívnejšiemu rozvoju kartografie ako vedeckej disciplíny. Na rekonštrukciách jeho máp boli použité metódy aj chyby, ktoré ovplyvnili cestovateľské zámery Krištofa Kolumba, čomu sa venuje kapitola 3.3.

Vynález tlače v Európe v polovici 15. storočia umožnil tlač kartografických diel, vydávanie máp a atlasov. *Drevorytiny* boli postupne nahradené *medirytinami*, ich počiatok je kladený do Talianska, kde Conrad Swaynheim vytlačil mapy k Ptolemaiovmu dielu.

O veľké zemepisné objavy v 15. a 16. storočí sa zaslúžili hlavne Krištof Kolumbus, ktorý v roku 1492 vyplával na cestu do Indie západným smerom a pristál na brehu Ameriky, Amerigo Vespucci v roku 1501 identifikoval Ameriku ako Nový svet, Magalhãesovi sa podarila námorná cesta do Indie (1519 až 1522) a zvyšok jeho výpravy urobil cestu okolo sveta, čím potvrdili guľovitý tvar Zeme.

V tomto období sa začali vyhotovovať aj *glóbusy*, ktoré zakresľovali známe javy a objavy z ciest. Jan Schöner vykreslil aj svetadiel pri južnom póle. Významné mapy v tomto období vydali napr. Juan de la Cosa (1500), ktorý zakreslil objavy Kolumba, Vespucciho, Cabrala a Cabota, a tiež Waldseemüler (1507), ktorý zaviedol názov Amerika. Jeden z najvýznamnejších predstaviteľov rozkvetu holandskej kartografie je Gerhard Mercator (1512 až 1594), ktorý v roku 1569 vyhotovil *loxodromickú mapu sveta* považovanú dnes za najvýznamnejšiu mapu tej doby. Použil na nej valcové zobrazenie konformné (zachováva uhly), kde obrazom loxodrómy je priamka a doteraz je používané pre námorné mapy. Mercatorovo zobrazenie v transverzálnej polohe je v súčasnosti aplikované tiež v systéme UTM (Universal Transverse Mercator). V čase kartografickej renesancie bol zaznamenaný aj veľký rozmach tvorby nových kartografických zobrazení, ich autormi okrem iných boli napr. Johannes Werner, Philipp Apian, Guillaume Postel, Nicolas Sanson, César François Cassini.

Takmer každá európska krajina mala mapu, pričom najvýraznejší prínos do európskej kartografie sa zrodil v nasledujúcich krajinách:

- Holandsko – mnohostranná tvorba, vrcholom sú atlasy, významný atlas vydal Mercatorov súčasník Abraham Ortelius (1527 až 1595).
- Francúzsko – Nicolas Sanson d´Abbville (1600 až 1667) je autorom nepravého valcového zobrazenia, založil významnú firmu *Francúzsky kartografický dom*, ktorú neskôr viedli jeho synovia a vnuci. Alexis Hubert Jaillot, César François Cassini de Thury spoločne s de Ferrom vydali vynikajúci štvordielny námorný atlas.
- Taliansko – Vincenzo Coronelli (1650 až 1718) je zakladateľom najstaršej geografickej spoločnosti, vydal atlas s viac ako 400 listami, odborník na zostrojovanie glóbusov Zeme a nebeskej klenby.
- Anglicko – John Seller je prvým vydavateľom máp a atlasov, Christopher Saxton v roku 1579 vyhotovil prvý atlas Anglicka a Edward Wright v Mercatorovom zobrazení vydal mapu, ktorá obsahuje aj poznatky z Drakeových objavných ciest.
- Bavorsko – Philipp Apian vykonal v rokoch 1554 až 1561 podrobné mapovanie Bavorska.
- Rusko – Sigmund Herberstein (1486 až 1566) zostavil dielo *Zápisky z Moskevska*, kde je prvý presnejší mapový obraz Ruska.

Významným krokom k presnejšiemu určovaniu zemepisných dĺžok a meraniu času bolo založenie Kráľovského greenwichského observatória v roku 1675. Vedením hvezdárne kráľ poveril Johna Flamsteeda, ktorý vošiel do dejín ako prvý kráľovský astronóm. Celosvetovo známym sa stal Greenwich na konci 19. storočia. Na konferencii vo Washingtone v roku 1884 uzavrelo 41 delegátov z 25 krajín dohodu, že svetový čas sa bude merať podľa poludníka, ktorý prechádza greenwichskou hvezdárňou a stal sa tak z neho nultý poludník.

Na rozhraní 17. a 18. storočia v období tzv. reformácie kartografie nastala zmena v spôsoboch, prostriedkoch a podnetoch vyhotovovania máp, teda aj snaha o zvýšenie presnosti, čo podporili:

- ❖ presnejšie meračské metódy,
- ❖ nové prístroje,
- ❖ nové geografické poznatky.

Najvýznamnejšiu úlohu v rozvoji kartografie mali v tomto období francúzski, nemeckí, anglickí a ruskí kartografi.

Francúzsku kartografickú školu tvorili osobnosti nielen francúzskeho pôvodu, ktoré sa venovali určovaniu tvaru a veľkosti Zeme pomocou stupňových meraní a výpočtu referenčného telesa k podrobnému mapovaniu, v teoretickej kartografii zobrazovacím metódam a teórii skreslení. Medzi najvýznamnejších predstaviteľov francúzskej kartografickej školy patria:

- Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646 až 1716), ktorý zaviedol používanie gnómonickej mapy ako ortodromickej, a to ako doplnok Mercatorovej loxodromickej mapy.
- Autori nových zobrazení sú francúzski a nemeckí kartografi: Guillaume de l´Isle, Jan Dominik Cassini, Philippe de la Hire, Karl Braden Mollweid, Heinrich C. Albers, a mnoho ďalších.
- Johann Heinrich Lambert (1728 až 1777) je autorom viacerých kartografických zobrazení odvodených spätne z požiadaviek na skreslenia. Uvádza sa aj ako zakladateľ kartografie ako vednej disciplíny. V súčasnosti je Lambertovo konformné kužeľové zobrazenie súčasťou viacerých štátnych geodetických súradnicových systémov.
- Leonard Euler a Joseph Louis Lagrange riešili všeobecnú teóriu konformných zobrazení.
- Carl Friedrich Gauss (1777 až 1855) sa zaoberal hlavne konformným zobrazením elipsoidu na sféru a valcovým konformným zobrazením v transverzálnej polohe, jeho životu a dielu je venovaná kapitola 3.4.
- Guillaume de l´Isle (1675 až 1726) bol významnou osobnosťou aplikovanej kartografie, mal snahu o správne interpretovanie hraníc svetadielov a je autorom veľkého množstva máp.

Nemecká kartografia v tomto období bola reprezentovaná hlavne firmami Homannovou a Seutterovou, ktorých mapy sa dodnes zachovali vo veľkom množstve. V 18. storočí sa Londýn stal strediskom svetovej kartografie, kde sa sťahovali významné holandské a francúzske kartografické dielne, a to vďaka rozvoju námornej moci v Anglicku. Ruská kartografická škola zaznamenala významný rozvoj za Petra Veľkého. V roku 1724 bola založená Ruská akadémia vied, kde mapovanie a výskum koordinovali francúz Guillaume De l´Isle a neskôr Leonhard Euler (1707 až 1783). Ďalší vedúci geografického ústavu akadémie bol Michail Vasilievič Lomonosov (1711 až 1765). Meračské a kartografické práce viedol Ivan Kirillov (1689 až 1738), ktorý vydal jeden z plánovaných troch dielov prvého ruského atlasu, ktorý obsahoval jednu generálnu mapu a 14 špeciálnych máp [21].

Za začiatok novodobej kartografie sa považuje podrobné mapovanie založené na geodetických základoch v prvej polovici 18. storočia, ktoré prebehlo takmer vo všetkých európskych krajinách. Vzorom je francúzska kartografia vedená C. F. Cassinim (1714 až 1784) a jeho synom Janom Dominikom (1748 až 1845).

Prvá polovica 19. storočia je charakterizovaná štátnymi a vojenskými mapovaniami, pričom výsledkom sú unáhlené a nepresné mapy (úpadok) a atlasy. V druhej polovici 19. storočia nastáva obrat v požiadavkách a hodnotení kartografického zobrazenia, a teda návrat k presnosti. Je nutné spomenúť nasledujúce práce teoretického charakteru, ktoré vydali Heinrich Littrow, Nicolas Auguste Tissot, Wilhelm Jordan vo forme súborných diel z matematickej kartografie. V Gaussovom diele pokračujú Johan Georg Schreiber a Louis Krüger, ktorí formulujú nové zobrazenia, vydávajú časopisy s kartografickou tematikou [14].

V 20. storočí sa kartografovia zaoberajú skreslením, priebehom kriviek na mapách, odvodzovaním optimálnych zobrazení podľa účelu, napr. O. S. Adams, Ch. Laborde, V. V. Kavrajskij, Solovjev, Urmajev, G. A. Ginsburg a iní. Topografické mapy a mapy veľkých mierok sú konštruované v konformnom zobrazení a od r. 1950 je mapovanie realizované zväčša fotogrametrickými a kombinovanými metódami. Väčšina krajín vydáva tematické atlasy, ktoré sa neskôr zdokonaľujú. Po druhej svetovej vojne prebieha nové mapovanie v rámci vojenských zoskupení, a to podľa rovnakých zásad. V šesťdesiatych rokoch 20. storočia sa začína obdobie počítačovej kartografie. Vplyv automatizácie na tvorbu mapových diel umožňuje uplatniť aj také metódy v kartografii, ktoré dovtedy nebolo možné realizovať. Veľký význam pre kartografiu má aj diaľkový prieskum Zeme, nástup technológií GNSS (Global Navigation Satellite System).

3 Matematika a kartografia – osobnosti a súvislosti

Historické míľniky matematiky a geometrie podnietili rozvoj zememeračstva a kartografie. Spoločným objektom záujmu matematiky a kartografie je tvar Zeme, jej veľkosť a povrch a jej zobrazovanie do roviny mapy, a tiež astronomické objekty, ich vzájomná poloha a zobrazovanie. Z tohto hľadiska problémy praxe podnietili rozvoj geometrie, teórie kužeľosečiek, diferenciálnej geometrie, sférickej trigonometrie a i. V oblasti modelovania referenčných plôch Zeme zohrávalo veľkú úlohu určenie jej tvaru a veľkosti viacerými osobnosťami napr. Aristotelom a Eratostenom. Cestovateľské zámery Krištofa Kolumba boli podporované výsledkami Ptolemaia a Regiomontana. Stereografická projekcia a jej aplikácia v astronomickom meraní bola objektom záujmu Hipparcha a Hypatie. Neskôr bol veľký pokrok vo výpočtoch na elipsoide vďaka diferenciálnej geometrii, kde doteraz sú aplikované výsledky Gaussa pri výpočte krivostí na ploche, dĺžky geodetickej čiary. Skreslenia v kartografickom zobrazení sú počítané pomocou tzv. Gaussových koeficientov a Gaussove konformné zobrazenia sú významnou súčasťou geodetických súradnicových systémov, napr. UTM (Universal Transverse Mercator).

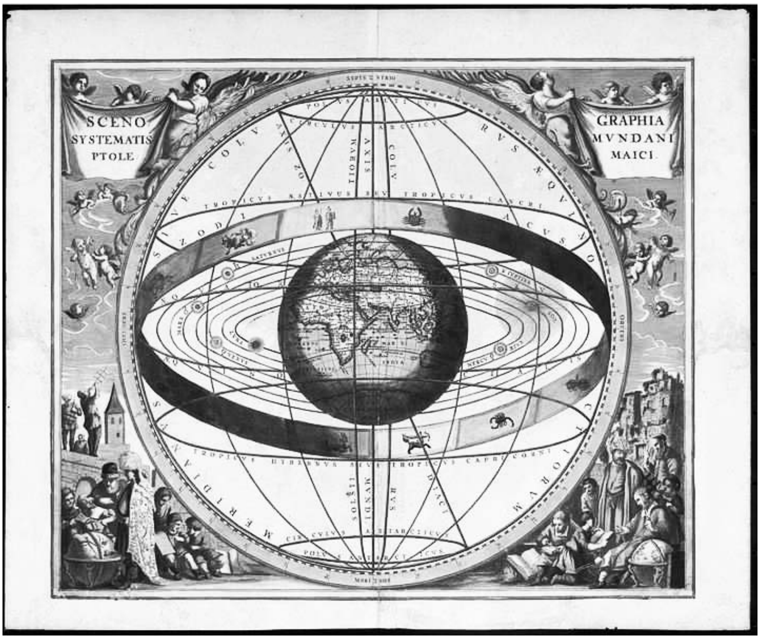
3.1 Tvar a obvod Zeme podľa Aristotela a Eratostena

Problémom tvaru Zeme sa zaoberali Pytagorejci, ktorí uvádzali, že počet nebeských telies je posvätné číslo 10 a tieto telesá sú rozložené okolo Zeme tak, aby ľudia nemohli vidieť posvätný oheň, okolo ktorého sa Zem otáča. Ako bolo spomenuté, Táles z Milétu pokladal Zem za plochú dosku plávajúcu na vodách a Anaximandros za vznášajúci sa valec. Pytagoras (asi 580−500 pred Kr.) ako prvý vyslovil myšlienku, že Zem je guľa, ktorá sa nachádza v strede vesmíru. Ďalší Pytagorejec Filolaos sformuloval svetový systém s centrálnym ohňom v strede vesmíru, okolo ktorého obieha Zem, Slnko, Mesiac a ostatné planéty. Vyslovil tiež myšlienku, že Zem sa otáča okolo svojej osi.

Aristoteles zo Stageiry (384 až 322 pred Kr.) ako prvý urobil dôkaz o guľatosti Zeme. Podľa Aristotela celý svet tvorí jediný celok v tvare gule, ktorej stred je vyplnený našou Zemou (geocentrický názor). Vesmír sa delí na dve principiálne odlišné časti – oblasť supralunárnu (nad Mesiacom) a sublunárnu (pod Mesiacom). Stredom sublunánej oblasti a zároveň celého vesmíru je guľatá a nehybná Zem, okolo ktorej sú v guľatých, nie všade celkom pravidelných vrstvách nakopené v prirodzenom poriadku voda, vzduch a oheň. Supralunárna oblasť je podľa Aristotela vybudovaná z čistého a nepremenlivého elementu, tzv. éteru. Na rozdiel od štyroch pozemských elementov, ktoré sa pohybujú smerom hore a dole, pohybuje sa éter stále dokonalým rovnomerným kruhovým pohybom. Nebeské telesá sú upevnené na éterických sférach a spolu s nimi sa otáčajú okolo

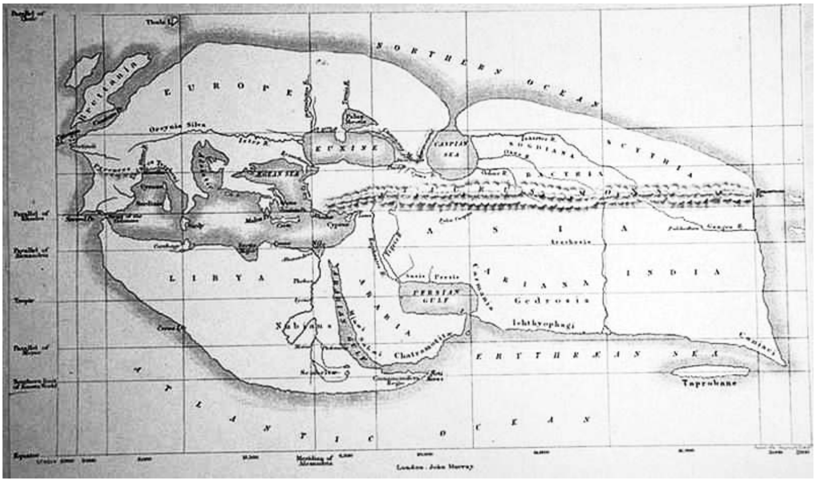
Zeme. Najvzdialenejšia od Zeme je sféra stálic, ktorú udržiava v pohybe sám prvý „hýbateľ“, ktorého pôsobenie sa prenáša postupne až ku sfére Mesiaca. Počet sfér podľa Aristotela je 56. Dianie vo sfére sublunárnej sa riadi zo sféry supralunárnej, a to v tom zmysle, že pohyb Slnka dáva impulz k základným prírodným zmenám, k striedaniu dňa a noci a k striedaniu ročných období, od ktorého závisí životný rytmus celej rastlinnej a živočíšnej ríše [35].

Guľový tvar Zeme odôvodňoval Aristoteles predovšetkým z vlastností Zeme ako najťažšieho a do stredu priťahovaného elementu, ale uvádzal aj fakty z pozorovania – kruhový tvar tieňa Zeme pozorovateľný pri mesačnom zatmení a viditeľnosť iných súhvezdí v južných a severných častiach Zeme [19]. Predpokladal, že dĺžka poludníka je 400 000 stádií (veľkosť stádia sa presne nevie, za stádion Gréci pokladali dĺžku závodiska – 125 dvojkrokov), teda obvod Zeme považoval (opierajúc sa o poznatky vtedajšej matematiky) za skoro dvojnásobne väčší, než má v skutočnosti a Zem považoval v porovnaní so Slnkom a hviezdami za malú. Aristotelove názory ovplyvnili astronómiu takmer na dve tisícročia. Na Obr. 3 je schéma Ptolemaiovej geocentrickej sústavy, ktorú prevzal od Aristotela [36].



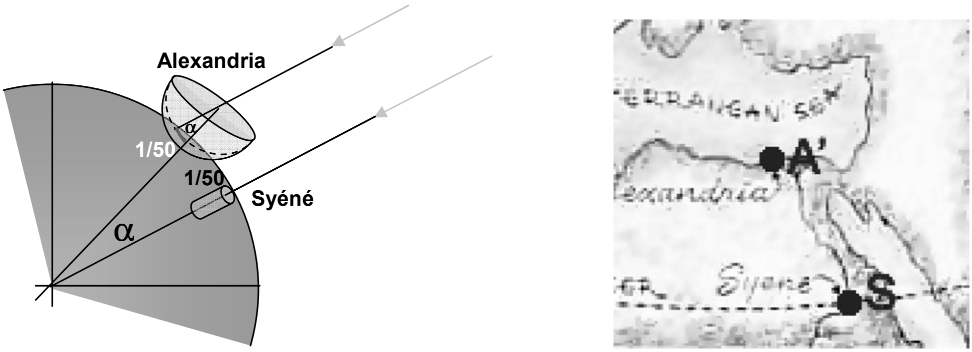
Obr. 3. Ptolemaiov geocentrický systém, ktorý prevzal od Aristotela [36]

Eratostenes z Kyrény (Alexandrijský) (asi 276 až 194 pred Kr.) zaviedol termín „geografia“ (zahŕňal kartografiu, geografiu a etnografiu). Na mape Stredozemného mora a okolia zostrojil sieť rovnobežiek a poludníkov cez miesta určené astronomickým pozorovaním, avšak neuvádza stupne, ale vzdialenosť v stádiách. Na Obr. 4 je rekonštrukcia Eratostenovej mapy z 19. storočia [22].



Obr. 4. Rekonštrukcia Eratostenovej mapy z 19. storočia

Obvod Zeme vypočítal Eratostenes v roku 212 pred Kr. na základe určenia dĺžky meridiánového oblúka medzi mestami Alexandria a Syéné (dnešný Asuán) [19]. Predpokladal, že mestá ležia na rovnakom poludníku, hoci Alexandria má v súčasnosti uvádzanú zemepisnú šírku 31,1980° a dĺžku 29,9192° a mesto Syéné, ktoré je 850 km južnejšie blízko obratníku Raka, má súradnice 24,0889°, 32,8997°. Eratostenes zistil, že v dobe letného slnovratu je možné v hlbokej studni v Syéné vidieť odraz Slnka v hlbokej studni. V Alexandrii postavil dutú polguľu so zvislou tyčou, tzv. gnómonom s horným koncom v strede gule (Obr. 5). V momente, keď v Syéné bolo Slnko v zenite, dĺžka tieňa gnómonu na dutej polguli sa rovnala 1/50 obvodu hlavnej kružnice na tejto guli. Z toho dedukoval, že vzdialenosť medzi týmito mestami sa rovná 1/50 obvodu hlavnej kružnice na Zemi, stredový uhol prislúchajúci tomuto oblúku je 7°12'. Vzdialenosť medzi Alexandriou a Syéné mal odhadnutú na 5 000 stádií, a to podľa dĺžky času, ktorý potrebovala karavána na cestu medzi nimi. K obvodu Zeme 250 000 stádií pripočítal 2 000 stádií, aby výsledné číslo 252 000 stádií bolo deliteľné číslami 3, 6, 9 atď. Táto hodnota je v porovnaní so skutočným obvodom Zeme s presnosťou od 11 až 14 %. Metóda Eratostena je však dobrá a v zdokonalenej forme aktuálna aj v súčasnosti.



Obr. 5. Schéma Eratostenovho pokusu

3.2 Hipparchos versus Hypatia a stereografická projekcia

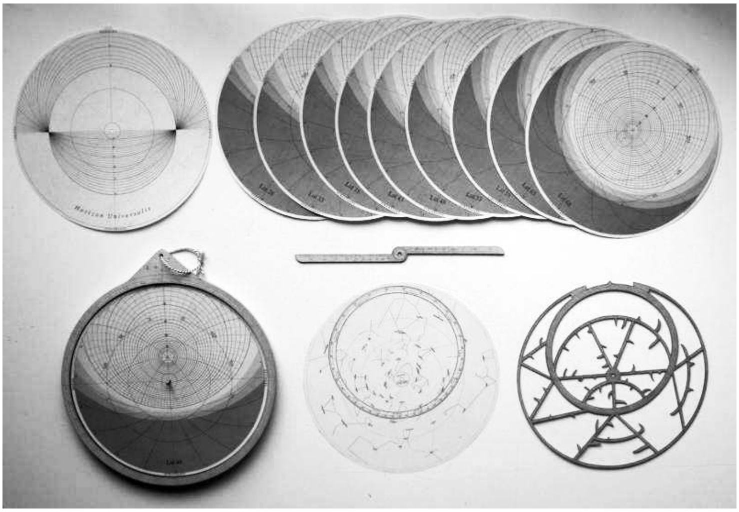
V historických prameňoch je diskusia o autorstve astronomického prístroja *rovinného astrolábu*. Dôvodom je, že tento prístroj využíva kartografické zobrazenie nazývané stereografická projekcia, ktorej autorom je Hipparchos. Autorstvo rovinného astrolábu sa pripisuje aj Hypatii z Alexandrie. Stereografická projekcia je definovaná ako stredové premietanie guľovej plochy do roviny, pričom stred premietania leží na guľovej ploche a rovina je rovnobežná s jej dotykovou rovinou v strede premietania. Geometrické vlastnosti tejto projekcie sú, že obrazom kružnice guľovej plochy je kružnica alebo priamka a zachovávajú sa uhly, teda zobrazenie je konformné. Vzhľadom na to je stereografická projekcia používaná vo viacerých oblastiach.

Hipparchos z Nikaie (180 až 125 pred Kr.) bol veľkou osobnosťou v starovekej kartografii, je pokladaný za zakladateľa sférickej trigonometrie [16] a svojimi výsledkami položil základy matematickej kartografie. V historických materiáloch sa uvádza, že poznal valcové zobrazenie, ktoré sa pripisuje Marinovi a kužeľové, ktoré zdokonalil Ptolemaios. Ako bolo spomenuté, Hipparchos je autor stereografickej projekcie a v súvislosti s tým je diskutované, či je autorom rovinného astrolábu, ktorého autorstvo sa pripisuje Theónovi z Alexandrie v spolupráci s jeho dcérou Hypatiou. Hipparchos ako prvý vypočítal vzdialenosť Zeme od Mesiaca a zostavil katalóg obsahujúci asi 850 hviezd. Zaviedol šesťdesiatkové delenie obvodu Zeme (rovník rozdelil na 360 častí) a navrhol astronomicky určovať pevné body na zostavovanie máp, uvádzať na mapách celý rad kolmých čiar zodpovedajúcich zvoleným stupňom od juhu na sever a od východu na západ (nepravidelnú geografickú sieť). Vtedy bolo známe, že Zem je dlhšia v smere od východu na západ, preto navrhol používať termíny (geografická) dĺžka a (geografická) šírka Zeme [19].

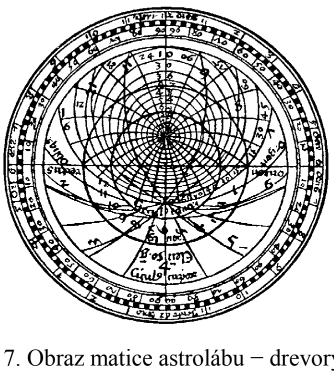
Hypatia z Alexandrie (* medzi 350 až 370 – † 415, Alexandria, Egypt) bola grécka filozofka, dcéra matematika a astronóma Theóna z Alexandrie, posledného známeho člena a možno i predstaveného alexandrijskej školy [18]. Zaoberala sa matematikou, astronómiou a filozofiou a bola to prvá žena s výsledkami v matematickej oblasti. Pôsobila v Alexandrii ako prvá žena – učiteľka novoplatónskej filozofie. Najvýznamnejším z jej žiakov bol Synesios z Kyrény, ktorý ju v niekoľkých listoch chválil. Slobodne sa stretávala so všetkými, ktorí si želali učiť sa, alebo dostať vysvetlenia ťažkých častí z Platóna a Aristotela, chýry o jej živote dávali veľa podnetov pre výmysly a predsudky. V marci roku 415 bola Hypatia neočakávane prepadnutá a umučená oddielom kresťanských vzbúrencov, podľa viacerých zdrojov na tento útok dal príkaz sám Kyrillos [4]. Uvádza sa, že po smrti Hypatie získalo kresťanstvo v Alexandrii úplnú nadvládu, alexandrijská škola upadla a s ňou aj úroveň gréckej matematiky.

Hypatia pokročila dosť ďaleko v štúdiu kužeľosečiek a nadviazala na Diofantove práce. Venovala sa hlavne aplikáciám matematiky, pripisuje sa jej autorstvo troch veľkých prác o geometrii, algebre a astronómii. Vynašla niekoľko prístrojov, napríklad na destiláciu vody a na stanovenie mernej tiaže vody. V astrometrii sa jej pripisuje významná pomoc pri rozvoji rovinného astrolábu pre merania na oblohe. S väčšou, či menšou istotou je jej pripisované vydanie Theónovho komentáru k Ptolemaiovmu Almagestu – znalci predpokladajú, že podiel Hypatie a Theóna na texte je približne rovnaký a že Hypatia nerevidovala len text otcových poznámok, ale priamo Almagest samotný [6]. Hypatii sa priznáva tiež vydanie Theónovho usporiadania Euklidových Základov [3], komentáre k Pojednaniu o kužeľosečkách Apollónia z Pergy, k XIII. knihe Diofantovej Aritmetiky, Astronomický kánon – niekedy je pokladaný za jednoduché astronomické tabuľky, avšak mohlo ísť o komentár k niektorému z Ptolemaiových diel, najskôr k Tabuľkám alebo k Almagestu [2].

Ako bolo uvedené, autorom stereografickej projekcie je Hiparchos. Pomocou tohto zobrazenia je vytvorená stupnica hviezdneho uhlomeru tzv. rovinného astrolábu, rozvoju ktorého prispela aj Hypatia z Alexandrie [26]. Tento historický astronomický prístroj v minulosti astronómovia, astrológovia, navigátori a ďalší používali na určovanie a predpovedanie polôh hviezd a Slnka, k určovaniu miestneho času podľa miestnej zemepisnej dĺžky a naopak, k zememeračským účelom a pre trianguláciu [9]. Astroláb sa skladá z dvoch kruhových častí spojených v strede čapom. Používa sa zavesený, okolo stredu sa otáča rameno (alhidáda) s dvoma priezormi a s ukazovateľmi. Spodná časť obsahuje systém súradníc (Obr. 7 vľavo). Vrchná časť je z veľkej časti priehľadná a obsahuje sadu hrotov označujúcich polohy významných stálic. Nastavením vzájomnej polohy týchto dosiek je možné zobraziť aktuálnu polohu hviezd na oblohe. Na vrchnej časti sú tiež vystúpené hroty umožňujúce odmerať skutočnú výšku nebeských telies voči kolmici k zavesenému astrolábu. Súčasti astrolábu sú na Obr. 6. Astroláby majú veľkú historickú hodnotu, napríklad v októbri 1995 aukčná sieň Christie's v Londýne vydražila astroláb za 450 tisíc libier. Na Obr. 7 vpravo je Urbinov astroláb z roku 1462.



Obr. 6. Časti rovinného astrolábu



Obr. 7. Obraz matice astrolábu − drevoryt z kalendára r.1553 (vľavo) a Urbinov astroláb (vpravo)

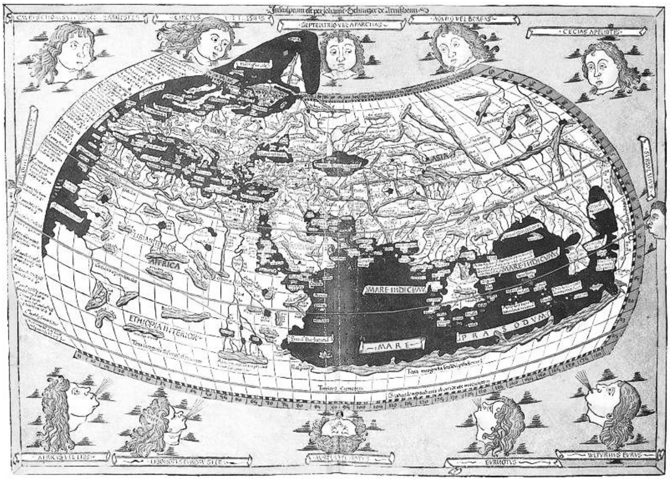
Okrem rovinného astrolábu používaného v minulosti sa stereografická projekcia používa v súčasnej astronómii pri konštrukcii mapy hviezdnej oblohy, na zobrazenie dráh a povrchu nebeských telies. V kartografii je aplikovaná na katastrálnych mapách napr. Holandska a v minulosti aj na území Rakúsko-Uhorska a Poľska [17]. Vďaka konformnosti má stereografická projekcia dosah do viacerých oblastí, napr. v kryštalografii je aplikovaná pri zobrazovaní, a teda meraní uhlov medzi stenami kryštálu, v matematike pri vzájomnom zobrazení prvkov rôznych modelov neeuklidovskej geometrie, a používa sa aj v oblasti tvorby dekoračných vzorov na povrchu sféry [29].

3.3 Ako Ptolemaios a Regiomontanus pomohli Krištofovi Kolumbovi

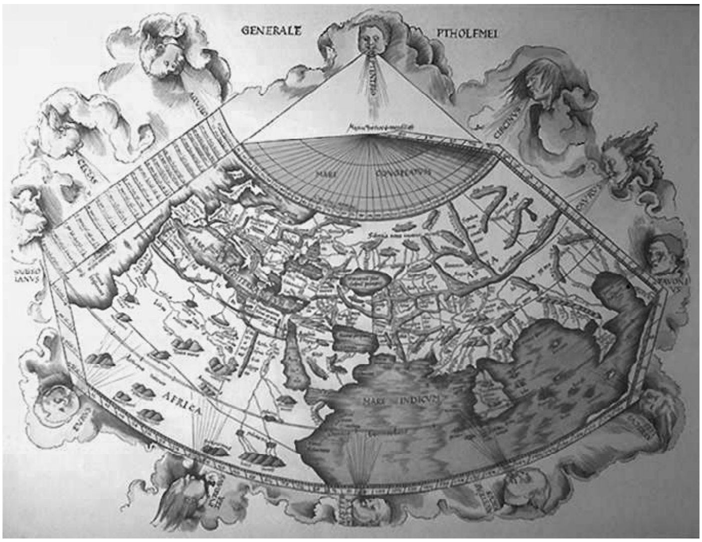
Základy sférickej geometrie a trigonometrie pre účely astronómie boli položené v Starom Grécku. Zakladateľom je Hipparchos z Nikae (2. stor. pr. Kr.). Významné dielo o sférickej trigonometrii napísal tiež grécky matematik Menelaos z Alexandrie (1. stor. po Kr.), na ktorého nadviazal Klaudios Ptolemaios. Na západe vytvoril trigonometriu ako samostatnú časť matematiky nemecký matematik a astronóm Johannes Müller nazývaný Regiomontanus [16]. Výsledky práce týchto osobností podporovali rozvoj objaviteľských ciest, čo história ukázala na vzájomnom prepojení Ptolemaia, Regiomontana a Krištofa Kolumba.

Klaudios Ptolemaios žil na prelome 1. a 2. storočia, rozvinul matematickú kartografiu a sférickú trigonometriu. Okrem iného vydal súbor kníh z oblasti geografie, astronómie a matematiky [22]. Ptolemaios sa ako prvý pokúsil dokázať Euklidovu 5. axiómu, avšak použil pri tom len jej alternatívnu formuláciu. Ptolemaiova kniha *Megalé syntaxis* (Veľká skladba) je veľkým astronomickým dielom, obsahuje katalóg hviezd a vysvetľuje geocentrickú sústavu. Táto kniha sa zachovala jednak v pôvodnom znení, ale tiež v arabskom preklade nazvanom *Almagest*. Toto dielo bolo základom stredovekej astronómie a celé tisícročie bolo aj základným dielom pre trigonometriu. Ptolemaios je tiež autorom osemdielnej *Geografiké hyfégésis* (Geografická príručka), kde podáva okrem iného návod k zhotoveniu mapy sveta s využitím zemepisnej šírky a dĺžky jednotlivých miest, pričom zemepisné súradnice mali byť určované astronomickým meraním. Je autorom kužeľového a nepravého valcového priamkového vyrovnávacieho kartografického zobrazenia [15]. Dopustil sa chyby, že na svojich mapách použil Poseidoniove rozmery Zeme. Tieto mapy sa nezachovali (v dôsledku požiaru v Alexandrijskej knižnici), avšak v období kartografickej renesancie boli urobené ich rekonštrukcie (napr. Toscanelliho mapa). Ptolemaiovo dielo zaznamenalo do konca 16. storočia približne 50 vydaní a bolo doplnené súborom rekonštruovaných máp (použité metódy aj chyby). Ako už bolo spomínané, Ptolemaios použil Poseidoniove rozmery Zeme, menšie ako skutočnosť, čo povzbudilo Krištofa Kolumba k plavbe do Indie západným smerom, nakoľko použil Toscanelliho mapu spracovanú z týchto podkladov. Ptolemaiove mapy boli doplňované novými geografickými poznatkami a rozširované o nové mapy – *Tabulae modernae*, ktoré poskytovali dokonalejší obraz Zeme. Prvou takou mapou bola mapa Škandinávie od Claudia Claussona Swarta. Na Obr. 8 je Schnitzerova mapa, ktorú vypracoval na základe Ptolemaiovho popisu v *Geografiké hyfégésis* v nepravom kužeľovom zobrazení.

Na Obr. 9 je ukážka mapy sveta z roku 1505 v Ptolemaiovom ekvidištančnom kužeľovom zobrazení. Ptolemaiovo zobrazenie je tiež použité na mape Veľkej Germánie – MAGNA GERMANIA, ktorá zachytáva územie strednej Európy približne do roku 150 po Kr. Zobrazuje celkovo 137 geografických bodov, z ktorých 94 sú mestá a hradiská, o ktorých už Ptolemaios vo svojej dobe píše ako o starodávnych [23], [28]. Mapa bola a je predmetom bádania. Historici a lingvisti sa bez úspechu znovu a znovu pokúšali dešifrovať „*Ptolemaiov kód*“. V súčasnosti sa hlavná pozornosť štúdiu mapy sústreďuje v Česku a v Nemecku. Medzi výskumníkmi dostal tento pomaly 2000 rokov starý rébus pomenovanie „*zakliaty zámok*“ [24].



Obr. 8. Ukážka mapy Johanna Schnitzera (1482) v Ptolemaiovom nepravom kužeľovom zobrazení



Obr. 9. Ukážka mapy sveta z roku 1505 v Ptolemaiovom ekvidištančnom kužeľovom zobrazení

Johannes Müller z Königsbergu známy pod latinským pseudonymom **Regiomontanus** (1436 až 1476) bol nemecký matematik, astronóm a astrológ. Bol významnou osobnosťou, ktorá pôsobila na Akadémii Istropolitane v rokoch 1467 až 1472. Regiomontanus začal ako dvanásťročný študovať na univerzite v Lipsku. Neskôr prešiel na viedenskú univerzitu, kde na neho významne vplýval význačný humanistický filozof, matematik a astronóm Georg Peuerbach. Ako 21 ročný získal titul magister. V rokoch 1458−1461 prednášal vo Viedni a uskutočňoval pravidelné meteorologické pozorovania, jedny z prvých v hlavnom meste monarchie. S kardinálom Bessarionom, stúpencom novoplatonizmu, sa Regiomontanus vydal do talianskeho Padova, kde študoval gréckych matematikov. Tu zozbieral mnohé antické rukopisy a do latinčiny preložil Ptolemaiovo dielo Almagest, ktoré neskôr študovali Koperník, Galileo a Kepler. Okrem pozorovaní sa Regiomontanus venoval aj konštruovaniu astronomických prístrojov, a tiež popisu už známych astronomických, napr. astroláb, armilárna sféra a pod. Mimoriadne rozšírené v astronómii i navigácii boli astronomické tabuľky zostavené Regiomontanom, ktoré boli veľmi spoľahlivé. Medzi jeho trigonometrické tabuľky patria prvé šesťmiestne tabuľky funkcie tangens a tabuľky funkcie sínus s presnosťou na 7 desatinných miest, ktoré vyšli v roku 1490 ako *Tabulae primi mobilis* a do konca 16. storočia dosiahli 10 vydaní (Obr. 10). Predovšetkým v súvislosti so zostavovaním tabuliek sa zaujímal aj o matematické problémy, najmä o trigonometriu. V rokoch 1462−1464 vytvoril prvé významné dielo o trigonometrii *De triangulis omnimodis libri quinque* (Päť kníh o rozličných trojuholníkoch), ktoré je v dejinách matematiky považované za začiatok samostatného vývoja trigonometrie – jej oddelenia od astronómie a matematiky. V tejto knihe zaviedol funkciu tangens, riešil veľa úloh na konštrukciu trojuholníkov, podal základy rovinnej a sférickej trigonometrie [32], [7].

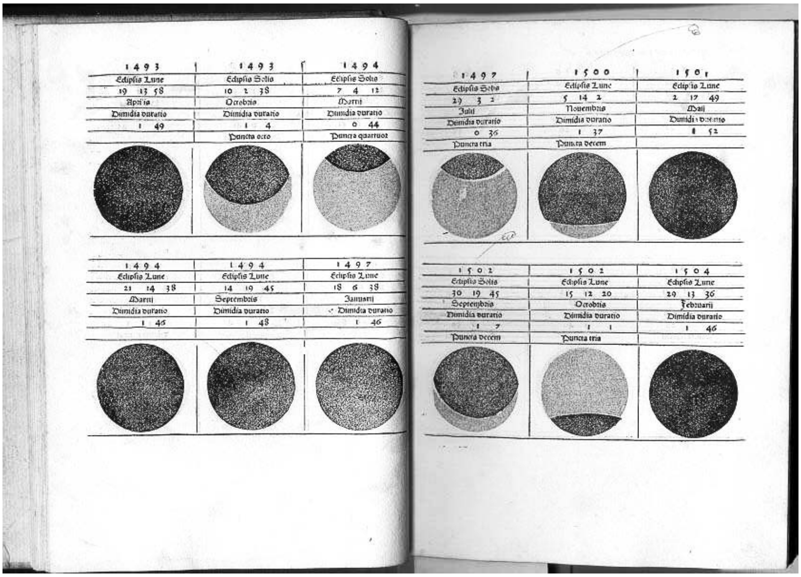
Sinus recti. 156

gr.	84		85		86		87		88		89	
m.	partes		partes		partes		partes		partes		partes	
31	59725		59816		59889		59943		59979		59997	
32	59727		59817		59890		59944		59980	7	59998	2
33	59728		59819		59891		59945		59980		59998	
34	59730		59820		59892	17	59945	12	59981		59998	
35	59732	27	59821	22	59893		59946		59981		59998	
36	59733		59823		59894		59947		59982		59998	
37	59735		59824		59895		59948		59982		59998	
38	59736		59825		59896		59948		59982		59998	
39	59738		59827		59897		59949		59983		59998	
40	59740		59828		59898		59950		59983		59998	
41	59741		59829		59899		59950		59984		59999	
42	59743		59831		59900		59951		59984		59999	
43	59744		59832		59901		59952		59994		59999	
44	59746		59833		59902		59953		59985		59999	
45	59748		59835		59903		59953		59985		59999	
46	59749		59836		59904		59954		59986		59999	
47	59751		59837	21	59905	16	59955	11	59986	6	59999	
48	59753	26	59838		59906		59955		59986		59999	1
49	59754		59840		59907		59956		59987		59999	
50	59756		59841		59908		59957		59787		59999	
51	59757		59842		59909		59957		59987		59999	
52	59759		59843		59910		59958		59988		59999	
53	59760		59845		59911		59959		59988		59999	
54	59762		59846		59912		59959		59988		59999	
55	59764		59847		59913		59960		59989		59999	
56	59765		59848		59914		59960		59989		59999	
57	59767		59850		59915		59961		59989		59999	
58	59769		59851		59915		59962		59990		59999	
59	59770		59852		59916		59962		59990		60000	
60	59771		59853		59917		59963		59990		60000	

FINIS.

Obr. 10. Ukážka Regiomontanových tabuliek [34]

Regiomontanus sa venoval aj rôznym otázkam algebry (riešenie rovníc, operácie s odmocninami) a teórie čísel, bol napr. objaviteľom piateho dokonalého čísla 33 550 336. Okrem prekladu a komentárov k Ptolemaiovmu *Almagestu* boli pozoruhodné aj preklady a vydanie viacerých antických i súdobých astronomických a matematických diel, napr. Apollonia, Heróna a Archimeda [27]. Odhalil aj nedostatky Ptolemaiovho planetárneho systému a sám vypracoval presnejší model pohybu planét. Regiomontanus spresnil a skonštruoval viaceré astronomické prístroje a vydal diela, ktoré ich podrobne popisujú. Počas pobytu v Norimbergu v januári 1472 pozoroval kométu, ktorej perióda bola zistená o 210 rokov neskôr. Išlo o dnes známu Halleyovu kométu. Zostavil 57 ročný kalendár (na roky 1475−1531), ktorý na svojich plavbách využívali i moreplavci ako Krištof Kolumbus, Vasco da Gama a Amerigo Vespucci. Na Obr. 11 je dvojstránka z jeho kalendára, ktorá popisuje zatmenia Slnka a Mesiaca. Regiomontanus mal aj mnohých významných študentov ako Domenico Maria Novara, ktorý bol neskôr profesorom Mikuláša Koperníka na Bolonskej univerzite [34].



Obr. 11. Dve strany Regiomontanovho kalendára popisujúce eklipsy Slnka a Mesiaca [34]

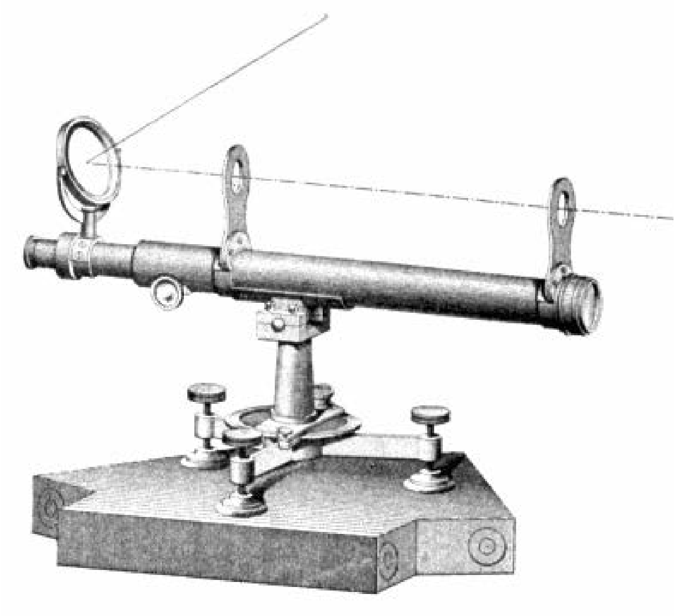
Z uvedených okolností vyplýva, že životy osobností Klaudia Ptolemaia a Johannesa Müllera Regiomontana sú napriek časovému rozdielu prepojené. Významné je nielen Regiomontanove štúdium a nadväznosť jeho práce na odkaz Ptolemaia, ale spája ich tiež osobnosť cestovateľa Krištofa Kolumbusa, ktorý, ako sa uvádza v historických prameňoch, používal pri svojej ceste do Ameriky Toscanelliho rekonštrukciu Ptolemaiovej mapy a trigonometrické tabuľky Johannesa Müllera Regiomontana, a tiež Regiomontanov kalendár.

3.4 Gaussova úloha v geodézii, diferenciálnej geometrii a matematickej kartografii

Ako uvádza Struik v [27], na deliacej čiare medzi matematikou 18. a 19. storočia čnie majestátna postava **Carla Friedricha Gaussa**. Narodil sa 30. apríla 1777 v nemeckom Braunschweigu ako jediné dieťa Gerharda Dietricha a Dorothey (rod. Benz) Gaussových [20]. Matka bola dcéra kamenára a napriek tomu, že bola takmer analfabetka, vie sa o nej, že bola mimoriadne inteligentná. Gaussov otec vykonával veľa jednoduchých povolaní, nakoniec pracoval ako pokladník v poisťovni. Jedna z typických príhod, aké sprevádzajú Gaussa, hovorí, že už ako trojročný opravoval svojho otca pri vyúčtovaní miezd. Gauss vraj sám o sebe tvrdil, že sa naučil počítať skôr ako hovoriť. Najznámejšia historka o Gaussovi ako zázračnom dieťati pochádza z jednotriedky základnej školy v rodnom Braunschweigu pri sčítaní všetkých prirodzených čísel od 1 do 100. Po skončení štúdia na Univerzite v Göttingene a Helmstadte pracoval v domácom Braunschweigu, kde písal svoje najslávnejšie diela. Od roku 1807 až do svojej smrti pôsobil ako profesor a riaditeľ observatória v Göttingene [32].

Svoje prvé skúsenosti s geodéziou získal Gauss už ako študent pri trigonometrickom zameraní Westfálska [12]. V roku 1818 bol poverený osobne vykonať trianguláciu hannoverského kráľovstva a neskôr celého dánskeho kráľovstva. Tieto úlohy ho zamestnávali intenzívne v období 1821−1826 a do istej miery až do roku 1848, čo niektorí jeho súčasníci považovali za stratený čas. Faktom však je, že práve vďaka jeho práci v teréne, pri ktorej mu asistovali jeho syn Joseph a major Müller, sa geodetická veda pozdvihla na vedeckú úroveň. Uvádza sa, že praktickým výsledkom v geodézii bol aj vynález geodetického prístroja heliotropu, ktorého princíp skrsol Gaussovi v hlave pri jednej večernej prechádzke v roku 1821 so svojim synom Eugenom, keď ho oslnil odraz zapadajúceho slnka v okne vzdialeného domu. Heliotrop používa zrkadlo na odraz slnečných lúčov daným smerom na veľkú vzdialenosť k označeniu vzdialených meračských cieľov (až 100 míľ). Už v júli 1821 Gauss pomocou heliotropu zameral klasický geodetický trojuholník medzi horami Hohenhagen, Brocken a Inselsberg. Dnes stojí na vrchole Hohenhagenu pamätná Gaussova veža s jeho mramorovou bustou. Na Obr. 12 je fotografia heliotropu [33] z roku 1878 a na Obr. 13 je princíp Wurdemannovho heliotropu. Jeho geodetické dielo, v ktorom sú aj výsledky z diferenciálnej geometrie, je zhrnuté v *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827) a vo dvoch *Pojednaniach o vyššej geodézii* (1843/46), ktoré sa stali fundamentom modernej geodézie [8]. Triangulácii sa podrobne venujú viaceré učebnice geodézie, napr. [1] a [31].

Obr. 12. Merania pomocou heliotropu (1878) [33]



Obr. 13. Wurdemannov heliotrop [33]

Spomínaným dielom *Disquisitiones generales circa superficies curvas* Gauss prispel dôležitými impulzmi do diferenciálnej geometrie, ktorá sa zaoberá analytickým vyšetrovaním vlastností kriviek a plôch [12]. Formuluje vlastnosti „hladkej" plochy danej parametrickým vyjadrením v okolí jej ľubovoľného bodu, ktoré sú opísané diferenciálnymi vzťahmi, nazývanými 1. a 2. fundamentálna, resp. kvadratická forma plochy. Gauss zaviedol definíciu totálnej krivosti (alebo Gaussovej miery krivosti) a postuloval Gaussovu teorému (theorema egregium), vyjadrujúcu Gaussovu krivosť výlučne prostredníctvom koeficientov 1. kvadratickej formy a ich parciálnych derivácii prvého a druhého rádu [25]. Bez diferenciálnej geometrie by sa v teórii pružnosti nerozvinula teória „škrupín" dvojitej krivosti, ktorá dosiahla rozkvet v druhej polovici minulého storočia.

V geodézii a kartografii sú poznatky aplikované na referenčnom elipsoide, pri výpočte skreslení v kartografickom zobrazení sú používané tzv. Gaussove koeficienty – prvky metrického tenzoru označovaného tiež ako Gaussova matica. Výpočet dĺžky geodetickej čiary sa realizuje pomocou Gaussovej metódy riešenia inverznej geodetickej úlohy [1]. Dôležitým prínosom Gaussa je formulácia kartografických zobrazení, a to konformného valcového v transverzálnej polohe (nazývaného Gaussovo-Krügerovo) a konformného zobrazenia elipsoidu na sféru.

Gaussovo-Krügerovo zobrazenie je konformné zobrazenie referenčného elipsoidu na valcovú plochu v transverzálnej (rovníkovej) polohe, nazývané je tiež transverzálne Mercatorovo podľa autora tohto zobrazenia v normálnej (pólovej) polohe, ktorým je Gerhard Mercator. Pre zobrazenie referenčnej sféry ho formuloval Johann Heinrich Lambert (1728−1777) a nazýva sa aj Gaussovo-Lambertovo. Historici uvádzajú, že Gauss približne v roku 1822 formuloval transverzálne Mercatorovo zobrazenie referenčného elipsoidu s využitím komplexnej algebry a aplikoval ho v tom istom desaťročí na zobrazenie meraných dát v Hannoveri [5]. Zobrazenie malo konštantné skreslenie pozdĺž centrálneho poludníka a bolo známe ako Gaussovo konformné alebo Gaussovo hannoverské zobrazenie. Gauss tiež v roku 1843 formuloval „dvojité zobrazenie“, ktoré pozostáva z konformného zobrazenia elipsoidu na sféru a následného zobrazenia sféry na valcovú plochu v transverzálnej polohe s použitím Mercatorových zobrazovacích rovníc. Toto zobrazenie si upravil Johan Georg Schreiber a použil ho v Prusku v rokoch 1876−1923, nazývalo sa Gaussovo-Schreiberovo a skreslenie na centrálnom poludníku nebolo konštantné. Schreiberove a Gaussove výsledky preformuloval Louis Krüger (1912), a teda v súčasnosti je Gaussovo-Krügerovo zobrazenie synonymom pre transverzálne Mercatorovo zobrazenie. Gaussovo-Krügerovo zobrazenie bolo používané v Nemecku (od 1922) a neskôr v ďalších európskych štátoch, v ZSSR (od 1928) a po 2. svetovej vojne aj v štátoch Varšavskej zmluvy. Na území bývalého Československa boli topografické mapy v Gaussovom-Krügerovom zobrazení, kde referenčné plochy boli rôzne elipsoidy (Besselov, Krasovského a iné), centrálny poludník bol neskreslený. Výhody zobrazenia pre vojenský systém sú koncepčná jednotnosť pre časti zemského povrchu, malé skreslenie, v rámci jedného poludníkového pásu možno bezproblémovo napájať mapové listy bez medzier a prekrytov. V súčasnosti ho členské štáty NATO používajú v geodetickom súradnicovom systéme UTM (Uni-versal Transverse Mercator), kde skreslenie centrálneho poludníka je konštantné a rovná sa -40 cm/km.

Z tých skutočností vyplýva, že v matematickej kartografii je veľkým prínosom Gaussa formulácia kartografických zobrazení, a to konformného zobrazenia elipsoidu na sféru a transverzálneho konformného valcového zobrazenia referenčného elipsoidu. V odvodení zobrazovacích rovníc použil Taylorov rozvoj a zápis súradníc bodov v rovine pomocou komplexných čísel, čo uverejnil Gauss v práci *Disquisitiones Arithmeticae*, ktorá vyšla roku 1801. Už v roku 1799 použil rovinu ako reprezentáciu komplexných čísel vo svojej doktorskej práci. V práci z roku 1831 podal aritmetiku aj algebru komplexných čísel [27].

K formulácii Gaussovho konformného zobrazenia referenčného elipsoidu na valcovú plochu v transverzálnej polohe

Gauss ukázal, že pre zobrazovacie rovnice konformného zobrazenia referenčného elipsoidu s využitím izometrických súradníc q a λ a pri použití zápisu súradníc bodov v rovine pomocou komplexných čísel platia podmienky:

$$\begin{aligned} x + iy &= f(q + i\lambda), \\ x - iy &= f(q - i\lambda), \end{aligned} \tag{1}$$

kde λ je izometrická (súčasne elipsoidická) dĺžka a q je izometrická šírka určená z elipsoidickej šírky φ pre elipsoid s 1. excentricitou e:

$$q = \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + 45°\right)\sqrt{\left(\frac{1 - e\sin\varphi}{1 + e\sin\varphi}\right)^{e}}\right]. \tag{2}$$

Použitím Taylorovho rozvoja je prvá podmienka v (1) formulovaná:

$$x + iy = f(q) + f^{I}(q)i\lambda + f^{II}(q)\frac{i^2\lambda^2}{2!} + f^{III}(q)\frac{i^3\lambda^3}{3!} + f^{IV}(q)\frac{i^4\lambda^4}{4!} + f^{V}(q)\frac{i^5\lambda^5}{5!} + \dots \tag{3}$$

Zobrazovacie rovnice Gaussovho-Krügerovho zobrazenia sú formulované oddelením reálnej a imaginárnej zložky:

$$
\begin{aligned}
x &= f(q) - f^{II}(q)\frac{\lambda^2}{2} + f^{IV}(q)\frac{\lambda^4}{24} - \ldots, \\
y &= f^{I}(q)\lambda - f^{III}(q)\frac{\lambda^3}{6} + f^{V}(q)\frac{\lambda^5}{120} - \ldots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Funkcia $f(q)$ v tomto zobrazení je funkcia závislosti dĺžky poludníka od izometrickej šírky a Gauss aplikoval podmienku neskreslených dĺžok na centrálnom poludníku. V súčasnosti pri zobrazovaní šesťstupňových poludníkových pásov sa používajú v zobrazovacích rovniciach členy do 5. derivácie funkcie f [30], [14].

K formulácii Gaussovho konformného zobrazenia referenčného elipsoidu na sféru

Konformné zobrazenie elipsoidu na sféru Gauss podrobne prepracoval, pred ním sa mu venovali Lambert a Mollweide. Zobrazovacie rovnice sú formulované z podmienky, že konformnom zobrazení platí nezávislosť dĺžkového skreslenia od smeru, a teda skreslenie v smere rovnobežky a poludníka je rovnaké. Parametre zobrazenia odvodil Gauss z požiadavky na jednu neskreslenú rovnobežku a s použitím Taylorovho rozvoja pre skreslenie ostatných rovnobežiek. Polomer sféry v Gaussovom zobrazení určil z podmienky, aby sféra a elipsoid mali v bodoch neskreslenej rovnobežky rovnakú Gaussovu krivosť [14].

4 Záver

Historický vývoj matematiky a matematickej kartografie, ako aj ďalších vedných odborov týkajúcich sa Zeme a vesmíru, nie je možné od seba oddeliť. Náčrt niekoľkých momentov z histórie pôsobenia významných osobností v oboch oblastiach to demonštruje. Avšak takýchto súvislostí je oveľa viac a tým, že ukazujú vzájomnú motiváciu teórie a praxe, ktorú teória povýši na vedeckejšiu úroveň, zostávajú pre nás poučením pre interdisciplinárne vnímanie vedy aj v súčasnosti.

Literatúra

[1] Abelovič J. a kol.: *Meranie v geodetických sieťach*. Alfa, Bratislava,1990, 280 s.

[2] Cameron A.: *Barbarians and politics at the Court of Arcadius*. University of California Press, Berkeley – Oxford, 1993, 441 s.

[3] Canfora L.: *Dějiny řecké literatury*. Preklad Dagmar Bartoňková a kol., 3., revidované a doplnené vyd., KLP, Praha, 2009, 920 s.

[4] Deakin Michael A. B.: *Hypatia of Alexandria: mathematician and martyr*. Prometheus Books, Amherst, N.Y., 2007, 231 s.

[5] Deakin R. E., Hunter M. N., Karney C. F. F.: *The Gauss-Krüger projection*. Presented at the Victorian Regional Survey Conference, Warrnambool, 10−12 September, 2010. [online] http://www.academia.edu/354352/The_Gauss-Krueger_Projection.

[6] Drobner H. R.: *Patrologie: úvod do studia starokřesťanské literatury*. Překlad Monika Recinová, OIKOYMENH, Praha, 2011, 807 s.

[7] Druga L.: *Dejiny astronómie a Slovensko*. Vydavateľstvo Slovenskej ústrednej hvezdárne, Hurbanovo, 2006.

[8] Dunnington G. W.: *The Sesquicentennial of the Birth of Gauss*. The Scientific Monthly, Vol. XXIV, Washington and Lee University 1927, 402–414.

[9] Hadravová A., Hadrava P.: *Křišťan z Prachatic: Stavba a užití astrolábu*. Filosofia, Praha, 2001, 520 s.

[10] Hánek P.: *250 století zeměměřictví*. Nakladatelství Klaudian Praha, spol. s.r.o., Praha, 2000, 55 s.

[11] Hejný M.: *Geometria naučila človeka myslieť*. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1979, 176 s.

[12] Hobst E. – Hobstová M.: *Carl Friedrich Gauss – zakladateľ modernej matematiky*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 52(2007), 296−307.

[13] Honzl I.: *Kartografický přehled 1 – K nejstarším zobrazovacím způsobům kartografickým*, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1955, 173−178.

[14] Hojovec V., Daniš M., Hájek M., Veverka B.: *Kartografie*. Geodetický a kartografický podnik v Prahe, Praha, 1987, 660 s.

[15] Horák B.: *Dějiny zeměpisu II. Doba velkých objevů*. Nakladatelství Československé akadémie věd, Praha, 1958, 177 s.

[16] Kůst J.: *Sférická trigonometrie*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1964, 241 s.

[17] Kuchař K.: *Naše mapy odedávna do dneška*. Nakladatelství ČSAV, Praha, 1958, 129 s.

[18] Lambrou M.: *Theon of Alexandria and Hypatia*. Creative Math. 12(2003), 111−115.

[19] Liodt G. N.: *Nauka o mapách*. Nakladatelství ČSAV, Praha, 1954, 400 s.

[20] Mlodinow L.: *Eukleidovo okno*. Nakladatelství Slovart, Praha, 2007, 260 s.

[21] Novák V., Murdych Z.: *Kartografie a topografie*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1988, 320 s.

[22] Pravda J.: *Stručný lexikón kartografie*. VEDA vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied, Bratislava, 2003, 326 s.

[23] Prikryl V.: *Vývoj mapového zobrazovania Slovenska*. VEDA, Bratislava, 1977, 481 s.

[24] Řehák S.: *Ptolemaiova mapa Velké Germánie a Česká republika*. Dějiny a současnost, č. 3, 1999, 56−57.

[25] Rektorys K. a kol.: *Přehled užité matematiky*. 1. vydanie, SNTL, Praha, 1963, 1140 s.

[26] Socha V.: *Hypatia z Alexandrie*. Svět, věda, technika, příroda, poznání. Seriál – Velké postavy vedy, December 2010, 51−53.

[27] Struik J. D.: *Dějiny matematiky*. ORBIS, Praha, 1963, 250 s.

[28] Šimek E.: *Velká Germanie Klaudia Ptolemaia*. Sv. I. Praha, Filosofická fakulta university Karlovy, 1930, 159 s.

[29] Vajsáblová M.: Interdisciplinárne aspekty stereografickej projekcie. In: *Sborník 26. konference o geometrii a počítačové grafice*. Nové Město na Moravě, 2006, České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2006, 283−288.

[30] Vajsáblová M.: *Matematická kartografia*. 1. vyd., STU, Bratislava, 2013, 315 s.

[31] Višňovský P., Fausek L., Šteiner F.: *Geodézie*. Státní zemědělské nakladatelství, Praha, 1967, 569 s.

[32] Znám Š. a kol.: *Pohľad do dejín matematiky*. Alfa, Bratislava, 1986, 240 s.

[33] Colonna B. A.: (1880) *Nine Days on the Summit of Mt. Shasta*. [online] http://celebrating200years.noaa.gov/theodolites/heliotrope.html.

[34] Johannes Regiomontanus: *Calendar*. Special Collections Department, Library, University of Glasgow, Hillhead Street, G12 8QE, Scotland, United Kingdom. [online] http://special.lib.gla.ac.uk/exhibns/month/aug1999.html.

[35] *Malá československá encyklopedie ČSAV*. I. svazek, Academia, Praha, 1984, 880 s.

[36] Wikipedia (The free encyclopedia): *Geocentrizmus* [online]. Posledná úprava 28. august 2013 [cit. 12. 3. 2014].

http://sk.wikipedia.org/wiki/Geocentrizmus.

Adresa

RNDr. Margita Vajsáblová, PhD.
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebná fakulta
Slovenská technická univerzita
Radlinského 11
813 68 Bratislava
e-mail: *margita.vajsablova@stuba.sk*

KONFERENČNÍ VYSTOUPENÍ

VYDÁVANIE MATEMATICKEJ LITERATÚRY NA SLOVENSKU DO ROKU 1918

EVA AUGUSTÍNOVÁ

Abstract: The paper deals with the publication of mathematical literature in Slovakia in the period up to 1918, taking into account particularly the literature published in the Central Slovak area. In addition to presentation of handbooks and textbooks for higher level of education it also introduces textbook for lower level of education authored by leading educators and mathematicians.

1 Úvod

Príspevok má svoje východisko vo výskume dejín knižnej kultúry v 18. a 19. storočí na Slovensku a je vyústením potreby zosumarizovať parciálne výsledky v tejto oblasti, ktoré sú v súčasnosti skôr bibliografického ako syntetického charakteru. Pôvodným zámerom bolo venovať sa vydávaniu literatúry v stredoslovenskej banskej oblasti a jej blízkom okolí všeobecne, avšak charakteristické hospodárske, spoločenské a kultúrne zázemie tohoto prostredia prispelo k zameraniu sa najmä na vydávanie technickej a prírodovednej literatúry a v rámci tohoto výskumu taktiež aj jednej z jej vedných disciplín – matematike. Sumarizácia a analýza sa sústreďuje najmä na vedeckú odbornú spisbu, ktorá vznikala na pôde a pre potreby jednej z najznámejších edukačných inštitúcií v dejinách Slovenska, a to Baníckej a lesníckej akadémie v Banskej Štiavnici, ktorá po preložení Trnavskej univerzity a jej dcérskej inštitúcie v Košiciach do Budína (1777) ostala jediným vedeckým centrom na Slovensku a vo vydávaní odbornej literatúry bola pokračovateľkou Trnavskej univerzity.

Matematika v 18. storočí nevynikala ani tak novými objavmi, ale skôr tým, že veľké objavy predošlého obdobia, algebru, logaritmus, analytickú geometriu, matematickú analýzu, vedeli použiť čoraz vo väčšom okruhu – Descartove, Newtonove, Liebnizove objavy (viac pozri [1]). V nasledujúcom storočí sa aplikovaným vedným disciplínam, matematike, fyzike a prírodným vedám dostávalo väčšieho spoločenského uznania, čo sa prejavilo aj na počte vydaní takýchto prác (viac pozri [2]).

V 18. storočí sa na Slovensku z oblasti matematiky vydávali najmä učebnice aritmetiky, ktoré sa venovali osvojeniu základných počtových operácií a učebnice elementárnej geometrie. Najvydávanejšími základnými matematickými príručkami boli diela Julia Caesara Patavina *Arithmetica Practica* (Praktická aritmetika),[1] a tiež aj anonymné dielo *Institutiones Arithmeticae.*[2] Boli to elementárne násobilky, ktoré slúžili nielen pre základné školy, ale aj obchodníkom a remeselníkom na uľahčenie výpočtov. Okrem tabuľkovej časti obsahovali aj ukážkové príklady a krátke návody k používaniu. Písaniu matematických učebníc sa venovali najmä profesori Trnavskej univerzity Andrej Dugonič, Anton Dušič, Karol Hadai, Anton Revický a Ján Ivančič. Medzi prvé slovenské

[1] V 18. storočí vyšla táto práca 11 krát.
[2] Bibliografie zaznamenávajú 11 vydaní.

matematické spisy patrí *Uměnj Počtu* Juraja Lesáka z roku 1775 (pozri [3]), a taktiež dielo Martina Raducha *Sprostný, ale zřetedlný Traktát Arithmeticky* z roku 1776 (pozri [4]).

V 19. storočí na Slovensku vydávané matematické práce sú temer výlučne učebnicového charakteru. Začiatok storočia patril učebniciam najmä latinským, ktorých niektorí autori publikovali už aj v 18. storočí, od polovice 19. storočia môžeme už hovoriť výlučne o učebniciach napísaných a vydaných v jazykoch národností žijúcich na území Uhorska, v slovenčine, maďarčine alebo nemčine. Najvydávanejšími autormi boli Adam Bekker, János Bukuresti, Karol Hadai, Gabriel Kováč-Martiny a František Močnik.

Na Baníckej škole v Banskej Štiavnici bol prvým profesorom matematiky Samuel Mikovíni. Po vzniku Baníckej a hutníckej akadémie sa matematika radila medzi vedy potrebné pre metalurgiu a patrila medzi najdôležitejšie prípravné predmety najmä pre výuku banského meračstva. V zriaďovacom dekréte školy boli odporúčané učebnice z matematiky, konkrétne nemecké vydanie diela Juraja Ignáca Metzburga, profesora Viedenskej univerzity, *Anleitung zur Mathematik* (Úvod do matematiky) (pozri [5]). Medzi najznámejších profesorov začiatku pôsobenia akadémie patril Mikuláš Poda, ktorý bol autorom vedeckých opisov a výpočtov parametrov banských strojov v Banskej Štiavnici. Počas jeho pôsobenia používali na prednáškach Gerliczyho učebnice *Inteilung zur mathematischen Wissenschaften*. Na prelome 18. a 19. storočia bol obsah a forma výuky prežitá, výuka vychádzala z požiadaviek kladených na praktickú činnosť, zo 70. rokov 18. storočia. Matematiku na akadémii posunul dopredu až príchod a úsilie Jozefa Schittka a J. Königa, ktorí zaviedli prednášky z vyššej matematiky. Aj v 19. storočí sa väčšinou prednášalo podľa učebníc vydávaných mimo územia Slovenska a od zahraničných autorov. Avšak matematická literatúra vydávaná v stredoslovenskej banskej oblasti nebola len doménou pedagógov banskoštiavnickej akadémie. V Banskej Bystrici a v Banskej Štiavnici vychádzali aj učebnice určené pre nižšie stupne vzdelávania.

2 Matematické práce vydané v stredoslovenskej banskej oblasti

2.1 Matematika – učebnice pre nižší stupeň vzdelávania

Medzi najproduktívnejších vydavateľov a taktiež autorov učebníc patril Gustáv Kordoš. Okrem učebnice prírodopisu mu v stredoslovenskej banskej oblasti vyšli ďalšie dve z jeho matematických učebníc a metodík. Sú to príručky matematiky, ktoré nadväzujú jedna na druhú. Prvou je učebnica matematiky, resp. cvičebnica *Úkoly pre slovenské školské dietky* (pozri [6]), ktorá vyšla u Augustína Fridricha Joergesa v roku 1875. Táto učebnica sa z väčšej miery venuje premenám dĺžkových a objemových mier a váh a tiež sa venuje aj precvičovaniu príkladov s desatinnými číslami, ktoré nazýva desatinnými zlomkami. Záver učebnice tvoria tabuľky, ktoré sa zaoberajú pomermi starých a nových mier. Na túto prácu nadväzuje *Methodický návod ku počtovaniu v metrických mierach a desätinných zlomkoch pre slov. učiteľov, rodičov a vychovávateľov* (pozri [7]), ktorá vyšla v roku 1875 a v ktorej sa venuje metodickému opisu výuky týchto matematických operácií, základným úlohám a otázkam ako sa majú riešiť, ale taktiež sa venuje aj rozvrhnutiu matematického učiva pre žiakov 1.–6. ročníka ľudových škôl (pozri [8]).

Vlastným nákladom vydal v Banskej Bystrici tri učebnice matematiky pre 1.–4. ročník ľudových škôl, Ľudovít Gejza Groó, miestny učiteľ. Všetky tri zväzky (pre 1.–2., 3. a 4. ročník) vyšli v roku 1887 a boli vytlačené Kníhtlačiarskym účastinárskym spolkom v Martine. Obsahom 1. časti pre 1. a 2. ročník (pozri [9]) sú základy elementárnej matematiky – základné numerické počtové operácie od 1–100 (sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie). Záver učebnice tvorí prehľad nových mier a váh zavedených od 1. januára 1876 v Rakúsko-Uhorsku a prehľad rímskych číslic. Učebnica pre 3. ročník (pozri [10]) sa venuje základným počtovým operáciám v rozsahu čísel 1–1000. Záver taktiež tvoria značky mier a váh metrickej sústavy. Pre 4. ročník je určená tretia zo série učebníc (pozri [11]), v rozsahu čísel 1–1000 a vyššie, ktorá okrem celých čísel pracuje aj s desatinnými číslami a zlomkami.

Medzi menej známych autorov učebníc matematiky patrí Antal Tükör vydávajúci svoju učebnicu aritmetiky pre priemyselné nižšie školy v roku 1890 (pozri [12]). Je určená nielen pre školy, ale aj pre súkromné potreby, s viac ako tisíc príkladmi. Kniha bola pripravená na základe ministerstvom schváleného učebného plánu a z poverenia banskoštiavnickej priemyselnej školy.

Matematické zošity pre 1.–6. ročník vyšších dievčenských škôl (pozri [13]) vypracoval v roku 1894 pedagóg József Gúta (30. 9. 1851 Svätý Jur – 1933). Gymnázium študoval v Skalici a Ostrihome, potom študoval na univerzite v Budapešti matematiku a prírodovedu a z týchto predmetov získal v roku 1881 diplom stredoškolského profesora. Za účelom pedagogického štúdia podnikol cesty po Rakúsku, Čechách, Morave a Sliezsku. V roku 1877 ho menovali riadnym profesorom trenčianskej štátnej vyššej dievčenskej školy, v roku 1887 na banskobystrickej. Okrem matematických zošitov sa venoval aj písaniu krátkych biografií známych pedagógov a tiež publikoval vo viacerých periodikách články o vývoji vyšších dievčenských škôl (pozri [14]).

2.2 Matematika – príručky a učebnice pre vyšší stupeň vzdelávania

Od roku 1869 pôsobil na banskoštiavnickej akadémii ako pomocný strojný inšpektor a súčasne asistent matematiky, mechaniky, strojníctva a deskriptívnej geometrie Emil Hermann (13. 11. 1840 Dognecea, Rumunsko – 22. 4. 1925 Budapešť). V roku 1884 v Banskej Štiavnici vydal tabuľky *Négyjegyű logarithmusok* (Štvormiestne logaritmy) (pozri [15]). Tabuľky boli určené inžinierom a študentom vyšších škôl, reálnych škôl a gymnázií. V tomto storočí bolo veľmi prirodzené, že snaha o skrátenie času výpočtu matematických úkonov a túto úlohu malo aj logaritmické pravítko, ktoré v roku 1874 odprezentoval Hermann v prvom vydaní svojej práce *A számtolóka (Régle a Calcul)* (Logaritmické pravítko) (pozri [16]). Obsahom je podrobný opis používania pomôcky pre rýchle numerické výpočty, ktorá mala popredné postavenie až po používanie kalkulačiek. Pomocou vzorcov popisuje 52 numerických výpočtov aj niektorých atypických prípadov, napr. výpočet rovníc, úrokov atď. O používaní tejto pomôcky mal na akadémii aj niekoľko mimoriadnych prednášok (pozri [17]).

Druhé vydanie táto práca zaznamenala v roku 1897 pod názvom *Számtolóka elmélete s használata* (Logaritmické pravítko – teória a prax) (pozri [18]). Oproti prvému vydaniu sú inštrukcie na jeho používanie zjednodušené a zrozumiteľnejšie.

Významným matematikom bol aj ďalší profesor banskoštiavnickej akadémie Ladislav Fodor (25. 6. 1855 Skalica – 17. 8. 1924 Šopron). Po štúdiách na vysokých technických školách v Budapešti, Viedni a Kluži pracoval od roku 1878 ako stredoškolský profesor matematiky na gymnáziu v Banskej Bystrici, od roku 1887 bol vedúcim katedry deskriptívnej geometrie na Baníckej a lesníckej akadémii v Banskej Štiavnici (pozri [19]). S jeho osobou sa spája rozvoj vyučovania deskriptívnej geometrie na akadémii, ako aj začiatky prednášania grafostatiky a priestorovej geometrie ako samostatných predmetov. Učebnice, ktoré začal písať ešte v čase svojho pôsobenia v Banskej Bystrici a niektoré z nich mali až 6 – 10 obnovených vydaní a používali sa na akadémii trištvrte storočia (viac pozri [2]). Takmer všetky jeho práce vyšli v Budapešti, jedinou knihou, ktorá vyšla v Banskej Štiavnici bol druhý zväzok jeho geometrie (pozri [20]). Jej prvá časť vyšla vo vydaní Eggenbergerovho kníhkupectva v Budapešti v roku 1892. Táto učebnica je jej pokračovaním a rozšírením. V knihe použil indukčnú metódu vyučovacích postupov, od jednoduchých prípadov postupne prechádza k zložitejším a ich následnému zovšeobecňovaniu.

Matematik Emil Gerevich (11. 12. 1854 Kovász – 1902) od roku 1877 pôsobil na vyššej dievčenskej škole v Máramarosszigete, od roku 1885 na banskobystrickej štátnej vyššej dievčenskej škole (viac pozri [21]). Počas pôsobenia na týchto dvoch miestach vydal dve teoretické štúdie o reťazových zlomkoch. V roku 1885 vydal v Máramarosszigete analytickú štúdiu o zostupných reťazových zlomkoch, po priaznivých ohlasoch v odborných kruhoch sa rozhodol v práci na tejto téme pokračovať, vypracovať teóriu a pripraviť analýzu vzostupných reťazových zlomkov, ktorá vyšla v roku 1889 vo vydaní banskobystrického tlačiara Jakuba Singera (pozri [22]). V súdobej literatúre autor nenašiel žiadnu podobnú prácu ani doma ani v zahraničí. Pri práci mu cennými radami pomohli profesor Gyula Farkas z univerzity v Kluži, profesor Zsigmond Günther z univerzity v Mníchove a profesor gymnázia v Eisenbachu Alfred Küncze. V roku 1890 sa k téme reťazových zlomkov opäť vyjadril, tentokrát nie vo forme analýzy, ale ich praktickej aplikácii. Informáciu o tejto práci predostrel spomínaný Gyula Farkas v *Természettudományi Közlöny* (Prírodovedný vestník) (pozri [23]) a odporučil ho na vydanie v *Správach banskobystrického gymnázia*. Singerovo kníhkupectvo v tom čase ponúkalo aj ďalšie Gerevichove práce, ktoré však boli vydané mimo územia Slovenska.[3]

Od roku 1902 pôsobil na Katedre matematiky Baníckej a lesníckej akadémie v Banskej Štiavnici Karol Walek (13. 9. 1878 Pécs – 3. 9. 1952 Šopron). V rámci svojej vedeckej práce sa venoval najmä problémom aplikovanej matematiky, práce z tejto oblasti však publikoval až po roku 1918. Výsledky svojich zistení publikoval najmä v *Bányászati és Kohászati Lapok* (Banícke a hutnícke listy), neskôr *Bányászmérnöki és Erdőmérnöki Főiskolai Közlöny* (Vestník Baníckej a lesníckej vysokej školy) a *Bányászati Lapok* (Banícke listy). 17. januára 1911 adresoval profesor Maximilián Hermann (30. 10. 1868 Banská Štiavnica – 28. 4. 1944 Budapešť), syn už spomínaného Emila Hermanna, list vysokoškolskej rade vo Walekov prospech. V liste žiadal radu o preradenie Karola Waleka z mimoriadneho profesora na riadneho profesora upozorňujúc na výsledky, ktoré dosiahol pri vyučovaní matematiky, ale aj na jeho osobný rast. Vtedy mal Walek 33 rokov a pracoval ako asistent na matematickej katedre, kde v roku 1903 zložil štátnu skúšku. V roku 1904 bol vyslaný Ministerstvom financií na mníchovskú univerzitu za účelom doplnenia vedomostí z matematiky, kde získal doktorát 30. januára 1908 (pozri [24]). Svoju doktorskú dizertačnú prácu si dal vytlačiť po návrate z Mníchova v tom istom roku v Banskej Štiavnici pod názvom *Binäre Kubische Transformation* (Binárne metrické transformácie) (pozri [25]). Svoju prácu pripravoval pod vedením vynikajúcich profesorov a docentov mníchovskej univerzity Ferdinandom Lindemannom, R. Vossom, Alfredom Pringsheimom, Wilhelmom Conradom Röntgenom, Albertom Seeligerom, Weberom, Sebastianom Finsterwalderom, Karlom Doehlemannom a Andingom. Bola to však jediná práca, ktorú vydal počas svoho pôsobenia na akadémii.

---

[3] Gerevichova analytická štúdia o zostupných reťazových zlomkoch *A lefelé menő láncztörtekről* vyšla Máramarosszigete v roku 1885 a učebnica matematiky pre stredné školy *Számtan a középiskolák számára* v Budapešti v roku 1893.

V prvých desaťročiach 20. storočia sa pri vyučovaní matematiky na Baníckej a lesníckej akadémii používali aj skriptá, ktoré boli dielom profesora banského meračstva Júliusa Szent-Istványiho (1904) a tiež príručka vyššej matematiky z pera Gejzu Grigercsika (1905), tieto však vyšli len kameňotlačou (viac pozri [5]).

2.3 Metrológia

Metrológii sa v stredoslovenskej banskej oblasti venovali dvaja autori Michal Dérer a Ján Nepomuk Belházy. Hutnícky inžinier Michal Dérer (18. 1. 1847 Háj – 22. 10. 1915 Budapešť), od roku 1867 pôsobiaci v Banskej Štiavnici ako študent (1867 – 1871), neskôr v rokoch 1872 – 1882 ako profesor na Katedre hutníctva vydal v tomto meste metrologické príručky. V roku 1875 slovenské 1. vydanie (pozri [26]) nových metrických mier a maďarskú mutáciu (pozri [27]), v roku 1876 jej nemeckú verziu (pozri [28]) a slovenské 2. vydanie. Aj keď sa už v slovenskom prvom vydaní objavila informácia, že „táto knižočka je aj v nemeckej reči k dostaniu”, nepodarilo sa nájsť nemecké vydania z roku 1875. V týchto 32-stranových príručkách začal v monarchii pripravovať prechod na nový metrologický, tzv. francúzsky systém, ktorý platil v monarchii od 1. januára 1876. Každá kapitola má jednotnú štruktúru: základné jednotky a ich značky, prepočty starých mier na nové, tabuľky prerátavania a príklady. Príručky uzatvára príloha pre staviteľov, stolárov, tesárov, lesníkov a obchodníkov s drevom s prepočtami na špeciálne materiály.

V tom istom roku, ako vyšli prvé dve Dérerove príručky k novým mieram a váham, vyšlo v Martine aj podobné dielo Alojza Chobodiczkého, učiteľa na učiteľskom ústave v Kláštore pod Znievom *Návod ku praktickému vyučovaniu nových mier a váh v národních školách so zvláštnym ohľadom na desatinné zlomky*. Od Dérerovej príručky sa však líši skupinou určenia. Chobodiczkého príručka je vyslovene orientovaná na školské a vyučovacie účely, oproti Dérerovej, ktorá je určená pre širší okruh používateľov.

Ďalšia príručka sa metrológie dotýka len okrajovo, a to z hľadiska numizmatiky. Jej autorom je banský inžinier Ján Nepomuk Belházy (19. 4. 1823 Kremnica – 20. 4. 1901 Budapešť) (viac pozri [29]). Študoval v Kremnici, potom banské vedy na Baníckej a lesníckej akadémii v Banskej Štiavnici.[4] Jeho práca má názov *A régi magyar pénzverési súlymérték* (Váhové miery starých uhorských razených mincí) (pozri [31]). Autor sa numizmatike venoval dlhší čas, nevenoval sa jej však tak ako ostatní numizmatici, ktorí si všímali najmä veľkosť mincí a vyrazené značky, ale zaoberal sa takými znakmi, ktoré boli dovtedy skoro úplne nezmáme, a to ich váhe, hodnote a kvalite razenia. Jednotlivé kapitoly majú ucelenú kompozíciu: história mince, jej váha, doba používania, jej hodnota. Taktiež obsahuje porovnávacie prepočty vzhľadom k ostatným platidlám.

3 Knižnica Baníckej a lesníckej akadémie – literatúra z matematiky

V tejto kapitole chceme v krátkosti ukázať, akú literatúru, okrem literatúry spomenutej v tomto príspevku, používali študenti a pedagógovia akadémie na štúdium matematiky. Okrem matematických prác je vo fonde tejto jedinečnej knižnice do tohto odboru začlenené banské meračstvo, mechanika, hydraulika, strojárstvo a staviteľstvo.

[4] Podľa dobových dokumentov sa však dozvedáme aj o jeho nie práve najúspešnejšom účinkovaní na škole. So štúdiom na akadémii mal problémy, v zápisoch zo skúšok zisťujeme, že nespravil už v 1. semestri skúšku z matematiky, ale neurobil ani opravnú skúšku a v roku 1853 opustil akadémiu (pozri [30]).

Fond je rozdelený na dve časti, viac ako dve tretiny sú uložené v Miškolci, jedna tretina v Šoproni. Do počtu je najviac zastúpená matematika a geometria, tvorí asi 60 percent. Literatúru zo začiatku 19. storočia tvoria príručky a monografické práce obsahujúce potrebné vedomosti pre praktických odborníkov baníctva a hutníctva. Z nich najznámejšie sú diela Christiana Wolffa, Jacoba Leupolda, Bernarda Foresta Belidora, Abrahama Gotthelfa Kästnera, Johanna Friedricha Weidlera, Jána Andreja Segnera, Johanna Friedricha Penthera, banská matematika J. F. Limpeho a matematicko-fyzikálny lexikón A. Savériena. Vyššiu matematiku reprezentujú práce Karla Eulera a Sylvestre Francoisa Lacroixa o diferenciálnych rovniciach. Zo starších prác knižnica vlastní práce G. B. Benedettiho (1563), ktoré obsahuje provenienčný záznam Tycha de Brahe, ďalej sú to Euklidove vydania zo 16. a 17. storočia a jedna Galileiho kniha z roku 1624. Z oblasti dejín matematiky je potrebné spomenúť mená ako Jean Baptiste Biot, A. Cauchy, Ch. Dupin, S. Poisson a meno profesora banskoštiavnickej akadémie Christiana Dopplera. Spomedzi štyroch matematických časopisov spomenieme napr. Francúzsky Bulletin des Sciences Mathematiques (Vestník matematických vied), ktorého spolupracovníci boli André Marie Ampere, M. Fourier, Sylvestre Francois Lacroix a S. D. Poisson (pozri [32]).

4 Záver

4.1 Zhrnutie výsledkov

Po ukončení činnosti Trnavskej univerzity (1777), ktorá bola v 17. a 18. storočí centrom vedeckého života na Slovensku a Uhorsku vôbec sa temer na sto rokov odmlčalo systematické vydávanie vedeckej a odbornej literatúry na území Slovenska, napriek tomu, že v tom čase už existovala a vyvíjala svoju činnosť Banská akadémia v Banskej Štiavnici. Dalo by sa predpokladať, že rozvinutá banská a hutnícka výroba vytvorila predpoklady pre rozvoj vedy, kultúry a školstva a následne aj vznik tlačiarní, vydavateľstiev, kníhkupectiev a kníhviazačstiev. Ekonomické a spoločenské podmienky museli dozrieť na vydávanie vedecko-technickej literatúry. Problém nedostatočného vybavenia miestnych tlačiarní bol pravdepodobne veľkou prekážkou, prečo sa zo začiatku existencie akadémie vedecko-technická literatúra temer v stredoslovenskej banskej oblasti nevydávala, aj keď tu tlačiarne už v poslednej štvrtine 18. storočia pôsobili. Čo sa týka dopytu, ten pravdaže existoval, škola potrebovala učebnice a odborné publikácie, avšak tieto boli zabezpečované najmä zo zahraničia, keďže sa v počiatkoch v prvom rade vyučovalo podľa učebníc nemeckých autorov a učebnice profesorov akadémie tiež vychádzali mimo územia Slovenska. Aj keď zavedenie maďarčiny ako vyučovacieho jazyka dalo v 70. rokoch 19. storočia definitívnu bodku za dovtedy medzinárodným významom banskoštiavnickej akadémie, priniesla táto skutočnosť aj pozitíva. Narástla požiadavka učebníc v maďarskom jazyku, a tým sa naplno rozvinula domáca odborná spisba, logicky v maďarčine. Vznikali nové originálne diela z rôznych oblastí vied vyučovaných na akadémii, ktoré boli prezentačnou formou najnovších výskumov a poznatkov, a hoci sa čiastočne opierali o zahraničnú literatúru, do popredia vstupovali domáce skúsenosti a výsledky.

Vydávanie matematickej literatúry v stredoslovenskej banskej oblasti bolo orientované najmä na vydávanie učebníc pre nižší i vyšší stupeň vzdelávania. V učebniciach pre základné (ľudové) a stredné školy bola prezentovaná elementárna matematika na osvojenie si základných matematických znalostí. Literatúra pre vyšší stupeň sa zameriavala na tvorbu učebníc, či skôr príručiek a matematických pomôcok na zjednodušenie matematických operácií potrebných k vykonávaniu baníckej a hutníckej praxe. Osobitnú časť tvorila literatúra, ktorej vydávanie si vynútil prechod na novú metrologickú sústavu a bola určená pre rôzne vrstvy obyvateľstva. Autori – matematici pôsobiaci v tejto oblasti sa venovali aj užšie špecializovaným odborným témam, výsledky svojho výskumu však skôr prezentovali na stránkach súdobých odborných periodík ako v monografickej rovine.

4.2 Ďalšie perspektívy

Výskum vydávania matematickej literatúry v stredoslovenskej banskej oblasti nám poskytol základné informácie o matematickej kultúre, najmä v akademickom priestore. V ďalších fázach výskumu sa zameriame na komplexnú analýzu vydávania tohto typu literatúry na celom území Slovenska, a to nielen na monografickú literatúru, ale aj na štúdie a odborné články, ktoré vyšli v súdobých periodikách. Druhá rovina výskumu sa bude orientovať na vedecké kolaboratóriá slovenských a zahraničných vedcov a ich spoločné výskumy a výsledky, odprezentované v domácom priestore.

Literatúra

[1] Kosáry D.: *Művelődés a XVIII. századi Magyarországon*. Akadémia, Budapest, 1980.

[2] Morovics M. T.: *K dejinám matematickej kultúry na Slovensku do roku 1918 s osobitným zreteľom na obdobie priemyselnej revolúcie*. Dizertačná práca. Bratislava, 1992.

[3] Lesák J.: *Vměnj počtu*. Frantissek Augustýn Patzko, Presspurk, 1775.

[4] Raduch M.: *Sprostný, ale zřetedlný Traktát Arithmeticky*. Frantissek Augustýn Patzko, Presspork, 1775.

[5] Morovics M. T.: *Vyučovanie matematických predmetov na Baníckej akadémii v Banskej Štiavnici*. In *230 rokov Baníckej akadémie v Banskej Štiavnici*, Banícka fakulta TU, Košice, 1992, 182–206.

[6] Kordoš G.: *Úkoly pre slovenské školské dietky*. August Joerges, Banská Štiavnica, 1875.

[7] Kordoš G.: *Methodický návod ku počtovaniu v metrických mierach a desätinných zlomkoch pre slov. učiteľov, rodičov a vychovávateľov*. August Joerges, Banská Štiavnica, 1875.

[8] Hlaváč A.: *Desať vetiev slovenského fyzikálneho stromu v 2. polovici minulého storočia*. SAP, Bratislava, 1994.

[9] Groó Ľ. G.: *Počtové príklady pre slovenské národnie školy. I. – II. trieda*. Banská Bystrica, 1887.

[10] Groó Ľ. G.: *Počtové príklady pre slovenské národnie školy. III. trieda*. Banská Bystrica, 1887.

[11] Groó Ľ. G.: *Počtové príklady pre slovenské národnie školy. IV. trieda*. Banská Bystrica, 1887.

[12] Tükör A.: *Számtan az alsófokú ipar- és ismétlő iskolák számára*. Á. Joerges, Selmecbánya, 1890.

[13] Gúta J.: *Felsőbb leányiskolai számtani füzetek I – VI. osztály számára*. Filip Machold, Beszterczebánya, 1894.

[14] Szinnyei J.: *Magyar írók élete és munkái. Zv. 3*. Hornyánszky Viktor, Budapest, 1891–1914, 1559–1560.

[15] Hermann E.: *Négyjegyű Logarithmusok*. Joerges Ágost özvegye, Selmeczbánya, 1884.

[16] Hermann E.: *A számtolóka (Régle a Calcul)*. Joerges Ágoston, Selmecz, 1874.

[17] Nyugatmagyarországi Egyetem – Levéltár – Tanácsülési jegyzőkönyvek 1880. Jan. 9. – 1890. dec. 19.

[18] Hermann E.: *A Számtolóka Elmélete S Használata. Második Kiadás*. Joerges Ágost Özv., Selmeczbányán, 1897.

[19] *Slovenský biografický slovník. Zv. 2*. Matica slovenská, Martin, 1988, 101.

[20] Fodor L.: *Az Ábrázoló Geometria Elemei. II*. Selmeczbánya, 1896.

[21] Szinnyei J.: *Magyar írók élete és munkái. Zv. 3*. Hornyánszky Viktor, Budapest, 1891–1914, 1153–1154.

[22] Gerevich E.: *A Felfelé Menő Láncztörtek Analizise*. Singer J., Beszterczebánya, 1899.

[23] *Természettudományi Közlöny* 22(1890), 322.

[24] Miskolci Egyetem – Levéltár – Iktatott iratok – Walek, Karol.

[25] Walek K.: *Binäre Kubische Transformation und Complexe*. August Joerges, Selmeczbánya, 1908.

[26] Dérer M.: *Nové alebo metrické miery*. August Joerges, B. Štiavnica, 1875.

[27] Dérer M.: *Az új vagyis a meter-mérték*. Joerges Ágoston, Selmeczbánya, 1875.

[28] Dérer M.: *Das neue oder metrische Mass*. Joerges August, Schemnitz, 1876.

[29] *Slovenský biografický slovník. Zv. 1*. Matica slovenská, Martin, 1986, 188.

[30] Štátny ústredný banský archív, Banská Štiavnica 1247, 18. 4. 1852 Acad. 191, i.č. 111; 1248, 9. 6. 1852 Acad. 286, i.č. 111; 1255, 7. 9. 1853 Acad. 286, i.č. 111.

[31] Belházy J. N.: *A régi magyar pénzverési súlymértekek*. Joerges Ágost Özv., Selmeczbánya, 1889.

[32] Zsámboki L. *A Selmeci Műemlékkönyvtár*. Miskolc, Nehézipari Műszaki Egyetem, 1976.

Adresa

Mgr. Eva Augustínová, PhD.
Katedra mediamatiky a kultúrneho dedičstva
Fakulta humanitných vied
Žilinská univerzita v Žiline
Univerzitná 8215/1
010 26 Žilina
e-mail: *eva.augustinova@mediamatika.sk*

TAKMER UZAVRETÁ HISTÓRIA JEDNÉHO PROBLÉMU KOMBINATORICKEJ GEOMETRIE

VOJTECH BÁLINT

Abstract: The paper gives an historical overview of the solution of the famous problem of combinatorial geometry from its inception to the present.

1 Úvod

V roku 1893 J. J. Sylvester [35] formuloval nasledovný problém: *Dokážte, že žiadna konečná množina bodov sa nedá usporiadať tak, aby priamka prechádzajúca cez ľubovoľné dva z nich prechádzala aj tretím bodom bez toho, aby všetky boli kolineárne.*

Jednoduchost formulácie problému podnietila mnohých čitateľov k zaslaniu riešenia, ale ani jedno z nich nebolo správne. Práve tento problém zohral o 40 rokov neskôr veľmi významnú úlohu pri búrlivom rozvoji kombinatorickej geometrie.

2 Priamky určené konečnými množinami bodov

Nech $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ je konečná množina n bodov v rovine. Každé dva rôzne body množiny **P** určujú práve jednu priamku, jedným bodom priamka určená nie je. Množinu všetkých priamok určených bodmi množiny **P** označíme **L**. Priamka, ktorá obsahuje práve k bodov z množiny **P** sa nazýva *priamka rádu* k. Priamka rádu 2 sa nazýva *prostá*. Počet priamok rádu k označíme l_k. V tejto terminológii sa dá Sylvestrova úloha formulovať nasledovne: *Dokážte, že ak konečná množina bodov nie je kolineárna, tak určuje aspoň jednu prostú priamku.*

História riešenia Sylvestrovho problému je trochu komplikovaná, čo bolo spôsobené okrem iného aj udalosťami 2. svetovej vojny. Erdős objavil tento problém v roku 1933, teda 40 rokov po jeho prvom publikovaní, a ako neskôr v [19] sám napísal, nevedel si s ním poradiť. Informoval preto o probléme Gallaiho, ktorý krátko na to predviedol Erdősovi správny dôkaz, ale nepublikoval ho. Erdős chcel upriamiť pozornosť širšej matematickej verejnosti na tento problém a najmä na s ním súvisiace otvorené otázky, preto ho v roku 1943 znovu postavil [18] v *American Mathematical Monthly*. Problém vyriešil nasledovný rok Steinberg [33]. Na konci Steinbergovej práce je poznámka redaktora, ktorá obsahuje Gallaiho dôkaz z roku 1933. Nie je známe, či Sylvester poznal dôkaz svojho problému, ale je veľmi pravdepodobné, že áno, takže dnes je tá veta obvykle uvádzaná ako Sylvestrova-Gallaiho veta. Prvý dôkaz existencie prostej priamky (v duálnom tvare) však pravdepodobne publikoval Melchior [28]. Za Gallaiho dôkazom nasledovalo mnoho ďalších, často ako dôsledok všeobecnejšieho tvrdenia, alebo ako jeho rozšírenie pre iné objekty. Uveďme napríklad [6], [7], [9], [12], [16], [17], [22], [25], [26], [27], [30].

Veta 2.1. (Sylvester – Gallai) Ak konečný počet bodov v rovine neleží na jednej a tej istej priamke, tak určuje aspoň jednu prostú priamku.

Autorom najkrajšieho dôkazu je L. M. Kelly, ten ho ale nepublikoval. Bol publikovaný v Coxeterovej práci [11] a pre svoju genialitu bol zaradený aj do vynikajúcej knižky Aignera a Zieglera [1] *Proofs from THE BOOK*, str. 53. Záujemca ho nájde napr. aj v [3], str. 11.

Erdős viackrát nastolil nasledovnú prirodzenú otázku: *Aký je minimálny počet l_2 prostých priamok určených n bodmi, ktoré nie sú kolineárne?*

Prvý veľmi silný výsledok v tomto smere dosiahli L. M. Kelly a W. O. J. Moser.

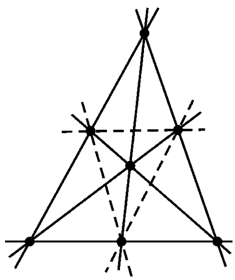
Veta 2.2. (Kelly – Moser [23]) Konečná množina n nekolineárnych bodov v reálnej projektívnej rovine určuje aspoň $3n/7$ prostých priamok.

Veta 2.2 dáva lineárnu dolnú hranicu a je najsilnejšia v tom zmysle, že existuje konfigurácia 7 bodov, ktorá určuje práve 3 prosté priamky (pozri obr. 2.1 nižšie).

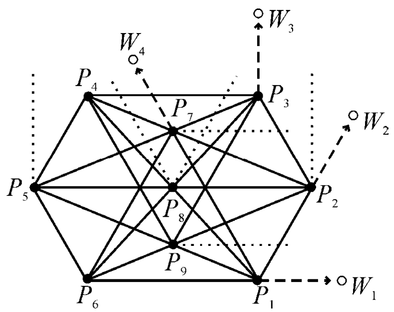
S. Hansen vo svojej doktorskej práci [21] tvrdil, že dokázal nerovnosť $l_2 \geq n/2$. Jeho dôkaz mal však takmer 100 strán, bol veľmi zložitý, takže panovala určitá nedôvera k tomu dôkazu, a ako sa neskôr ukázalo, nedôvera bola oprávnená. V jednej z kľúčových Hansenových lem totiž našli chybu Csima a Sawyer, pričom sa im v práci [14] podarilo – s využitím ostatných Hansenových výsledkov – zlepšiť veľmi silnú dolnú hranicu $3n/7$, ktorá odolávala už 35 rokov.

Veta 2.3. (Csima – Sawyer). Konečná množina $n \geq 8$ nekolineárnych bodov v rovine určuje aspoň $6n/13$ prostých priamok.

Veta 2.4. (Green – Tao [20], dôkaz hypotézy Diraca [15] a Motzkina [30]) Ak n_0 je dostatočne veľké, tak pre $n \geq n_0$ je počet l_2 prostých priamok určených n nekolineárnymi bodmi aspoň $n/2$.



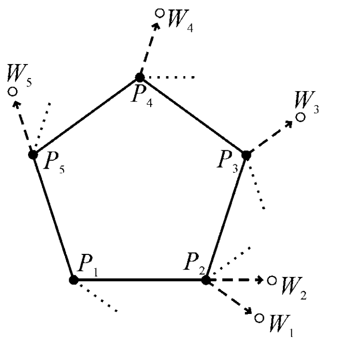
Obr. 2.1



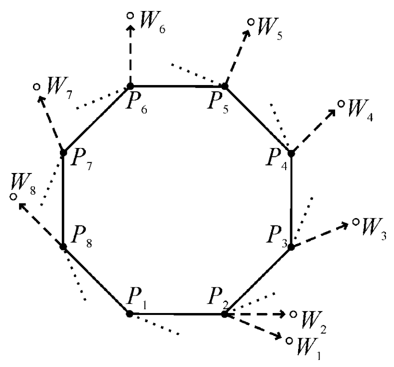
Obr. 2.2

Známe sú len dve tzv. *výnimočné* konfigurácie n bodov, teda také, ktoré určujú menej ako $n/2$ prostých priamok. Na obr. 2.1 je vyššie spomenutá konfigurácia $n=7$ bodov, ktorá určuje práve 3 prosté priamky. Neskôr Crowe a McKee [13] objavili oveľa komplikovanejšiu konfiguráciu $n=13$ bodov, ktorá určuje práve 6 prostých priamok – pozri obr. 2.2. Na tomto obrázku body $P_1, P_2, \ldots, P_6$ tvoria stredovo súmerný šesťuholník so stredom P_8, bod P_7 zvolíme na priamke P_3P_5 tak, aby priamky P_5P_6 a P_1P_7 boli rovnobežné a bod P_9 zvolíme na priamke P_2P_6 tak, aby P_2P_3 a P_4P_9 boli rovnobežné. Pridané sú 4 nevlastné body W_1, W_2, W_3, W_4, ktoré z priamok P_6P_1, P_1P_2, P_1P_3 a P_1P_7 spravia priamky trojbodové. Nevlastné body W_1, W_2, W_3, W_4 samozrejme ležia na jednej nevlastnej priamke. Takýchto 13 bodov určí presne 6 prostých priamok – tie sú nakreslené bodkovanou čiarou.

Pre $n = 2m$ Motzkin našiel konfigurácie, ktoré určujú práve $n/2$ prostých priamok, takže dolná hranica pre l_2 sa určite nedá zväčšiť.



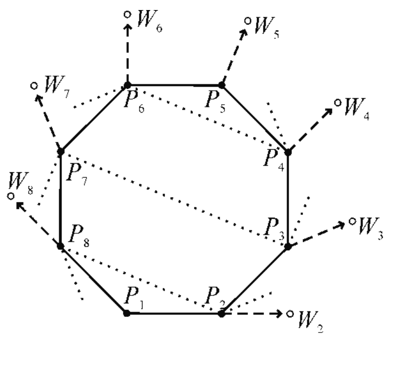
Obr. 2.3 $n = 10, l_2 = 5$



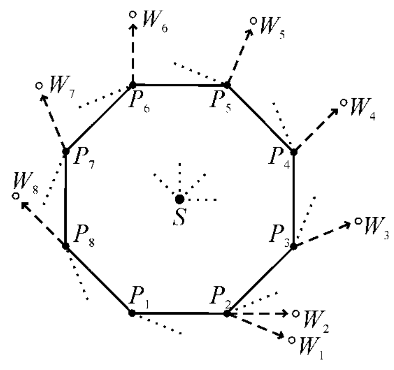
Obr. 2.4 $n = 16, l_2 = 8$

Ak $n = 2m$, vezmime vrcholy pravidelného m-uholníka spolu s m nevlastnými bodmi (t.j. bodmi ležiacimi na nevlastnej priamke) zodpovedajúcimi m smerom, ktoré sú určené dvojicami vrcholov toho m-uholníka. Takýchto $2m$ bodov určuje práve m prostých priamok, teda $l_2 = n/2$ je najlepšia možná dolná hranica aspoň pre párne n (pozri obr.2.3 a 2.4).

Ak $n = 4m+1$, tak k vyššie uvedenej konštrukcii pre $n = 4m$ treba pridať stred toho $2m$-uholníka (obr. 2.6). Ak $n = 4m+3$, tak z konštrukcie pre $n = 4m+4$ treba vynechať jeden nevlastný bod (obr. 2.5). V oboch prípadoch je $l_2 = 3\lfloor \frac{1}{4}n \rfloor$, čo je o polovicu viac, než pre n párne. Napriek tomu, že takéto veľké kolísanie je neobvyklé, autori [20] ukázali, že práve tieto konfigurácie sú extremálne. Autorom týchto konfigurácií je K. Böröczky starší, ktorý ich však nepublikoval a opísané sú v [13].



Obr. 2.5 $n = 15,\ l_2 = 9$



Obr. 2.6 $n = 17,\ l_2 = 12$

Nasledovná veta obsahuje veľmi silný výsledok – potvrdenie Erdősovej hypotézy o počte priamok určených konečnou množinou bodov.

Veta 2.5. (Kelly – W. Moser [23]) Ak nanajvýš $n-k$ bodov množiny **P** leží na jednej a tej istej priamke a $n \geq \frac{1}{2}\left(3\cdot(3k-2)^2+3k-1\right)$, tak $|\mathbf{L}| \geq k\cdot n-\frac{1}{2}(3k+2)(k-1)$.

3 Poznámky

Názov článku naznačuje, že napriek famóznemu výsledku Bena Greena a Terenca Taa problém nie je celkom uzavretý. Predovšetkým: aké veľké je n_0? Nedá sa síce vylúčiť, že $n_0 = 14$, ale v dôkaze štrukturálnej vety (*Full structure theorem*, str. 413) a aj inde autori použili $n_0 = \exp(\exp g(n))$. (Poznamenajme, že $g(n)$ je rastúca funkcia a už pre $g(n) \geq 2$ je $n_0 \geq 1618$.) Pre malé hodnoty n nie je teda vylúčená existencia ďalších výnimočných konfigurácií, ktoré určia menej ako $n/2$ prostých priamok.

Hodnoty $l_2(n)$ boli v prácach [13] a [8] určené pre $n \leq 22$ s výnimkou $n = 15, 17, 19, 20, 21$. Je však zrejmé, že $l_2(20) = 10$. Hľadanie presných hodnôt počtu prostých priamok je zmysluplné aj pre riešenie iných typov incidenčných problémov a nástojčivá otázka nájdenia minimálneho počtu $l_2(n)$ pre nepárne $n \geq 15$ bola položená aj v [10], str. 159.

Označme $(l_2, l_3, \ldots, l_r)$ konfiguráciu, ktorá pre $k = 2, 3, \ldots, r$ určuje práve l_k priamok rádu k.

Veta 3.1. Ak existuje taká konfigurácia 15 nekolineárnych bodov v rovine, že určujú menej ako 9 prostých priamok, potom táto konfigurácia musí byť jedna z nasledovných:

$$(7,26,0,2);\ (8,23,3,1);\ (8,25,2,1);\ (8,27,1,1);\ (8,29,0,1);\ (8,24,0,1,1).$$

Predošlá veta z [4] redukuje prípadnú existenciu ďalšej *výnimočnej* konfigurácie na konečný (a naviac dosť malý) počet konkrétnych možností. Ich preskúmanie ale nie je jednoduché a zatiaľ sa to nikomu nepodarilo. Samozrejme, dôvod môže byť ten, že taká konfigurácia bodov nexistuje. V [4] sa nájdu analogické vety pre 17 aj 19 bodov.

Problém. Nájdite konfigurácie s nepárnym počtom n bodov, ktoré určia menej ako $n/2$ prostých priamok.

4 Záver

Pri vyše 70-ročnom skúmaní problematiky počtu priamok určených konečnými množinami bodov vznikla široká paleta rôznych prístupov, často iniciovaných práve Erdősom. Skúmalo sa mnoho špeciálnych prípadov a príbuzných otázok, takže problematika má ohromnú literatúru. Táto bola v nemalej miere uvedená už v knihe [2] a inovovaná v [3]. Z novších prác si však dovolím pridať na zoznam [31], [32], [34], [36] a ponechal som aj klasické prehľady [5], [24], [29]. Len málo z tých odvodených problémov bolo úplne vyriešených, takže záujemca nájde v literatúre niektoré odpovede a *veľmi veľa otvorených otázok*. Je pravdepodobné, že výsledky Greena a Taa [20] posunú hranice aj pre ďalšie problémy extremálnej kombinatorickej geometrie.

Literatúra

[1] Aigner M., Ziegler G. M.: *Proofs from THE BOOK*. 3rd ed., Springer, Berlin, 2004.

[2] Bálint V.: *Kombinatorická geometria – výber niektorých štrukturálnych problémov*. EDIS, Žilina, 2007.

[3] Bálint V.: *Z histórie kombinatorickej geometrie*. In Bečvář J., Bečvářová M. (eds.): 34. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha 2013, 11–44.

[4] Bálint V., Čmelková V.: *Ako nájsť presné hodnoty počtu prostých priamok určených n bodmi v rovine*? In Proc. of Symposium on Comput. Geom. SCG'2007, vol.16, 5–11.

[5] Brass P., Moser W. O. J., Pach J.: *Research Problems in Discrete Geometry*. Springer, New York, 2005.

[6] Borwein P. B.: *A conjecture related to Sylvester's problem*. Amer. Math. Monthly 90(1983), 389–390.

[7] Borwein P. B., Moser W. O. J.: *A survey of Sylvester's problem and its generalizations*. Aequationes Math. 40(1990), 111–135.

[8] Brakke K. A.: *Some new values for Sylvester's function for n non-collinear points*. J. Undergrad. Math. 4(1972), 11–14.

[9] de Bruijn N. G., Erdős P.: *On a combinatorial problem*. In Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam 51(1948), 1277–1279. Also in: Indagationes Math. 10(1948), 421–423.

[10] Croft H. T., Falconer K. J., Guy R. K.: *Unsolved problems in Geometry*. 2nd ed., Springer, New York – Berlin – Heidelberg, 1994.

[11] Coxeter H. S. M.: *A problem of collinear points*. Amer. Math. Monthly 55(1948), 26–28.

[12] Coxeter H. S. M.: *Introduction to Geometry*. 2 nd ed., John Wiley & Sons, 1989.

[13] Crowe D. W., McKee T. A.: *Sylvester's problem on collinear points*. Math. Mag. 41(1968), 30–34.

[14] Csima J., Sawyer E. T.: *A short proof that there exist* $6n/13$ *ordinary points*. Discrete and Comput. Geom. 9(2)(1993), 187–202.

[15] Dirac G. A.: *Collinearity properties of sets of points*. Quarterly Journal of Math. (Oxford series) 2(1951), 221–227.

[16] Edelstein M.: *Generalizations of the Sylvester problem*. Math. Mag. 43(1970), 181–188.

[17] Edelstein M., Herzog F., Kelly L. M.: *A further theorem of the Sylvester type*. Proc. Amer. Math. Soc. 14(1963), 359–363.

[18] Erdős P.: *Problem* 4065. Amer. Math. Monthly 50(1943), 65.

[19] Erdős P.: *Combinatorial problems in geometry*. Math. Chronicle 12 (1983), 35–54.

[20] Green B., Tao T.: *On sets defining few ordinary lines*. Discrete Computational Geometry 50(2)(2013), 409–468.

[21] Hansen S.: *Contributions to the Sylvester-Gallai-Theory*. Doctoral dissertation, University of Copenhagen, 1981.

[22] Herzog F., Kelly L. M.: *A generalization of the theorem of Sylvester*. Proc. Amer. Math. Soc. 11(1960), 327–331.

[23] Kelly L. M., Moser W. O. J.: *On the number of ordinary lines determined by n points*. Canadian J. of Math. 10(1958), 210–219.

[24] Klee V., Wagon S.: *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory*. The Math. Assoc. of America, 1991.

[25] Kupitz Y. S.: *On a generalization of the Gallai - Sylvester theorem*. Discrete Computational Geometry 7(1972), 87–103.

[26] Lang G. D. W.: *The dual of a well-known theorem*. Math. Gazette 39(1955), 314.

[27] Lin X. B.: *Another brief proof of the Sylvester theorem*. Amer. Math. Monthly 95(1988), 932–933.

[28] Melchior E.: *Über Vielseite der projektiven Ebene*. Deutsche Mathematik 5(1941), 461–475.

[29] Moser W. O. J.: *Problems, problems, problems*. Discrete Applied. Mathematics 31(1991), 201–225.

[30] Motzkin T.: *The lines and planes connecting the points of a finite set*. Trans. Amer. Math. Soc. 70(1951), 451–464.

[31] Nilakantan N.: *Extremal problems related to the Sylvester-Gallai theorem*. In Combinatorial and Computational Geometry. MSRI Publications, Berkeley, 2005.

[32] Pach J., Sharir M.: *Combinatorial geometry and its algorithmic applications: the Alcalá lectures*. In AMS Mathematical Surveys and Monographs, vol. 152, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[33] Steinberg R.: *Solution to Problem* 4065. Amer. Math. Monthly 51(1944), 169–171.

[34] Sudakov B., Szemerédi E., Vu V.: *On a problem of Erdős and Moser*. Duke Math. J. 129(1)(2005), 129–154.

[35] Sylvester J. J.: *Mathematical Question* 11851. The Educational Times 46(1893), 156.

[36] Tao T., Vu V. H.: *Additive combinatorics*. In Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 105, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

Adresa

Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Katedra kvantitatívnych metód a hospodárskej informatiky
Fakulta PEDAS, Žilinská univerzita
Univerzitná 1
010 26 Žilina
e-mail: *vojtech.balint@fpedas.uniza.sk*

AL-QUASHJI, KURIÉR SULTÁNSKYCH TABULIEK

ANNA BÁLINTOVÁ, ROD. TROJÁČKOVÁ

Abstract: This article is devoted to a 15th century scientist known as Ali al-Qushji. His scientific discourses are valuable asset not only in the field of mathematics and astronomy, but in other sciences as well, for example in linguistic and philosophy. Proportion of his making is not as ample as his predecessors from the so called Golden age of Arabic science, but noteworthy is his historical assignment of bringing the Sultan's tables from Samarkand to Istanbul.

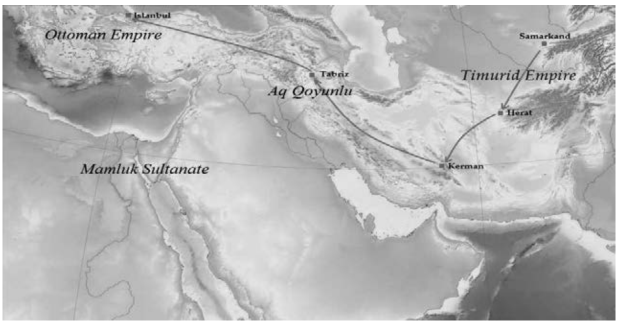
1 Úvod

Ali al-Qushji (Samarkand 1403 – Istanbul 1474), celým menom Ala ad-Din Ali ibn Muhammad Qushji, je posledným mohykánom *Zlatého veku arabskej vedy* (VII. až XV. storočie). Jeho vedecké pojednania sú prínosom nielen v oblasti matematiky a astronómie ale aj v iných vedných disciplínach ako napr. filozofia, teológia, jazykoveda a rétorika. Do histórie sa výrazne zapísal aj tým, že jeho zásluhou sa tzv. *Sultánske tabuľky* dostali zo Samarkandu do Istanbulu a pravdepodobne odtiaľ si našli cestu aj do Európy. Pripomeňme, že vydaním spomínaných tabuliek v roku 1439 vyvrcholili práce početnej skupiny učencov vedeckého centra, tzv. *Medersy,* pod vedením jej zakladateľa a vládcu Samarkandu – famózneho Ulugh Bega. Jeho vzťah k al-Qushjimu bol výnimočný, možno povedať že otcovský.

Neskoršie uzavretie spomínaného vedeckého centra bolo súčasťou začínajúceho obdobia úpadku a straty dominantného postavenia arabskej vedy. Ale vývoj pokračoval ďalej – štafetu prebrala Európa, reprezentovaná v XV. storočí hlavne talianskymi matematikmi, ktorí boli schopní poskytnúť vede nové myšlienky určujúce ďalší rozmach a vývoj matematiky. A jednoducho povedané bolo treba opäť niečo *nové.*

2 Zo Samarkandu do Istanbulu

Životná púť al-Qushjiho je zvláštna a zaujímavá aj z hľadiska geografického (viď obr. 1).



Obr.1

Začala v Samarkande a skončila v Istanbule. Tú istú trasu absolvovali s ním aj *Sultánske tabuľky,* ktorých kópiu vzal zo sebou pri svojom odchode zo Samarkandu.

Svoje štúdiá absolvoval al-Qushji v Samarkande a Kirmane pod vedením významných osobností vedeckého života XV. storočia, akými boli Ulugh Beg a Qadi-zadek Rumi. Prvý z nich si všimol jeho schopnosti i záujem o matematiku a astronómiu. Neskoršie ho prijal ako svojho asistenta a spolupracovníka do *Medersy* v Samarkande. Schopnosti a tiež neúnavná, vytrvalá pracovitosť al-Qushjiho ho predurčili k tomu, aby po smrti Rumiho prevzal post riaditeľa observatória v Samarkande. V tomto prostredí prezentoval svoju prvú písomnú vedeckú prácu *Risala fi Hall Askha Mu'addil al-Oamarli-al-Masir,* v ktorej popisuje a skúma jednotlivé fázy Mesiaca. Samozrejme, že je tiež spoluautorom v úvode spomínaných *Sultánskych tabuliek.*

Zlom v živote al-Qushjiho nastáva po tragickej smrti mecenáša *Medersy*, Ulugh Bega, zavraždeného vlastným synom v r. 1449. V tom istom roku odchádza zo Samarkandu do iránskeho Tabrizu, kde vstupuje do služieb Uzun Hasana. Aj tento panovník oceňuje kvality al-Qushjiho a vysiela ho neskôr ako svojho *ambasádora dobrej vôle* do Istanbulu, k sultánovi Muhamedovi II. Do Istanbulu prichádza al-Quishji už ako renomovaný, uznávaný vedec. A opäť sa mu dostáva úcty a dôvery, dostáva totiž ponuku vyučovať na *Mederse,* vedeckom centre Istanbulu. A tu je jeho diplomatická odpoveď sultánovi:

Ak dovolíte, chcel by som sa vrátiť najskôr do Tabrizu. Pôvodný dôvod mojej tunajšej prítomnosti, bol odovzdať vám posolstvo dobrej vôle od sultána Hasana. Je pre mňa nevyhnutné, aby som pred tým, ako s vďakou prijmem vaše pozvanie, informoval sultána o tom, že som dobre splnil svoju úlohu (viď [1]).

Tento citát dokresľuje charakter al-Qushjiho, ktorý ako muž daného slova sa vracia po rokoch do Istanbulu, kde v roku 1472 začína posledná etapa jeho plodného života. Do Istanbulu neprichádza s prázdnymi rukami, prináša so sebou svoje vedecké pojednania, ktoré predkladá sultánovi Mohamedovi II. Uvádza v nich okrem iného aj experimentálne dôkazy o pohybe Zeme. Pred ním len jediný arabský matematik uviedol empirický dôkaz v prospech tvrdenia o rotačnom pohybe Zeme, a síce Nasir ad-Din at-Tusi. Dá sa predpokladať, že práce al-Qushjiho ovplyvnili neskôr aj názor Mikuláša Koperníka, ktorý v roku 1543 použil rovnaké argumenty, ktorými podporil svoje tvrdenie o rotačnom pohybe Zeme.

Istanbul bol v rokoch pôsobenia al-Qushjiho centrom vedeckého pokroku v arabsko-muslimskom svete. Mnohí vedci odchádzajú neskoršie z Istanbulu smerom do Itálie, čo tiež podporilo nástup *Renesancie* v Európe. Štafeta pokroku sa približuje naspäť smerom k starému kontinentu – sme opäť svedkami toho, ako vývoj, napriek všetkým prekážkam, nezadržateľne pokračuje ďalej.

3 Dielo

Ako už vieme, Ali al-Qushji pôsobil vo významných vedeckých centrách, navzájom pomerne vzdialených: v Samarkande a neskôr v Istanbule. Súčasťou oboch inštitúcií bolo prirodzene observatórium, nakoľko matematika a astronómia sa v danom období rozvíjali súčasne, navzájom sa podporujúc.

Dielo al-Qushjiho je považované za oneskorené oživenie arabskej astronómie, ktorá prežívala v rokoch 1450–1900 obdobie stagnácie v rozvoji teoretickej astronómie. Zostali len tradičné praktiky spojené s astronómiou, ktoré boli nevyhnutnou súčasťou bežného života v arabsko-muslimskom svete.

Tak ako bolo charakteristickým znakom pre arabských matematikov tohto obdobia, je presnosť výpočtov typickým prvkom aj v prácach al-Qushjiho. Jeho najvýznamnejšie práce z matematiky sú uvedené pod nasledovnými titulmi:

1) *Al-Risala fi Ilm-i Hisab*,
2) *Al-Risala al-Muhammadiyya fi al-Hisab*.

Obe práce sú pojednaním o aritmetike a algebre. Druhá z nich je v podstate vylepšením aj rozšírením predchádzajúcej, pozostáva z piatich kapitol napísaných na 119 fóliách. Je výsledkom dlhoročnej práce al-Qushjiho počas cesty zakončenej v Istanbule, kde vládol sultán Muhamed II. Venoval ju tomuto panovníkovi ako prejav úcty, čo je zdôraznené aj v jej názve.

Podstatne bohatší odkaz zanechal al-Qushji v oblasti astronómie, či už ako samostatný autor alebo ako člen veľmi početnej skupiny vedcov observatória v Samarkande (viď [2]), ktorá pripravovala enormne bohatý katalóg hviezd. Katalóg bol súčasťou publikácie, ktorá má názov: *Sharh-i Zij-i Ulugh Beg*. Al-Qushji prispel presnými výpočtami vzdialeností nebeských telies od Zeme. Venoval sa tejto problematike, ktorá je náplňou jeho početných prác v oblasti astronómie, takmer tridsať rokov. S ich názvami ako aj obsahom sa môžeme bližšie zoznámiť v literatúre (viď [1]).

Zvláštnu pozornosť si zaslúži posledná práca al-Qushjiho uvedená v roku 1473 pod názvom: *Al-Risala al-Fatahija*. Autor v nej publikoval okrem iného mimoriadne presný výpočet uhla, ktorý zviera ekliptika so zemskou osou, len málo sa líšiaci od súčasného. Uvedenú prácu venoval opäť Muhamedovi II., a to symbolicky v deň jeho víťazstva nad sultánom Uzun Hasanom. Zrejme nás táto skutočnosť prekvapuje, lebo to bol práve sultán Uzun Hasan, ktorý vyslal Ali al-Qushjiho ako *posla dobrej vôle* k Muhamedovi II. Mocenské záujmy vladárov sa evidentne riadia inou logikou ako je tá, ktorá vládne vo vedeckých disciplínach.

Ali al-Qushji bol zrejme vynikajúcim prednášateľom, ktorý ovládal perfektne rétoriku. Aj to je jeden z dôvodov, prečo sa práve jeho dielo stalo podstatným zdrojom ďalšieho rozvoja vedy v osmanskej ríši počas vládnutia Muhameda II. Pre úplnosť poznamenajme, že práve jeho zásluhou byzantskú ríšu vystriedala osmanská, ktorá pretrvala až do roku 1923, kedy bola vystriedaná tureckou republikou a Konštantinopol bol premenovaný na Istanbul.

4 Záver

Pohľad na životnú púť a dielo al-Quishjiho inšpiruje okrem iného aj k tomu, aby sme sa zamysleli nad rôznym poslaním matematikov a učencov vôbec. Niektorí objavili nové zákonitosti, iní ich zdokonalili, resp. bližšie vysvetlili miesta náročné na pochopenie, ďalší študovali historický vývoj matematiky, atď. Všetkým, ktorí oddane naplnili svoje poslanie, patrí bez rozdielu úcta a poďakovanie, tak ako to zdôraznil jeden z najväčších matematikov všetkých čias, geniálny arabský učenec al-Chwarezmi. Áno, je to tak: *Matematika potrebuje všetkých*, samozrejme i takých, ako bol *kuriér zo Samarkandu*.

Poďakujme Ali al-Qushjimu za jeho odkaz i inšpiráciu, a ak nás kroky zavedú do Istanbulu, môžeme sa pokloniť jeho pamiatke na mieste, kde skončila jeho historická životná púť (viď obr. 2).

Obr. 2

Literatúra

[1] Ileri I.: *Ali Al-Qushji and His Contributions to Mathematics and Astronomy*. Journal of the Center for Ottoman Studies, Ankara University (OTAM) 20(2006), 175–183.

[2] Bálintová A.: *Al-Kashi, nasledovník Pytagora*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 34. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2013, 57–62.

[3] Wikipedia (The free encyclopedia): *Ali Qushji* [on line]. Posledná revízia 8. 8. 2013 [cit. 30. 4. 2014].

Adresa

RNDr. Anna Bálintová, CSc.
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Monastir
5019 Monastir
Tunisie
e-mail: *abalintova@seznam.cz*

PSEUDOINVERZE

Jindřich Bečvář

Abstract: In the first part of this article, some basic properties of generalized inverses of matrices and transformations are described. In the second part, the brief history of the notion generalized inverse and its applications are presented.

1 Úvod

Pojem *pseudoinverzní matice* se objevil již roku 1920, většího rozšíření a užití doznal až ve druhé polovině 20. století. Studován byl nejprve v souvislosti s *řešitelnými* soustavami lineárních rovnic, většího významu však nabyl pro nalezení *přibližného řešení* soustavy, která exaktní řešení nemá. Z teorie matic se problematika „zobecněné inverze" přenesla do dalších disciplín.

2 Pseudoinverzní matice

Nechť A je matice typu $n \times m$ nad polem F. Matice A^- typu $m \times n$ se nazývá *pseudoinverzní matice* k matici A, jestliže $AA^-A = A$. Jestliže navíc platí rovnost $A^-AA^- = A^-$, pak se matice A a A^- nazývají *navzájem pseudoinverzní.*

Je zjevné, že se jedná o zobecnění pojmu *inverzní matice*: je-li A čtvercová regulární matice, je $A^- = A^{-1}$.

Není obtížné ukázat, že ke každé matici A existuje pseudoinverzní matice A^-, resp. taková matice A^-, že matice A a A^- jsou navzájem pseudoinverzní. Poznamenejme, že pseudoinverzní matice A^- k matici A není určena jednoznačně, a to ani v případě, kdy mají být matice A a A^- navzájem pseudoinverzní.

Jestliže je A^- nějaká pseudoinverzní matice k matici A, potom všechny pseudoinverzní matice k matici A mají tvar

$$A^- + X - A^-AXAA^-,$$

kde X probíhá všechny matice typu $m \times n$ nad polem F, resp.

$$A^- + X(E - AA^-) + (E - A^-A)Y\ ,$$

kde X a Y probíhají všechny matice typu $m \times n$ nad polem F (symbol E značí jednotkovou matici příslušného řádu).

Je-li A^- pseudoinverzní matice k matici A, pak pro hodnosti matic A^-, A, AA^-, A^-A platí nerovnosti $r(A^-) \geq r(A) \geq r(AA^-) = r(A^-A)$. Jsou-li tedy matice A a A^- navzájem pseudoinverzní, je $r(A^-) = r(A)$.

Pseudoinverzní matice můžeme využít při řešení soustav lineárních rovnic.

Nechť A je matice typu $n \times m$ nad polem F a nechť y je n-tice prvků pole F. Je-li A^- pseudoinverzní matice k matici A, potom platí:

(i) *Soustava* $Ax = y$ *je řešitelná právě tehdy, když je* $AA^- y^{\mathrm{T}} = y^{\mathrm{T}}$.

(ii) *Je-li soustava* $Ax = y$ *řešitelná, potom množina všech jejích řešení sestává právě z vektorů tvaru*

$$A^- y^{\mathrm{T}} + u^{\mathrm{T}} - A^- A u^{\mathrm{T}},$$

kde vektor u *probíhá prostor* F^m.

(iii) *Je-li nehomogenní soustava* $Ax = y$ *řešitelná, potom množina všech jejích řešení sestává právě z vektorů tvaru* By^{T}, *kde* B *probíhá všechny matice, které jsou k matici* A *pseudoinverzní.*

Pro komplexní (nebo reálné) matice můžeme zavést následující důležitý pojem.

Nechť A je komplexní (resp. reálná) matice typu $n \times m$. Matice A^+ typu $m \times n$ se nazývá *Mooreova-Penroseova pseudoinverzní matice* k matici A, jestliže

$$AA^+A = A\ , \qquad A^+AA^+ = A^+$$

a jestliže matice AA^+, A^+A jsou hermitovské (resp. symetrické), tj.

$$\left(AA^+\right)^* = AA^+, \qquad \left(A^+A\right)^* = A^+A.$$

Zásadním výsledkem je následující tvrzení:

Ke každé matici existuje jediná Mooreova-Penroseova pseudoinverzní matice.

Mooreova-Penroseova pseudoinverzní matice je užitečná v různých aplikacích, například v situacích, kdy je třeba najít *přibližné řešení* soustavy lineárních rovnic, která v exaktním smyslu řešitelná není.

Nechť A *je komplexní* (*reálná*) *matice typu* $n \times m$ *a nechť* y *je* n*-tice prvků pole* F. *Je-li* A^+ *Mooreova-Penroseova pseudoinverzní matice k matici* A, *potom platí:*

(i) *Je-li* $Ax = y$ *řešitelná soustava, potom je* A^+y^{T} *její řešení, které má ze všech jejích řešení nejmenší normu.*

(ii) *Je-li* $Ax = y$ *neřešitelná soustava, potom je* A^+y^{T} *její přibližné řešení, které má ze všech jejích přibližných řešení nejmenší normu.*

3 Pseudoinverzní homomorfismy

Hlubšího porozumění dosáhneme, budeme-li místo *matic* studovat *homomorfismy* vektorových prostorů, případně komplexních (reálných) vektorových prostorů se skalárním součinem, a celou problematiku pak přeložíme do maticové řeči.

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad polem F a $f : U \to V$ homomorfismus. Homomorfismus $g : V \to U$ se nazývá *pseudoinverzní homomorfismus* k homomorfismu f, jestliže je $fgf = f$. Je-li navíc $gfg = g$, nazývají se homomorfismy f, g *navzájem pseudoinverzní.*

Je-li homomorfismus $g : V \to U$ pseudoinverzní k homomorfismu $f : U \to V$, potom platí:

(i) $r(g) \geq r(f) = r(fg) = r(gf)$,
(ii) je-li f epimorfismus, je g monomorfismus,
(iii) je-li f monomorfismus, je g epimorfismus,
(iv) $\mathrm{Im}\, f = \{v \in V;\ fg(v) = v\}$ a $\mathrm{Ker}\, f = \{u - gf(u);\ u \in U\}$,
(v) úplný vzor vektoru $v \in \mathrm{Im}\, f$ je $\{g(v) + u - gf(u);\ u \in U\}$,
(vi) $U = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, g$ a $O = \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f$,
(vii) jestliže je $\varphi \in \mathrm{Aut}\, U$ a $\psi \in \mathrm{Aut}\, V$, potom je $\varphi^{-1} g \psi^{-1}$ pseudoinverzní homomorfismus k homomorfismu $\psi f \varphi$,
(viii) všechny pseudoinverzní homomorfismy k homomorfismu f mají tvar
$$g + \varphi - gf\varphi fg \ , \quad \text{kde} \ \ \varphi \in \mathrm{Hom}\,(V, U),$$
(ix) všechny pseudoinverzní homomorfismy k homomorfismu f mají tvar
$$g + \varphi(1_V - fg) + (1_U - gf)\psi \ , \quad \text{kde} \ \ \varphi, \psi \in \mathrm{Hom}\,(V, U).$$

Jsou-li homomorfismy $f : U \to V$ a $g : V \to U$ navzájem pseudoinverzní, potom platí:

(i) $f = 0$ právě tehdy, když $g = 0$,
(ii) $r(f) = r(g)$,
(iii) f je monomorfismus, právě když je g epimorfismus,
(iv) $U = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$ a $V = \mathrm{Ker}\, g \oplus \mathrm{Im}\, f$,
(v) homomorfismus f zobrazuje $\mathrm{Im}\, g$ izomorfně na $\mathrm{Im}\, f$, homomorfismus g zobrazuje $\mathrm{Im}\, f$ izomorfně na $\mathrm{Im}\, g$ a homomorfismy f a g jsou na těchto podprostorech navzájem inverzní.

Laskavý čtenář nechť si namaluje obrázky, které ho bezprostředně přivedou k důkazům předchozích tvrzení.

Nyní je snadné ukázat, že ke každému homomorfismu $f : U \to V$ existuje pseudoinverzní homomorfismus $g : V \to U$, resp. takový homomorfismus $g : V \to U$, že homomorfismy f, g jsou navzájem pseudoinverzní. Rovněž je jednoduché ke konkrétně zadanému homomorfismu f sestrojit pseudoinverzní homomorfismus g.

Nechť U, V jsou komplexní (resp. reálné) prostory se skalárním součinem a nechť $f : U \to V$ a $g : V \to U$ jsou navzájem pseudoinverzní homomorfismy. Řekneme, že tvoří *Mooreovu-Penroseovu dvojici*, jestliže je

$$\mathrm{Im}\, g = (\mathrm{Ker}\, f)^{\perp} \qquad \text{a} \qquad \mathrm{Ker}\, g = (\mathrm{Im}\, f)^{\perp} \ .$$

Dvojice f, g je tedy Mooreova-Penroseova právě tehdy, když jsou podprostory $\mathrm{Ker}\, f$ a $\mathrm{Im}\, g$ navzájem ortogonálními doplňky v prostoru U a podprostory $\mathrm{Ker}\, g$ a $\mathrm{Im}\, f$ navzájem ortogonálními doplňky v prostoru V. Odtud snadno plyne následující tvrzení.

Nechť U, V jsou unitární prostory konečných dimenzí. Ke každému homomorfismu $f : U \to V$ existuje jediný homomorfismus $g : V \to U$, pro který je f, g Mooreova-Penroseova dvojice navzájem pseudoinverzních homomorfismů.

Lze ukázat, že navzájem pseudoinverzní homomorfismy $f : U \to V,\ \ g : V \to U$ tvoří Mooreovu-Penroseovu dvojici právě tehdy, když jsou homomorfismy fg a gf *samoadjungované*, tj. pro každé $u_1, u_2 \in U$ a každé $v_1, v_2 \in V$ je

$$\big(\, u_1 \,\big|\, gf(u_2) \,\big) = \big(\, gf(u_1) \,\big|\, u_2 \,\big) \qquad \text{a} \qquad \big(\, v_1 \,\big|\, fg(v_2) \,\big) = \big(\, fg(v_1) \,\big|\, v_2 \,\big).$$

Následující tvrzení dává obecnější pohled na využití pseudoinverzních matic na řešení soustav lineárních rovnic.

Nechť U, V jsou komplexní (nebo reálné) prostory se skalárním součinem a nechť homomorfismy $f : U \to V$ a $g : V \to U$ tvoří Mooreovu-Penroseovu dvojici navzájem pseudoinverzních homomorfismů. Potom platí:

(i) *Pro každé $v \in \operatorname{Im} f$ má vektor $g(v)$ nejmenší normu ze všech vzorů vektoru v při homomorfismu f.*

(ii) *Pro každé $v \in V$ je $fg(v)$ kolmým průmětem vektoru v na podprostor $\operatorname{Im} f$ a vektor $g(v)$ má nejmenší normu ze všech vzorů vektoru $fg(v)$.*

Literatura o pseudoinverzních maticích a jejich aplikacích je velmi bohatá. Připomeňme na tomto místě jen tituly [BIG], [BO1], [BO2], [CM], [Gr], [LH], [Na], [PO] a [RM], v nichž lze nalézt řadu dalších bibliografických odkazů. Výklad základních faktů o pseudoinverzních maticích postavený na tvrzeních o pseudoinverzních homomorfismech vektorových prostorů je podán v učebnici [B].

4 Historie

V několika následujících odstavcích podáme stručný přehled o vzniku a vývoji problematiky pseudoinverzních matic.

Eliakim Hastings Moore

Myšlenku pseudoinverzní matice poprvé prezentoval v dubnu roku 1920 Eliakim Hastings Moore (1862–1932) na *Fourteenth Western Meeting* Americké matematické společnosti na univerzitě v Chicagu.[1] Abstrakt jeho přednášky začíná takto:

In this paper Professor Moore calls attention to a useful extension of the classical notion of the reciprocal of a nonsingular square matrix. ([M1], str. 394)

Moore ukázal, že k libovolné komplexní matici typu $n \times m$ existuje jediná pseudoinverzní matice (*general reciprocal matrix*), která je typu $m \times n$.

Consider any $m \times n$ matrix κ … There exists one and only one $n \times m$ matrix λ, the reciprocal of κ, such that (1) *the columns of λ are linear combinations of the conjugates of the rows of κ,* (2) *the rows of λ are linear combinations of the conjugates of the columns of κ,* (3) *the matrix $TS\kappa\lambda\kappa$ obtained by matricial composition of the matrices κ, λ, κ is the original matrix κ …* ([M1], str. 394–395)

[1] Ve dnech 9. a 10. dubna zaznělo na této akci 19 přednášek. Jejich abstrakty, které sepsal Arnold Dresden (1882–1954), byly otištěny v časopise Bulletin of the American Mathematical Society.

Studiem pojmu „zobecněná inverzní matice“ se zabýval již v letech 1910 až 1920. Později tuto problematiku podrobněji rozpracoval v monografii nazvané *General Analysis I.* [M2].[2] Po Mooreově smrti ji roku 1935 vydal Raymond Walter Barnard (1890–?), jeho bývalý student, který v letech 1932 až 1962 působil na chicagské univerzitě.

V úvodu partie o pseudoinverzních maticích[3] Moore napsal:

The effectiveness of the reciprocal of a nonsingular finite matrix in the study of properties of such matrices makes it desirable to define if possible an analogous matrix to be associated with each finite matrix κ even if κ is not square or, if square, is not necessarily nonsingular. ([M2], str. 197)

Pomocí nově zavedeného pojmu *pseudoinverzní matice* pak popsal množinu všech řešení (řešitelné) soustavy lineárních rovnic.

Eliakim Hastings Moore studoval na Yale University v letech 1879 až 1883, o dva roky později zde získal doktorát za práci *Extensions of certain theorems of Clifford and Cayley in the geometry of n dimensions.* V období 1885 až 1886 byl v Göttingen, potom v Berlíně, kde navštěvoval přednášky Leopolda Kroneckera (1823–1891). Po návratu z Evropy krátce působil na Northwestern University, Yale University a opět na Northwestern University. Od roku 1893 pracoval na University of Chicago, kde v letech 1896 až 1931 vedl matematický ústav. Výrazně ovlivnil své doktorandy (mezi nejvýznamnější patřili Leonard Eugene Dickson (1874–1954), Oswald Veblen (1880–1960) a George David Birkhoff (1884–1944)) i Veblenova doktoranda Roberta Lee Moorea (1882–1974).

Moore se zabýval hlavně algebrou (konečná pole, jednoduché konečné grupy atd.), teorií čísel, axiomatikou geometrie, algebraickou geometrií, základy analýzy a integrálními rovnicemi. Roku 1893 se angažoval při organizaci prvního mezinárodního matematického kongresu v USA, pracoval v Americké matematické společnosti (Vice-President 1898–1900, President 1901–1902). V letech 1899 až 1907 byl editorem časopisu Transactions of the American Mathematical Society.[4]

Mooreově přístupu k problematice pseudoinverzní matice věnoval velkou pozornost Adi Ben-Israel v práci *The Moore of the Moore-Penrose inverse* [BI] z roku 2002. Nalezneme v ní mírně přeformulovaný a modernizovaný abstrakt [M1] i přepracovanou partii o pseudoinverzních maticích z práce [M2].

---

[2] O této monografii pojednává zasvěcený článek Reinharda Siegmunda-Schulze nazvaný *Eliakim Hastings Moore's "General analysis"*, Archive for History of Exact Sciences 52(1998), 51–89. Problematice pseudoinverzních matic se však nevěnuje.

[3] Viz [M2], str. 197–209.

[4] Viz G. A. Bliss: *Eliakim Hastings Moore*, Bulletin of the American Mathematical Society 39(1933), 831–838, G. A. Bliss: *The scientific work of Eliakim Hastings Moore*, ibid. 40(1934), 501–514, G. A. Bliss, L. E. Dickson: *Biographical memoir of Eliakim Hastings Moore, 1862–1932*, Biographical Memoirs, National Academy of Sciences 17(1937), 83–102, K. H. Parshall: *Eliakim Hastings Moore and the founding of a mathematical community in America, 1892–1902*, Annals of Science 41(1984), 313–333, přetištěno in P. Duren et al. (eds.): *A Century of Mathematics in America II*, AMS, Providence, 1989, 155–175.

John von Neumann

John von Neumann (1903–1957) publikoval roku 1936 práci *On regular rings* [N], ve které se rovněž objevila myšlenka pseudoinverze. Vyšetřoval asociativní, ne nutně komutativní okruhy s jednotkovým prvkem, v nichž ke každému prvku a existuje prvek x, pro který je $axa = a$.

Yuan-Yung Tseng

V roce 1949 zavedl čínský matematik Yuan-Yung Tseng (1904–?) v pracích *Obobščennye obratnye neograničennych operatorov meždu dvumja unitarnymi prostranstvami* [T1] a *Svojstva i klassifikacija obobščennych obratnych zamknutych operatorov* [T2] zobecněné inverzní operátory v Hilbertově prostoru. Článek [T1] zahájil těmito slovy:

Důležitá vyšetřování klasických inverzí omezených nekonečných matic provedli zejména O. Toeplitz a G. Julia. Byl to však E. H. Moore, kdo jako první zavedl v explicitním tvaru pojem zobecněné inverze a rozvinul obšírnou teorii, kterou doplnili R. W. Barnard pro modulární matice a Y. K. Wong pro některé třídy nemodulárních matic.

Všechny tyto matice jsou speciálními případy uzavřených operátorů. ... ([T1], str. 431)

Články [T1] a [T2] neměly velkou odezvu. Přesto se Tseng roku 1956 ještě k problematice pseudoinverze vrátil v článku *Virtual'nye rešenija i obščie obraščenija* [T3].

Tseng se inspiroval myšlenkami E. H. Moorea. Na chicagské univerzitě totiž sepsal pod vedením R. W. Barnarda disertační práci *The Characteristic Value Problem of Hermitian Functional Operations in a Non-Hilbertian Space* a roku 1933 ji tam (již po Mooreově smrti) obhájil.

Arne Bjerhammar

K myšlence zavést „inverzní matice“ i k obdélníkovým maticím dospěl roku 1951 (nezávisle na Mooreovi, von Neumannovi i Tsengovi) švédský geodet a matematik Arne Bjerhammar (1917–2011) v práci *Rectangular reciprocal matrices, with special reference to geodetic calculations* [B1] zveřejněné v časopisu Bulletin Géodésique.[5] Jeho motivací bylo vyhodnocování údajů, které byly získány z pozorování, pomocí metody nejmenších čtverců. Úspěšně tak navázal na matematiky, kteří v obdobných souvislostech využili maticový počet.

Bjerhammarova práce [B1] byla výtahem z delšího textu nazvaného *Application of calculus of matrices to method of least squares, with special reference to geodetic calculations* [B2], který vyšel ve stejném roce v časopisu Královského technologického institutu ve Stockholmu. V jejím úvodu je napsáno:

[5] Výstižně o ní referoval George Elmer Forsythe (1917–1972) v časopisu Mathematical Reviews.

... it will be shown how a special type of matrices, which will be defined below, can be used as an expedient which simplifies the treatment of problems associated with the method of least squares. ([B1], str. 188)

Bjerhammar zavedl pseudoinverzní matice pro obdélníkové matice, které mají maximální hodnost. Pro obdélníkovou matici A typu $n \times m$ hodnosti m (tj. $m < n$) zavedl „inverzní“ matici A^- typu $m \times n$ pomocí matice B typu $n \times (n-m)$, která je zvolena tak, aby bloková matice $(A|B)$ byla regulární. Potom je matice A^- typu $m \times n$ utvořena z prvních n řádků matice $(A|B)^{-1}$. Zřejmě je $A^-A = E$.

Je-li soustava lineárních rovnic $Ax = b$ řešitelná, je její jediné řešení dáno vzorcem $x^T = A^-b^T$.

Pro obdélníkovou matici A typu $n \times m$ hodnosti n (tj. $n < m$) definoval „inverzní“ matici A^- typu $m \times n$ rovností $A^- = [(A^T)^-]^T$.

Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic $Ax = b$ je množinou všech vektorů $A^-b^T + (AA^- - E)y^T$, kde y probíhá všechny vektory příslušného prostoru.

Bjerhammar se problematikou pseudoinverzních matic zabýval i později. Svědčí o tom jeho kniha *Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses* [B3] z roku 1973, z níž byla o dva roky později stať *Generalized matrix inverses* [B4] přetištěna ve 14. svazku série *Methoden und Verfahren der mathematischen Physik.* Mimo jiné zde uvedl různé typy definic pseudoinverzní matice (Moore, Penrose, Bjerhammar), prezentoval postupy jejich výpočtu a některé aplikace.

Arne Bjerhammar byl řadu let profesorem Královského technologického institutu ve Stockholmu. Je autorem asi dvou stovek prací, několika učebních textů a řady výzkumných zpráv. Zabýval se širokým spektrem geodetických problémů (elektrooptické měření vzdálenosti, tvar Země, gravitační pole Země, gravitační anomálie, Bjerhammarova sféra), při jejichž řešení často aplikoval statistické metody a využíval maticový počet. Dosáhl řady významných ocenění.

Roger Penrose a Richard Rado

Podstatně větší pozornost začala být pseudoinverzním maticím věnována až po zveřejnění výsledků Rogera Penrose, který roku 1955 v článku *A generalised inverse for matrices* [P1] zavedl pojem pseudoinverzní matice ke komplexní, obecně obdélníkové matici a o rok později v práci *On best approximate solutions of linear matrix equations* [P2] studoval pojem přibližného řešení.

Penrose znal Bjerhammarovu práci [B1], citoval ji ve svých článcích [P1] a [P2]. O Mooreových výsledcích zpočátku nevěděl.[6] Svůj článek [P1] zahájil těmito slovy:

[6] Práce [P1] byla referována v časopisu Zentralblatt für Mathematik, kde F. W. Ponting poukázal na Mooreovu knihu *General Analysis* [M2] z roku 1935 i na následnou krátkou Radoovu poznámku *Note on generalized inverses of matrices* [R] – viz dále. V časopisu Mathematical Reviews připomněla Olga Taussky-Todd (1906–1995) v referátu o práci [P1] ještě výše zmíněný von Neumannův článek [N] z roku 1936.

This paper describes a generalization of the inverse of a non-singular matrix, as the unique solution of a certain set of equations. This generalized inverse exists for any (possibly rectangular) matrix whatsoever with complex elements. ([P1], str. 406)

V první větě uvedl výsledek, který popisuje Mooreovu-Penroseovu pseudoinverzní matici v té podobě, jak ji známe dnes:

The four equations $AXA = A$, $XAX = X$, $(AX)^* = AX$, $(XA)^* = XA$, *have a unique solution for any* A. ([P1], str. 406)

Takovou matici X označil symbolem A^+, nazval ji *generalized inverse of A* a uvedl řadu jejích vlastností. Například vztahy $(A^+)^+ = A$, $A^{*+} = A^{+*}$ a rovnost $(UAV)^+ = V^*A^+U^*$, kde U, V jsou unitární matice.

Ve druhé větě ukázal, že nutnou a postačující podmínkou řešitelnosti maticové rovnice $AXB = C$ je rovnost $AA^+CB^+B = C$; obecné řešení je pak dáno vzorcem $X = A^+CB^+ + Y - A^+AYBB^+$, kde Y probíhá všechny matice příslušného typu.

Obecné řešení soustavy lineárních rovnic $Ax = c$ je tedy $A^+c^T + (E - A^+A)y^T$, kde y probíhá všechny vektory příslušného prostoru.

Penrose rovněž formuloval nutnou a postačující podmínku pro řešení soustavy maticových rovnic $AX = C$, $XB = D$: řešitelnost obou maticových rovnic a rovnost $AD = CB$.

Roku 1956 reagoval na Penroseovu práci [P1] Richard Rado (1906–1989) v článku *Note on generalized inverses of matrices* [R]. Poukázal na ekvivalenci Mooreovy a Penroseovy definice, citoval Mooreovu monografii [M2] a Penroseův článek [P1].

The purpose of this note is to point out that this operation, defined in a slightly different form but easily shown to lead to the same matrix $a^\dagger$, *has already been introduced in 1920 and systematically investigated by E. H. Moore* (2). *There Moore has made important applications of his 'general reciprocal' of a matrix.* ([R], str. 600)

Upozornil též na následující zajímavou skutečnost.

Moore proves his Theorem 2 in the more general case when F *is a division ring possessing certain properties. Penrose has informed the author that he has extended his work to a much wider class of rings. The proof of Theorem 2 given above remains valid, without any change, if the matrices have elements in any division ring which possesses an involutory anti-isomorphism* $\lambda \to \overline{\lambda}$ *such that* $\lambda_1\overline{\lambda_1} + \lambda_2\overline{\lambda_2} + \cdots + \lambda_m\overline{\lambda_m} = 0$ *implies* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. ([R], str. 601)

V článku [P2] se Penrose odvolal na svoji předchozí práci [P1] a připomněl Mooreův abstrakt [M1], na který ho upozornil Rado svým příspěvkem [R].

Zavedl pojem přibližného řešení a dokázal větu o řešení maticové rovnice.

Definition. I shall say that X_0 *is a best approximate solution of the equation* $f(X) = G$ *if for all* X, *either*

(i) $||f(X) - G|| > ||f(X_0) - G||$,

or (ii) $||f(X) - G|| = ||f(X_0) - G||$ *and* $||X|| \geq ||X_0||$.

Theorem. A^+B is the unique best approximate solution of the equation $AX = B$. ([P2], str. 17)

Ukázal, že A^+BC^+ je přibližným řešení maticové rovnice $AXC = B$, a podal dvě metody výpočtu matice A^+ v případě, kdy jsou matice A^*A a AA^* singulární (je-li A^*A regulární, je $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$).

Roger Penrose (nar. 1931) je anglický matematik a fyzik. Studoval na univerzitě v Cambridgi, kde roku 1957 získal doktorát z matematiky (algebraická geometrie). Pak ho však zaujala teoretická fyzika (zejména obecná relativita, astrofyzika, kosmologie).[7] Je autorem či spoluautorem mnoha prací a řady inspirativních knih: *Spinors and Space-Time I., II.* (s Wolfgangem Rindlerem (nar. 1924), Cambridge, 1984, 1986), *The Emperor's New Mind. Concerning Computers, Minds and the Laws of Physics* (Oxford, 1989), *Shadows of the Mind. A Search for the Missing Science of Consciousness* (Oxford, 1994), *The Nature of Space and Time* (se Stephenem W. Hawkingem (nar. 1942)[8], Princeton, 1996), *The Large, the Small and the Human Mind* (Cambridge, 1997), *The Road to Reality. A Complete Guide to the Laws of the Universe* (London, 2004), *Cycles of Time. An Extraordinary New View of the Universe* (London, 2010).[9] Nedávno vyšly v šesti svazcích jeho práce pod názvem *Collected Works* (Oxford, 2011). Získal velkou řadu různých ocenění. Populární je tzv. *Penroseova dlažba* – neperiodické dláždění nekonečné roviny vytvořené dlaždicemi konečně mnoha typů.

Thomas Nall Eden Greville

V letech 1957 až 1960 publikoval čtyři články o pseudoinverzních maticích k libovolným obdélníkovým maticím americký matematik Thomas N. E. Greville (1910–1998). Vyšel z Mooreova pojetí.

V článku *The pseudoinverse of a rectangular or singular matrix and its application to the solution of systems of linear equations* [G1] užil pseudoinverzní matici k nalezení přibližného řešení (exaktně neřešitelné) soustavy lineárních rovnic, a rozšířil tak Bjerhammarovy výsledky. Ve stejně nazvané práci [G2] prezentoval podrobnější výklad doplněný konkrétním číselným příkladem.

Elementární výklad o aplikacích pseudoinverzních matic ve statistice (včetně numerických příkladů) podal 29. prosince 1958 na 118. výroční schůzi Americké statistické společnosti v Chicagu (viz *The pseudoinverse of a rectangular matrix and its statistical applications* [G3]).

Na tuto problematiku ještě navázal v práci *Some applications of the pseudoinverse of a matrix* [G4]. Nejprve však stručně a výstižně uvedl konstruktivní definici pseudoinverzní matice:

---

[7] Doporučujeme pozornosti následující text: Oscar Garcia-Prada: *Inteview with Sir Roger Penrose*, Newsletter of the European Mathematical Society 38(2000), 17–21, 39(2001), 12–17.

[8] Penrose byl jeho učitelem.

[9] V českém překladu máme tyto knihy: *Makrosvět, mikrosvět a lidská mysl*, Mladá fronta, Praha, 1999, *Povaha prostoru a času*, Academia, Praha, 2000, *Cykly času. Nový pozoruhodný pohled na vesmír*, Dokořán, Argo, Praha, 2013.

An $m \times n$ matrix A of rank $r > 0$ can be expressed as a product

$$A = BC,$$

where B is $m \times r$ and C is $r \times n$, and both are of rank r. Then the pseudoinverse of A is given by

$$A^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T,$$

where the superscript T denotes the transpose. To complete the definition, we define the pseudoinverse of a zero matrix as equal to its transpose. ([G4], str. 15)

Pseudoinverzní matice využil při rekurzivní konstrukci ortogonálních polynomů a při výpočtu koeficientů multilineární regrese. Uvedl též rekurzivní algoritmus výpočtu pseudoinverzní matice.

Závěr

Zatímco Moore využil pseudoinverzní matici k popisu řešení *řešitelné* soustavy lineárních rovnic s obdélníkovou nebo čtvercovou singulární maticí, Bjerhammar, Tseng i Penrose využili pseudoinverzní matice k nalezení přibližného řešení *neřešitelné* soustavy. K popularizaci tohoto pojmu, jeho všestrannému využití k rozvoji výpočetních metod, podstatně přispěl právě Greville.

První monografie věnované pseudoinverzním maticím vyšly v šedesátých letech 20. století. Jednou z nich byla kniha Thomase L. Boulliona a Patricka L. Odella *An Introduction to the Theory of Generalized Matrix Invertibility* [BO1] z roku 1966. Stejní autoři editovali o dva roky později konferenční sborník *Theory and Application of Generalized Inverses of Matrices* (viz [Re]) a roku 1971 vydali monografii *Generalized Inverse Matrices* [BO2].

Z počátku sedmdesátých let je monografie *Generalized Inverse of Matrices and its Applications* [RM], kterou sepsali Calyampudi Radhakrishna Rao a Sujit Kumar Mitra. Velkou pozornost pseudoinverzním maticím věnovali Charles L. Lawson a Richard J. Hanson v knize *Solving Least Squares Problems* [LH] z roku 1974 (další vydání: 1995, ruský překlad: 1986).

Obecnější přístup k problematice pseudoinverze je prezentován například v monografii Charlese W. Groetscha *Generalized Inverses of Linear Operators. Representation and Approximation* [Gr][10] z roku 1977 a v knize *Generalized Inverses of Linear Transformation* [CM], kterou roku 1979 publikovali Stephen L. Campbell a Carl D. Meyer (další vydání: 1991, 2009). Relativně novou monografií (využívá MATLAB) je titul *Matrix Theory. From Generalized Inverses to Jordan Form* [PO] z roku 2007, kterou sepsali Robert Piziak a Patrick L. Odell.[11]

Poznamenejme, že bohatá bibliografická informace o pseudoinverzních maticích je v knize *Generalized Inverses and Applications* [Na] z roku 1976, jejímž autorem je Mohammed Zuhair Nashed. Z hlediska vývoje problematiky pseudoinverze jsou zajímavé zejména práce [BIC], [B4], [DW], [Re], [Ro1] a [Ro2].

[10] Mottem knihy je výrok C. G. J. Jacobiho: *You must always invert.*

[11] V češtině máme skriptum *Pseudoinverzní matice* Olgy Pokorné (SPN, Praha, 1978).

Literatura

[B] Bečvář J., *Lineární algebra*, Matfyzpress, 2000, další vydání 2002, 2005, 2010.

[BI] Ben-Israel A., *The Moore of the Moore-Penrose inverse*, ELA, The Electronic Journal of Linear Algebra **9** (2002), 150–157.

[BIG] Ben-Israel A., Greville T. N. E., *Generalized Inverses. Theory and Applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1974, 2. vydání: Springer, New York, 2003.

[BIC] Ben-Israel A., Charnes A., *Contributions to the theory of generalized inverses*, SIAM Journal on Applied Mathematics **11** (1963), 667–699.

[B1] Bjerhammar A., *Rectangular reciprocal matrices, with special reference to geodetic calculations*, Bulletin Géodésique, 1951, 188–220.

[B2] Bjerhammar A., *Application of calculus of matrices to method of least squares, with special reference to geodetic calculations*, Transactions of the Royal Institute of Technology (Stockholm) **49** (1951), 1–86.

[B3] Bjerhammar A., *Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses*, Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam, London, New York, 1973.

[B4] Bjerhammar A., *Generalized matrix inverses*, in Mathematical Geodesy III (International Summer School Math. Methods Phys. Geodesy, Ramsau, 1973), Methoden und Verfahren der mathematischen Physik 14, Bibliographisches Institute, Mannheim, 1975, 47–81.

[BO1] Boullion T. L., Odell P. L., *An Introduction to the Theory of Generalized Matrix Invertibility*, Texas Center for Research, 1966.

[BO2] Boullion T. L., Odell P. L., *Generalized Inverse Matrices*, Wiley-Interscience, New York, 1971.

[CM] Campbell S. L., Meyer C. D., *Generalized Inverses of Linear Transformations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2009 (poprvé publikováno: Pitman Publishing Limited, London, 1979, podruhé: Dover Publications, Inc., 1991).

[DW] Desoer C. A., Whalen B. H., *A note on pseudoinverses*, SIAM Journal on Applied Mathematics **11** (1963), 442–447.

[G1] Greville T. N. E., *The pseudoinverse of a rectangular or singular matrix and its application to the solution of systems of linear equations*, SIAM Newsletter **5** (1957), n. 2, 3–6.

[G2] Greville T. N. E., *The pseudoinverse of a rectangular or singular matrix and its application to the solution of systems of linear equations*, SIAM Review **1** (1959), 38–43.

[G3] Greville T. N. E., *The pseudoinverse of a rectangular matrix and its statistical applications*, Proceedings of the Social Statistics Section, American Statistical Association, 1958, 116–121.

[G4] Greville T. N. E., *Some applications of the pseudoinverse of a matrix*, SIAM Review **2** (1960), 15–22.

[Gr] Groetsch C. W., *Generalized Inverses of Linear Operators. Representation and Approximation*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1977.

[LH] Lawson C. L., Hanson R. J., *Solving Least Squares Problems*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1974, další vydání: 1995, ruský překlad: 1986.

[M1] Moore E. H., [*On the reciprocal of the general algebraic matrix*], Bulletin of the American Mathematical Society **26** (1920), 394–395.

[M2] Moore E. H., *General Analysis I.*, Memoirs of the American Philosophical Society 1, The American Philosophical Society, Philadelphia, 1935.

[Na] Nashed M. Z., *Generalized Inverses and Applications*, Academic Press, New York, 1976.

[N] von Neumann J., *On regular rings*, Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America **22** (1936), 707–713.

[P1] Penrose R., *A generalized inverse for matrices*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **51** (1955), 406–413.

[P2] Penrose R., *On best approximate solutions of linear matrix equations*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **52** (1956), 17–19.

[PO] Piziak R., Odell P. L., *Matrix Theory. From Generalized Inverses to Jordan Form*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, 2007.

[R] Rado R., *Note on generalized inverses of matrices*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **52** (1956), 600–601.

[RM] Rao C. R., Mitra S. K., *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto, 1971.

[Re] Reid W. T., *Generalized inverses of differential and integral operators*, in Boullion T. L., Odell P. L. (eds.): *Theory and Application of Generalized Inverses of Matrices*, Symposium Proceedings, Lubbock, March 1968, Texas Tech University, Department of Mathematics, 1971.

[Ro1] Robinson D. W., *Gauss and generalized inverses*, Historia Mathematica **7** (1980), 118–125.

[Ro2] Robinson D. W., *On the generalized inverse of an arbitrary linear transformation*, The American Mathematical Monthly **69** (1962), 412–416.

[T1] Tseng Yuan-Yung, *Obobščennye obratnye neograničennych operatorov meždu dvumja unitarnymi prostranstvami*, Doklady Akademii Nauk SSSR **67** (1949, n. 3), 431–434, v anglickém překladu: *Generalized inverses of unbounded operators between two unitary spaces.*

[T2] Tseng Yuan-Yung, *Svojstva i klassifikacija obobščennych obratnych zamknutych operatorov*, Doklady Akademii Nauk SSSR **67** (1949, n. 4), 607–610, v anglickém překladu: *Properties and classification of generalized inverses of closed operators.*

[T3] Tseng Yuan-Yung, *Virtual'nye rešenija i obščie obraščenija*, Uspechi matematičeskich nauk **11** (1956), 6(72), 213–215, v anglickém překladu: *Virtual solutions and general inversions.*

Poděkovaní: Děkuji Martině Bečvářové za trpělivost, kterou se mnou měla, má a snad i nadále míti bude.

Adresa

Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8 – Karlín
e-mail: *becvar@karlin.mff.cuni.cz*

ZKOUŠKY UČITELSKÉ ZPŮSOBILOSTI

(PŘED NĚMECKOU ZKUŠEBNÍ KOMISÍ)

MARTINA BEČVÁŘOVÁ

Abstract: In this article we want to draw attention to the special examinations so called *Prüfungskomission für das Lehramt an Mittelschulen* [Examinations for Teaching at Secondary School] which were passed in Prague before the Imperial German Commission in the second half of the 19th century and the first half of the 20th century and which qualified the candidates for their appointments as German high school mathematics teachers. We will describe the fundamental archival documents which give us the complex information about the structure, course, content and difficulties of these examinations. One typical example and complete statistics of the examinations in mathematics will be presented.

1 Stručný úvod

Po první světové válce vstoupilo na Německou univerzitu v Praze mnoho demobilizovaných vojáků, a tak se výrazně zvýšil věkový průměr studujících. Začala také narůstat délka jejich studia, objevovalo se častější odkládání zkoušek učitelské způsobbilosti a rigorózních zkoušek.[1] Jednak to způsoboval nárůst problémů s hmotným zabezpečením studentů (mnozí museli při studiu pracovat),[2] jednak pravidla pro řádné a mimořádné studium. Řádně zapsaným studentem mohl být pouze absolvent gymnázia. Absolventi reálek nebo lyceí mohli být zapsáni jen jako mimořádní studenti a v průběhu studia si museli doplnit maturitní zkoušku z latiny, což právě vedlo k prodlužování délky jejich studia,[3] nebo museli požádat o její prominutí.[4]

Od konce 20. let 20. století došlo na Přírodovědecké fakultě Německé univerzity v Praze k mírnému nárůstu počtu řádných studentů[5] a k výraznému nárůstu počtu mimořádných posluchačů.[6] Patřili k nim především absolventi reálek,[7] kteří deklarovali, že chtějí získat oprávnění k výuce na reálkách, průmyslových, zemědělských a obchodních školách, a proto žádali, aby nemuseli prokazovat znalost latiny, resp. absolutorium gymnázia.

---

[1] Neúměrné prodlužování délky studia bylo ve 30. letech 20. století předmětem kritiky „neakademické“ obce.

[2] Situaci zhoršila i hospodářská krize ve 30. letech 20. století, která dolehla na studenty, mladé absolventy, asistenty a vědecké pracovníky, neboť bylo pozastaveno jmenování nových profesorů, soukromých docentů a vědeckých pracovníků.

[3] Mnozí mimořádní studenti se po vykonání „dodatečných maturitních zkoušek“ stali řádnými studenty (obvykle po dvou až čtyřech semestrech). Viz katalogy posluchačů Přírodovědecké fakulty Německé univerzity v Praze, Archiv Univerzity Karlovy v Praze.

[4] Nejčastější délka studia před první světovou válkou byla 8 semestrů. Viz katalogy posluchačů Filozofické fakulty Německé univerzity v Praze, Archiv Univerzity Karlovy v Praze. Ve 20. a 30. letech 20. století se obvyklá délka studia pohybovala okolo 10 semestrů, poměrně často se objevovala i délka 12 až 14 semestrů, v nejednom případě i 15 semestrů, ve dvou případech dokonce 18, resp. 19 semestrů. Viz katalogy posluchačů Přírodovědecké fakulty Německé univerzity v Praze, Archiv Univerzity Karlovy v Praze.

[5] Nárůst přírodovědců byl způsoben dynamickým rozvojem přírodních věd a jejich aplikací.

[6] Viz katalogy posluchačů Přírodovědecké fakulty Německé univerzity v Praze, Archiv Univerzity Karlovy v Praze.

[7] Absolventi reálek měli ke studiu přírodních věd velmi dobrou středoškolskou průpravu.

Až do roku 1930 se „ukončování studia“ řídilo podle upravených a léty prověřených „rakouských“ předpisů o zkouškách učitelské způsobilosti[8] a rigorózních zkouškách. Kolokvia z předepsaného počtu přednášek a seminářů, v nichž vyučující potvrzoval, že posluchač přednášky či semináře navštěvoval a porozuměl jejich obsahu, musel skládat jen ten, kdo žádal osvobození od placení školních poplatků nebo pobíral státní stipendium. Budoucí řádný středoškolský profesor měl po pátém semestru složit filozoficko-pedagogické kolokvium[9] a po absolvování nejméně osmi semestrů měl vykonat zkoušky učitelské způsobilosti z každého aprobačního předmětu. Poznamenejme, že je skládali především sociálně slabší studenti,[10] kteří upínali naděje k prestižnímu a relativně dobře placenému místu středoškolského profesora.[11]

Pokud se posluchač rozhodl pro čistě vědeckou dráhu, nemusel během studia skládat žádnou dílčí zkoušku, nemusel absolvovat žádné kolokvium.[12] Po absolvování nejméně osmi semestrů mohl předložit doktorskou práci a podrobit se hlavní a vedlejší rigorózní zkoušce.[13] Vzhledem k omezenému počtu míst na vysokých školách a ve vědeckých institucích obvykle i tito posluchači skládali zkoušky učitelské způsobilosti.[14]

Mnozí posluchači však neskládali ani zkoušky učitelské způsobilosti ani rigorózní zkoušky. Jednak to byli dobře situovaní studenti, kteří přírodní vědy studovali jen ze svého zájmu a studium nespojovali s žádným svým dalším působením, jednak to byli

---

[8] Poslední velké úpravy pravidel pro konání zkoušek učitelské způsobilosti proběhly v letech 1897 a 1911. Jejich organizace a struktura odpovídala obvyklým poměrům na rakouských a německých univerzitách. Zkouška se podle úpravy z roku 1897 skládala z písemné domácí práce, písemné školní práce (tzv. klauzurní práce) a ústní zkoušky z každého aprobačního předmětu. Za jednu odbornou domácí práci mohla být uznána kvalitní seminární, laboratorní nebo časopisecká práce. Klauzurní písemná práce z hlavního aprobačního předmětu byla osmihodinová, z vedlejšího předmětu čtyřhodinová. Ústní zkouška měla být v délce třiceti minut až jedné hodiny. Kandidát profesury po absolvování povinného minimálního počtu semestrů požádal státní zkušební komisi o zadání tématu pro domácí práci, na jejíž vypracování měl obvykle šest týdnů. Po jejím příznivém posouzení se mohl přihlásit k písemné zkoušce, jejíž kladné zvládnutí bylo podmínkou k připuštění k závěrečné ústní zkoušce. Pro výuku matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie na středních školách bylo možno do délky studia započítat i dva roky studia na technice. Speciální pravidla byla stanovena pro absolventy reálek, kteří mohli získat aprobaci jen ve skupině tzv. matematicko-přírodovědných předmětů, pokud si nedoplnili maturitní zkoušku z latiny. V roce 1911 byl přijat nový zkušební řád, byly zavedeny jednotné zkušební komise pro všechny typy středních škol, sjednoceny aprobace pro různé typy středních škol a upraveny požadavky na studium i zkoušky z tzv. neaprobačních předmětů (filozofie, pedagogika, historie, psychologie, školní hygiena, vyučovací jazyk). Zachován však byl průběh zkoušky z roku 1897. O zkouškách učitelské způsobilosti a kariéře středoškolských profesorů matematiky viz M. Bečvářová: *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Matfyzpress, Praha, 2008.

[9] Původní náročná zkouška doplněná povinnou domácí prací z pedagogiky a psychologie byla v roce 1911 nahrazena nepříliš náročnou kolokviální zkouškou.

[10] Většina posluchačů matematiky pocházela ze střední vrstvy; mezi povoláními otců se nejčastěji objevovali úředníci, učitelé, právníci, lékaři a obchodníci. Viz katalogy posluchačů Přírodovědecké fakulty Německé univerzity v Praze, Archiv Univerzity Karlovy v Praze.

[11] Zkoušky nebyly ani formální, ani jednoduché. Stávalo se, že kandidát neuspěl a musel je opakovat nebo získal jen částečnou aprobaci; tu si mohl později dalšími zkouškami doplnit (další aprobační předmět) či rozšířit (z nižšího stupně střední školy na celou střední školu).

[12] Bylo požadováno pouze formální vysvědčení o řádném absolvování osmi semestrů. Rigorózní zkoušky bylo možnost skládat v libovolném pořadí. Jejich absolvování nebyl obvykle problém, daleko obtížnější bylo sepsání a obhájení doktorské práce.

[13] Doktorské řízení se řídilo pravidly z roku 1899, která byla upravena v letech 1918 a 1936.

[14] Poznamenejme, že touto cestou se vydali budoucí vysokoškolští docenti a profesoři matematiky a fyziky Karl Bobek, Walter Fröhlich, Reinhold Fürth, Walter Glaser, Anton Grünwald, Josef Grünwald, Paul Kuhn, Ernst Lammel, Václav Láska, Heinrich Löwig, Karl Löwner, Karl Rother, Alfred Rössler, Kurt Sitte a Otto Varga, kteří složili jak zkoušky učitelské způsobilosti, tak rigorózní zkoušky, ale na středních školách buď vůbec nepůsobili, nebo působili jen krátce.

studenti, kteří se spokojili s nejistým místem suplujících středoškolských profesorů, na něž se požadovalo pouze absolvování osmi semestrů univerzitní výuky.

Výraznější změna nastala na počátku 30. let, kdy byla ukončena „konsolidace" československého středního školství a současně poklesla poptávka po nových učitelských silách. V roce 1930 vešel v platnost nový studijní řád, který zavedl dvě státní zkoušky, první nejdříve po čtvrtém semestru a druhou nejdříve po osmém semestru. Do první státní zkoušky musel posluchač absolvovat jen minimum povinných předmětů, mohl si zapisovat libovolné předměty podle svého zájmu a ve zcela libovolném pořadí. Zkouška byla chápána jako přirozená bariéra pro méně nadané a motivované studenty. Každý kandidát středoškolské profesury[15] při ní měl prokázat základní znalosti ze zvolených aprobačních předmětů (požadovalo se dokonalé zvládnutí látky obsažené ve středoškolském kurzu včetně hlubších souvislostí)[16] a dobrou znalost vyučovacího jazyka.[17] Při druhé státní zkoušce měl prokázat odbornou způsobilost k výuce na středních školách a nadhled nad vyučovanou látkou. Musel také předložit vysvědčení o kolokviích z předepsaných předmětů (odborných, pedagogických a metodických seminářů).[18] Struktura druhé státní zkoušky odpovídala struktuře původní zkoušky učitelské způsobilosti.

2 Základní informace o archivních materiálech

Zkouškám učitelské způsobilosti z matematiky ve spojení s dalším aprobačním předmětem, které se konaly před německou zkušební komisí při Německé univerzitě v Praze, nebyla do současné doby věnována téměř žádná pozornost.[19] Jednak asi proto, že se jejich úspěšní absolventi většinou stali „pouze" středoškolskými profesory a až na výjimky nezasáhli do vývoje matematiky,[20] jednak proto, že toto téma je náročné na čas a vyžaduje dlouhodobou mravenčí práci.[21] Další příčinou může být i všeobecně zakořeněné nesprávné povědomí, že z období 1920 až 1939 (resp. 1882 až 1945) se mnoho materiálů z německého prostředí nezachovalo,[22] a také fakt, že „německá tematika" se v našich zemích v minulosti netěšila z mnoha důvodů příliš velké oblibě.

V následujícím textu řádcích se pokusíme představit základní prameny, charakterizovat rozsah jejich zachování a jejich obsah, analyzovat informace, které poskytují, a nastínit možnosti jejich dalšího využití.

Mezi základní materiály dochované v Archivu Univerzity Karlovy v Praze, které dokumentují zkoušky učitelské způsobilosti, patří katalogy německé zkušební komise (*Ka-*

[15] Opět byly s ohledem na potřeby středních škol pevně stanoveny kombinace aprobačních předmětů. Matematika byla obvykle studována v kombinaci s fyzikou, deskriptivní geometrií, chemií, zeměpisem, přírodopisem (biologií), filozofií a filozofickou propedeutikou, kreslením a modelováním.
[16] Tyto požadavky měly vliv i na postupné vytváření základních studijních a učebních textů. Obvykle je podle přednášek zapisovali sami studenti. Před tiskem nebo rozmnožováním je překontrolovali pedagogové. Z dnešního hlediska se nejednalo o klasická skripta či učebnice. Poznamenejme, že výše uvedené texty se pro výuku matematiky na Německé univerzitě v Praze téměř neobjevovaly, neboť studenti měli k dispozici dostatečné množství kvalitních německy psaných monografií a učebnic.
[17] Z každého aprobačního předmětu se skládala dvouhodinová ústní zkouška, z vyučovacího jazyka se skládala písemná zkouška (diktát a slohová práce) a ústní zkouška (znalost vyučovacího jazyka, literatury a historie).
[18] Vyžadována byla kolokviální zkouška z pedagogiky a metodiky vyučování, kterou mohl uchazeč skládat až po absolvování jednosemestrálního dvouhodinového semináře.
[19] Zkušební komise sestávala z vysokoškolských profesorů.
[20] Pouze několika výjimkám byla již věnována hlubší pozornost při zpracování jejich životních osudů a díla v rámci diplomových prací nebo samostatných monografií (např. K. Bobek, H. Löwig, G. A. Pick).
[21] Je nutné prostudovat velké množství ručně psaných archivních materiálů, jejichž čitelnost není právě ideální.
[22] Tento fakt je sice obecně správný, ale ve vztahu ke zkouškám učitelské způsobilosti zcela mylný.

talog der Staatsprüfung),[23] evidenční listy jednotlivých uchazečů,[24] jejich osobní složky,[25] všeobecné rejstříky[26] a podací knihy.[27]

Katalogy kandidátů profesury jsou důležitým archivním zdrojem základních informací o průběhu zkoušek učitelské způsobilosti, o původu, sociálním složení a vyznání uchazečů.

Podle „starého“ zkušebního zákona byl každému posluchači věnován jeden list, který v úvodu poskytoval informace o školním roku a datu přihlášení ke zkoušce doplněné pořadovým číslem, pod nímž celé řízení probíhalo. Dále následovalo jméno a příjmení uchazeče, místo a datum jeho narození, místo trvalého bydliště, náboženské vyznání a zvolená aprobační skupina předmětů. Doplněny byly informace o maturitní zkoušce a kolokviálních vysvědčeních (filozofie, pedagogika, školní hygiena, proseamináře, semináře a laboratorní cvičení) a poznamenán jazyk, v němž se mělo konat zkušební řízení a v němž by měl uchazeč později vyučovat. Největší část listu dokumentovala vlastní průběh zkoušky. Nejprve byly uvedeny informace vztahující se k domácí práci (datum stanovení tématu a jméno zadavatele, termín odevzdání domácí práce, jméno oponenta, datum hodnocení a text hodnocení),[28] ke klauzurní práci (datum zkoušky, jméno hlavního examinátora a jeho hodnocení),[29] k ústní zkoušce (datum zkoušky, jméno hlavního examinátora a jeho hodnocení) a ke zkoušce z vyučovacího jazyka (datum zkoušky a hodnocení).[30] V závěru bylo uvedeno datum ukončení řízení, obdržená aprobace a zdůrazněn

[23] V Archivu Univerzity Karlovy v Praze se ve fondu Německá zkušební komise pro střední školy ze studovaného období dochovaly následující katalogy: *Katalog III, 33-1909/1910 až 119-1913/1914, 5-1931/1932 až 1931/1932*, kartón č. 311, *Protokoll IV, 1-1914/1915 až 59-1926/1927*, kartón č. 311, *Hauptkatalog V, 60-1926/1927 až 4-1931/1932*, kartón č. 312*, Katalog VI, Lehramtsprüfung, alte Ordnung 46-1931/1932 až 48-1934/1935*, kartón č. 312, *Katalog VII, Lehramtsprüfung, alte Ordnung 49-1934/1935 až 1-1940/1941*, kartón č. 312, *Katalog I, I. Staatsprüfung 1-1932/1933 až 96-1932/1933*, *1-1933/1934 až 63-1933/1934*, kartón č. 312, *Katalog II, I. Staatsprüfung 64-1933/1934 až 32-1935/1936*, kartón č. 313, *Katalog III, I. Staatsprüfung 33-1935/1936 až 26-1938/1939*, kartón č. 313, *Katalog IV, I. Staatsprüfung 27-1938/1939 až 4-1939/1940*, kartón č. 312*, Katalog I der Staatsprüfung begonnen aus 5./III. 1934 beutet 22./10. 1939, 1-1934 až 8-1939/1940*, kartón č. 314, *Katalog II über die II. Staatsprüfung, 9-1939/1940 až 7-1944/1945*, kartón č. 314.

[24] V Archivu Univerzity Karlovy v Praze se ve fondu Německá zkušební komise pro střední školy dochovaly evidenční listy některých uchazečů z let 1922/1933 až 1938/1939 (kartón č. 308).

[25] V Archivu Univerzity Karlovy v Praze se ve fondu Německá zkušební komise pro střední školy dochovaly osobní složky většiny uchazečů z let 1882 až 1945. Ve studovaném období 20. a 30. let 20. století podle starého zákona konalo zkoušku z matematiky v kombinaci s druhým aprobačním předmětem 257 uchazečů, pouze 13 osobních složek se nezachovalo. Podle nového zákona se uskutečnilo 80 zkoušek (I. a II. státní zkouška), pouze 3 osobní složky se nedochovaly.

[26] V Archivu Univerzity Karlovy v Praze se ve fondu Německá zkušební komise pro střední školy dochoval *Index 1882–1934* a *Index k protokolům německé zkušební komise II. stát. zkouška 1933–1943, I. stát. zkouška 1932–1940, I. stát. zkouška Sudety* (kartón č. 315).

[27] V Archivu Univerzity Karlovy v Praze se ve fondu Německá zkušební komise pro střední školy dochovaly podací protokoly *Gestions-Protokoll 1878–1885*, *Gestions-protokoll der Prüfungskommission für das Lehramt an Mittelschulen I.* (1886–1923), *Gestions Protokoll der Prüfungskommission für das Lehramt an Mittelschulen II.* (1923–1929), *Gestionsprotokoll der Prüfungskommission für das Lehramt an Mittelschulen III.* (1929–1935), *Korespondenz-Protokoll IV* (1935–1937), *Korespondenz-Protokoll 1938* a *Korespondenzprotokoll* (1941–1942), které dokládají administrativní proces spojený s konáním zkoušek učitelské způsobilosti a s prací státní zkušební komise (kartón č. 309).

[28] Nebylo uváděno znění otázek, pouze obor (např. matematika, kreslení, chemie apod.). Hodnocení bylo *approbiert*, resp. *repprobiert*, tj. práce přijata, resp. nepřijata.

[29] Poznamenejme, že mezi zkouškami z jednotlivých předmětů mohlo uplynout několik dnů i měsíců. Z katalogů víme, že v několika málo případech uplynulo i několik let.

[30] Poznamenejme, že se vyskytly případy, kdy studenti výborně uspěli u odborných částí zkoušky učitelské způsobilosti, ale neuspěli u zkoušky z vyučovacího jazyka (např. J. Krejzlih (Čech), A. Romhányi (Maďar)), která rozhodně nebyla formální záležitostí.

vyučovací jazyk, resp. byla připojena poznámka o reprobování neúspěšného kandidáta. Nechyběly ani údaje o výši poplatků a datu jejich úhrady.

Od roku 1932/1933 byly vedeny trojí oddělené katalogy – katalog pro I. státní zkoušku, katalog pro II. státní zkoušku a katalog pro studenty, kteří skládali zkoušku podle starého zákona. Struktura katalogu pro I. státní zkoušku byla téměř totožná se strukturou „starého“ katalogu. Jedinou novinkou bylo vymezení znění tří až pěti odborných okruhů, z nichž byl uchazeč při klauzurní a ústní zkoušce v jednotlivých aprobačních předmětech zkoušen.[31] Struktura katalogu pro II. státní zkoušku byla obdobná, proti starým katalogům navíc obsahovala jen informaci o vykonání I. státní zkoušky.

Osobní složky uchazečů jsou nejdůležitějším archivním zdrojem informací o průběhu, struktuře a náročnosti zkoušek učitelské způsobilosti. Uspořádány jsou abecedně ve fondu Německá zkušební komise pro střední školy. Každému posluchači je věnována jedna velká obálka formátu A4 nebo jedny desky. Osobní složky obvykle obsahují uchazečovu přihlášku ke zkoušce doplněnou žádostí o stanovení tématu domácí práce a termínu jejího odevzdání, seznamem předkládaných dokumentů (vysokoškolský index, kolokviální vysvědčení z předepsaných přednášek, seminářů a proseminářů, laboratorních cvičení),[32] životopisem uchazeče a případně i seznamem publikací. Přihláška byla podávána na oficiálním formuláři, kde byly požadovány následující údaje: jméno a příjmení, datum a místo narození, vyznání, místo středoškolského studia, základní informace o maturitní zkoušce (kdy, kde a s jakým výsledkem), stručný popis průběhu univerzitní přípravy (místo, obor, studijní jazyk, počet semestrů, soupis absolvovaných přednášek, informace o vypracování seminárních prací, hodnocení zkoušek z filozofie, psychologie, pedagogiky a školní hygieny).

Vlastní protokol se skládal z několika listů. První byl věnován hodnocení domácí práce, a to za každý aprobační předmět zvlášť. V jeho záhlaví bylo uvedeno jméno uchazeče, aprobační předmět a údaj, zda se jedná o hlavní nebo vedlejší aprobační předmět. Následoval název domácí práce, její hodnocení a slovní komentář oponenta, jehož délka závisela jen na jeho vůli a kvalitě předložené práce. V jiné části protokolu je uvedeno datum přidělení domácí práce, její téma, termín odevzdání, jméno zadavatele a jeho podpis. Byla-li jako domácí práce uznána nadstandardní seminární práce nebo doktorská disertace, byl tento údaj zapsán v poznámce a nebyla vyplňována část o stanovení tématu. Poznamenejme, že domácí práce nejsou obvykle součástí osobní složky, nejsou ani uloženy v Archivu Univerzity Karlovy v Praze. Pravděpodobně se kandidátům profesury vracely. Z názvu prací však vyplývá, že zkušební komise reagovala na vývoj matematických disciplín, proměňovala, rozšiřovala, resp. zužovala témata tak, aby co nejlépe vystihovala moderní vývojové trendy oboru.

Druhou částí protokolu byl list vztahující se ke klauzurní, tj. školní písemné práci, a to za každý aprobační předmět zvlášť. Obsahuje opět jméno uchazeče, aprobační předmět a údaj, zda se jedná o hlavní nebo vedlejší aprobační předmět. Dále bylo uvedeno datum konání zkoušky, datum opravy písemné práce, stručné slovní hodnocení průběhu zkoušky a byl připojen podpis hlavního examinátora. V jiné části protokolu byly uvedeny otázky (1 až 3), které byly vybrány hlavním examinátorem (obvykle několik dnů či dokonce

[31] U každého okruhu bylo poznamenáno hodnocení. Uchazeč mohl být reprobován z jednoho okruhu, více okruhů nebo celé zkoušky. Mohl být aprobován i při neúspěchu v jednom z okruhů; rozhodnutí bylo zcela v pravomoci zkušební komise.

[32] Předkládané dokumenty byly po vyřízení žádosti, tj. po zapsání kandidáta profesury do katalogu zkušební komise, vráceny uchazeči.

týdnů předem). Připojeno bylo datum stanovení otázek, jméno a podpis examinátora. Poznamenejme, že v některých osobních složkách se dochovaly kompletní klauzurní práce, které poskytují informace o nárocích na odbornou přípravu uchazeče (zpracování i nových témat z oboru), o nárocích na pedagogicko-didaktickou přípravu (způsob výkladu a prezentace látky), o nárocích na zvládnutí vyučovacího jazyka (znalost gramatiky, schopnost formulovat myšlenky písmem) a o nárocích na estetickou úroveň grafického projevu.

Třetí částí protokolu byl list vztahující se k ústní zkoušce. Obsahoval opět jméno uchazeče, aprobační předmět a údaj, zda se jedná o hlavní nebo vedlejší aprobační předmět. Dále byly zapsány 2 až 3 otázky pro každý aprobační předmět a uvedeno společné hodnocení, pokud uchazeč skládal ústní zkoušky ze všech aprobačních předmětů v jeden den, resp. zvlášť, pokud skládal ústní zkoušky z jednotlivých předmětů v různých dnech. Připojeny byly podpisy hlavních examinátorů a závěrečné rozhodnutí zkušební komise.

Evidenční listy jsou řazeny abecedně v jednom kartónu. Každému posluchači byl věnován jeden list, který obsahoval jeho jméno a příjmení, katalogové číslo, termín konání klauzurní a ústní zkoušky a stručnou informaci o průběhu všech částí (odevzdání a přijetí domácí práce a jméno oponenta, jméno hlavního zkušebního komisaře pro klauzurní a ústní zkoušku, jednoslovné hodnocení – *approbiert* nebo *repprobiert*, resp. jen A nebo R).

Poznamenejme, že osobní složky uchazečů a evidenční listy nejsou zachovány zdaleka pro všechny zkoušky učitelské způsobilosti z matematiky v kombinaci s dalším předmětem. Osobní složky jednotlivých uchazečů jsou někdy neúplné (některé části chybějí nebo jsou velmi stručné). Přesto je možno jejich studiem získat poměrně dobrý přehled o náročnosti a průběhu odborné i pedagogicko-didaktické přípravy budoucích středoškolských učitelů a z toho i vyplývající respekt tehdejší společnosti k náročnému učitelskému povolání.

3 Typický příklad

V roce 1920 absolvovala **Hilda Falk** (1897–1942), československá státní příslušnice německé národnosti a židovského vyznání, zkoušku učitelské způsobilosti před německou zkušební komisí v Praze. Na Přírodovědecké fakultě Německé univerzity v Praze studovala matematiku a fyziku pouze v zimním semestru 1920/1921, předchozích sedm semestrů byla posluchačkou Filozofické fakulty Německé univerzity v Praze.[33] Po absolutoriu zkoušek učitelské způsobilosti pracovala jako středoškolská profesorka matematiky a fyziky na středních školách v Praze. Dne 3. srpna 1942 byla transportem AAw jako „pouhé č. 277“ deportována do ghetta v Terezíně, dne 20. srpna 1942 byla pod č. 977 poslána do ghetta v Rize, kde byla téměř okamžitě zavražděna. Žádná její odborná matematická práce není dnes známa.

Dne 7. května 1920 H. Falk podala žádost o připuštění ke zkoušce učitelské způsobilosti, připojila životopis a požádala o stanovení témat domácích prací. Dne 12. května profesor Georg Alexander Pick stanovil téma domácí práce z matematiky *Aequiforme Infinitesimalgeometrie der Ebene* a profesor Philipp Frank téma domácí práce z fyziky *Der zweite Hauptsatz der Wärmelehre*. Německá zkušební komise dne

[33] Viz katalogy posluchačů Filozofické fakulty Německé univerzity v Praze, resp. Přírodovědecké fakulty Německé univerzity v Praze, Archiv Univerzity Karlovy v Praze.

16. května informovala uchazečku o tématech a termínu na vypracování domácích prací. Dne 11. října Ph. Frank opravil fyzikální práci a dne 28. října G. A. Pick opravil matematickou práci; obě byly hodnoceny kladně a bylo doporučeno pokračovat v započatém řízení.[34]

Dne 23. října G. A. Pick stanovil následující otázky pro klauzurní zkoušku z matematiky:

Integration der Differentialgleichung $d^3x/dx^3 + dy/dx = \cos x$.
Die Diskriminante einer algebraischen Gleichung, bzw. Form.

Dne 2. listopadu se H. Falk podrobila klauzurní zkoušce z matematiky a vypracovala písemné odpovědi na obě otázky (4, resp. 3 strany velkého formátu), které následující den zhodnotil G. A. Pick.

Není jasné, kdy Ph. Frank stanovil otázky pro klauzurní zkoušku z fyziky, jejich znění se však dochovalo:[35]

Theorie der schwingenden Saiten, insbesondere mit Anwendung der Fourierschen Reihe.
Wie erklärt man in der Mittelschule den zweiten Hauptsatz der Wärmelehre?

Dne 3. listopadu se H. Falk podrobila klauzurní zkoušce z fyziky a vypracovala písemné odpovědi na obě otázky (5, resp. 4 strany velkého formátu), které dne 5. listopadu zhodnotil Ph. Frank.

Obě klauzurní zkoušky byly správně, pečlivě, vzorně a krasopisně vypracovány, neobsahovaly ani chyby odborné ani chyby gramatické, a proto byly hodnoceny kladně. Oba hlavní examinátoři doporučili, aby se uchazečka podrobila ústní zkoušce, která se konala dne 5. listopadu. Z matematiky jí byly předloženy tyto otázky:

Haupttreiber, Krümmung und Torsion räumlicher Kurven.
Frenel'sche Formeln.
Flächenkrümmung.
Sätze von Euler und Meusnier.
Zahlenreihen, unbedingte und bedingte Konvergenz.
Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Je zřejmé, že se vztahovaly k tématům domácí i klauzurní práce, pokrývaly odbornou matematiku (zejména diferenciální geometrie) i vyučování matematice.

Z fyziky jí byly předloženy tyto otázky:

Prinzip der virtuellen Verschiebungen.
Gleichgewicht starrer Körper.
Rintzustrahler.
Energiequantenhypothese.
Luftballon und Flugzeug.
Spezifische Wurme fester Körper.
Elektromagnetische Induktion.

Vztahovaly se opět k tématům domácí i klauzurní práce.

---

[34] Ani jedna její domácí práce se v Archivu Univerzity Karlovy v Praze nedochovala.
[35] Ph. Frank v protokolu neuvedl žádné datum.

H. Falk zodpověděla všechny otázky správně a dne 6. listopadu 1920 obdržela oprávnění k výuce matematiky a fyziky na středních školách s německým vyučovacím jazykem, které bylo zapsáno do „katalogu kandidátů profesury".[36]

Poznamenejme na závěr, že H. Falk se podrobila také doktorskému řízení z matematiky. V roce 1921 předložila disertační práci nazvanou *Beiträge zur äquiformen Flächentheorie*, kterou oponovali G. A. Pick a A. Prey. Je patrné, že její téma úzce souviselo s tématem domácí práce z matematiky u zkoušky učitelské způsobilosti. Dne 30. dubna se podrobila hlavní rigorózní zkoušce z matematiky a teoretické fyziky (komise ve složení G. A. Pick, A. Prey, Ph. Frank) a dne 2. května vykonala vedlejší rigorózní zkoušku z filozofie (komise ve složení Ch. Freiherr von Ehrenfels, O. Kraus). Dne 6. května 1921 byla na Přírodovědecké fakultě Německé univerzity v Praze slavnostně promována doktorkou přírodních věd.[37]

4 Statistika zkoušek učitelské způsobilosti

V následujících odstavcích přehledně shrneme výsledky, které byly získány studiem katalogů, osobních složek a evidenčních listů jednotlivých uchazečů o zkoušku učitelské způsobilosti, kteří se k jejímu konání přihlásili v letech 1920/1921 až 1938/1939.

Zkoušky učitelské způsobilosti podle starého zákona

Školní rok	Počet všech zkoušek[38]	Počet zkoušek s matematikou[39]	Počet neúspěšných zkoušek (s matematikou)[40]
1920/1921	69	18	2
1921/1922	52	7	1

[36] Základní údaje o průběhu zkoušky byly zaznamenány v katalogu nazvaném *Protokoll IV der k. k. deutschen Prüf. Kommission für das Lehramt an Mittelschulen 1914/1915 – 1926/27* pod číslem 31-1919/1920. Viz též osobní složka H. Falk 1920/1921, fond Německá zkušební komise pro střední školy, Archiv Univerzity Karlovy v Praze.

[37] Viz *Protokoll über die Akte zur Erlangung der Doktorswürde an der naturwissenschaftlichen Fakultät der deutschen Universität zu Prag 1920/1921 – 1932/1933*, str. 44, položka 89, Archiv Univerzity Karlovy v Praze. Viz též Milena Výborná (sestavila), Jan Havránek a Karel Kučera (uspořádali): *Disertace pražské university II (1882–1945)*, edice Sbírka pramenů a příruček k dějinám University Karlovy, svazek č. 3, Universita Karlova, SPN, Praha, 1965, str. 140, položka 89. Disertační práce H. Falk se nezachovala.

[38] Údaj o počtu zkoušek učitelské způsobilosti zahrnuje všechny uchazeče, kteří se v daném školním roce přihlásili ke zkouškám učitelské způsobilosti (řádným, opravným, rozšiřujícím nebo doplňujícím). Není totožný s počtem kandidátů, kteří v daném školním roce zkoušku absolvovali (existují případy, kdy mezi termínem přihlášky a termínem konání, resp. úspěšným vykonáním zkoušky uplynulo několik let).

[39] Údaj o počtu zkoušek „s matematikou" zahrnuje všechny uchazeče, kteří se v daném školním roce přihlásili ke zkouškám učitelské způsobilosti z matematiky v kombinaci s fyzikou, přírodopisem, chemií, deskriptivní geometrií, kreslením, filozofií nebo tělocvikem, z deskriptivní geometrie v kombinaci s kreslením (resp. jen doplňková zkouška z geometrie) nebo z kreslení v kombinaci se zeměpisem (resp. jen doplňková zkouška z kreslení). Důvodem pro netradiční zařazení kombinací s kreslením (označované jako *Zeichnen*, *Geometrische Zeichnen*, *Geometrie – Zeichnen*) mezi matematické předměty byl fakt, že v rámci této specializace bylo nutno studovat deskriptivní a projektivní geometrii, modelování, tvorbu ornamentů apod.

[40] Údaj o počtu neúspěšných zkoušek zahrnuje všechny uchazeče, kteří nezvládli některou část zkoušky učitelské způsobilosti a byli „reprobováni" na půl roku či jeden rok, nebo nebyli ke zkoušce vůbec připuštěni, ač si podali řádnou přihlášku (nedostatečná délka univerzitní přípravy, chybějící kolokviální zkoušky apod.), nebo se přihlásili ke složení zkoušky, ale k jejímu absolvování se vůbec nedostavili, resp. se nedostavili k některé její části (obvykle klauzurní práce nebo zkouška z vyučovacího jazyka).

1922/1923	36	9	1
1923/1924	78	18	1
1924/1925	78	16	1
1925/1926	77	22	6
1926/1927	70	13	3
1927/1928	85	14	1
1928/1929	75	18	6
1929/1930	78	17	4
1930/1931	68	10	2
1931/1932	77	16	3
1932/1933	88	16	4
1933/1934	85	21	8
1934/1935	53	19	5
1935/1936	26	9	5
1936/1937	17	6	0
1937/1938	11	6	1
1938/1939	5	1	0
1939/1940	1	1	1
1940/1941	1	0	0

Aprobace „matematických“ předmětů podle starého zákona v letech 1920/1921 až 1932/1933

Kombinace	Počet
matematika a fyzika	65
chemie a matematika s fyzikou	57
přírodopis a matematika s fyzikou	33
matematika a deskriptivní geometrie	22
matematika a tělesná výchova	7
filozofie a matematika s fyzikou	2
matematika a chemie	1
deskriptivní geometrie (doplňková zkouška)	1
kreslení (doplňková zkouška)	1

Aprobace „matematických“ předmětů podle starého zákona v letech 1933/1934 až 1940/1941

Kombinace	Počet
chemie a matematika s fyzikou	35
matematika a fyzika	16
matematika a deskriptivní geometrie	7
přírodopis a matematika s fyzikou	2
matematika a tělesná výchova	1
matematika (doplňková zkouška)	1
kreslení (doplňková zkouška)	1

I. státní zkouška učitelské způsobilosti podle nového zákona

Školní rok	Počet všech zkoušek	Počet zkoušek s matematikou	Počet neúspěšných zkoušek (s matematikou)
1932/1933	96	9	1
1933/1934	76	16	4
1934/1935	156	30	11
1935/1936	163	22	4
1936/1937	138	19	10
1937/1938	103	17	9
1938/1939	256	36	9
1939/1940	50	0	0
1940/1941	1	0	0

Aprobace „matematických“ předmětů podle nového zákona v letech 1932/1933 až 1940/1941 (I. státní zkouška)

Kombinace	Počet
matematika a fyzika	57
zeměpis a kreslení	31
deskriptivní geometrie a kreslení	20
matematika a deskriptivní geometrie	14
kreslení a zeměpis	13
kreslení a deskriptivní geometrie	11
matematika a tělesná výchova	2
matematika a chemie	1

II. státní zkouška učitelské způsobilosti podle nového zákona

Školní rok	Počet všech zkoušek	Počet zkoušek s matematikou	Počet neúspěšných zkoušek (s matematikou)
1933/1934	20	3	0
1934/1935	44	6	0
1935/1936	53	7	0
1936/1937	65	20	1
1937/1938	100	21	1
1938/1939	104	23	1
1939/1940	147	31	8
1940/1941	46	9	1
1941/1942	19	0	0
1942/1943	8	0	0

1943/1944	6	0	0
1944/1945	7	0	0

Aprobace „matematických" předmětů podle nového zákona v letech 1933/1934 až 1938/1939 (II. státní zkouška)

Kombinace	**Počet**
matematika a fyzika	28
zeměpis a kreslení	22
deskriptivní geometrie a kreslení	14
matematika a deskriptivní geometrie	8
kreslení a zeměpis	2
deskriptivní geometrie a matematika	2
fyzika a matematika	2
matematika a tělesná výchova	2

Aprobace „matematických" předmětů podle válečných předpisů v letech 1939/1940 až 1944/1945

Kombinace	**Počet**
matematika a fyzika	16
deskriptivní geometrie a kreslení	11
zeměpis a kreslení	8
matematika a deskriptivní geometrie	3
kreslení a matematika	1
kreslení a zeměpis	1

Z výše uvedených tabulek je patrné, jak se v průběhu času měnil počet kombinací, jejich typ a zájem studentů o ně. Připomeňme, že od 80. let 19. století až do roku 1920[41] mezi nejoblíbenější kombinace patřily tzv. klasické kombinace – matematika a fyzika (153 posluchačů), matematika a deskriptivní geometrie (105 posluchačů), přírodopis pro vyšší třídy a matematika s fyzikou pro nižší třídy (91 posluchačů) a chemie pro vyšší třídy a matematika s fyzikou pro nižší třídy (48 posluchačů).[42]

[41] Matematika se od školního roku 1882/1883 do školního roku 1919/1920 studovala na Filozofické fakultě Německé univerzity v Praze, od školního roku 1920/1921 na Přírodovědecké fakultě Německé univerzity v Praze.

[42] V letech 1882 až 1920 se před státní zkušební komisí pro zkoušky učitelské způsobilosti fungující při Německé univerzitě v Praze uskutečnilo 435 zkoušek učitelské způsobilosti „z matematiky"; kromě již výše uvedených to byly následující zkoušky: deskriptivní geometrie (11 uchazečů, doplňková zkouška), matematika (9 uchazečů, doplňková zkouška), matematika a přírodopis (6 uchazečů), matematika, deskriptivní geometrie a fyzika (5 uchazečů), filozofie, matematika a fyzika (4 uchazeči), matematika, přírodopis a fyzika (1 uchazeč), matematika, fyzika a německý jazyk (1 uchazeč), chemie, matematika a fyzika (1 uchazeč). Kombinace s matematikou byly více méně pevně dané a stabilní, drobné výjimky byly povolovány na základě žádosti uchazeče (např. matematika s filozofií či matematika s němčinou). Viz *Index 1882–1934*, Archiv Univerzity Karlovy v Praze, fond Německá zkušební komise pro střední školy, kartón č. 315. Výše uvedené údaje nemusí být zcela přesné, neboť index obsahuje drobné chyby (např. chybějící jména kandidátů s příjmením začínajícím

Od roku 1920 do roku 1933, tj. v období platnosti „starého“ zákona o jednostupňové zkoušce, proběhlo před státní zkušební komisí při Německé univerzitě v Praze 931 zkoušek učitelské způsobilosti, z nichž 194 bylo „z matematiky“. V té době se zvýšil zájem o aprobace kombinující matematiku a přírodní vědy (matematika a fyzika – 65 uchazečů; chemie, matematika a fyzika – 57 uchazečů; přírodopis, matematika a fyzika – 33 uchazečů), což bezesporu souviselo s prudkým rozvojem chemie a biologie, nárůstem jejich aplikací apod. Poznamenejme, že tyto kombinace patřily k nejobtížnějším, neboť propojovaly až tři plnohodnotné předměty. Ačkoli uchazeč získával osvědčení pro výuku chemie, resp. přírodopisu na obou stupních středních škol a pro výuku matematiky a fyziky jen na nižším stupni, zkušební komise při zkouškách tento fakt téměř nezohledňovala, tj. kladla obdobně náročné otázky jako při zkoušce z matematiky a fyziky pro vyšší stupeň střední školy. Vyšší náročnost těchto kombinací ukazuje i větší počet „reprobovaných“ kandidátů profesury.[43] Současně poklesl zájem o studium deskriptivní geometrie, zvýšil se zájem o kreslení a nově se objevila kombinace matematika a tělesná výchova.[44] Zmiňme ještě jednu zajímavost – kombinace chemie a matematika s fyzikou byla oblíbenou aprobací u absolventů chemie na Německé technice v Praze, kteří si doplnili filozofické a pedagogicko-psychologické předměty, absolvovali matematické semináře a fyzikální laboratorní cvičení, a pak se řádně podrobili všem částem zkoušky učitelské způsobilosti.

Od školního roku 1932/1933 se systém zkoušek učitelské způsobilosti stal na krátký čas dvojkolejným. Studenti, kteří zahájili studium do školního roku 1930/1931, mohli skládat zkoušku učitelské způsobilosti podle starého zákona a získat rovnocennou aprobaci, ale ve staré struktuře kombinací. Volba byla na kandidátovi, neboť státní zkušební komise zastávala názor, že zavedením nového zákona nesmí být žádný ze studentů poškozen ve svých právech. Této možnosti využilo v letech 1933/1934 až 1940/1941 celkem 197 studentů, z nichž si 63 vybralo kombinaci s matematikou (chemie a matematika s fyzikou (35), matematika a fyzika (16), matematika a deskriptivní geometrie (7), přírodopis a matematika s fyzikou (2), matematika a tělesná výchova (1), doplňková zkouška z matematiky (1) a doplňková zkouška z kreslení (1)).

Od školního roku 1932/1933 začali první studenti skládat 1. část „dvoustupňové“ zkoušky učitelské způsobilosti, tj. I. státní zkoušku. Od následujícího školního roku začali skládat také 2. část, tj. II. státní zkoušku. V letech 1933/1934 až 1938/1939 se k ní přihlásilo 386 kandidátů učitelství, z toho 80 v kombinaci s matematikou (matematika a fyzika (28), zeměpis a kreslení (22), deskriptivní geometrie a kreslení (14), matematika a deskriptivní geometrie (8), kreslení a zeměpis (2), deskriptivní geometrie a matematika

písmeny F, R a S), chybné kombinace (např. u O. Vargy byla jako kombinace uvedena matematika a tělesná výchova, ač skládal zkoušky z matematiky a deskriptivní geometrie, u G. Warty byl jako kombinace uveden přírodopis a matematika s fyzikou, ač skládal zkoušku z přírodopisu, fyziky a zeměpisu), chyby ve školních rocích (např. u P. Kuhna byl uveden rok 1935, ač zkoušku skládal v roce 1925), někdy byla uváděna jen neúplná křestní jména (např. Fred místo Alfred, Fritz místo Friedrich apod.), jak se ukázalo při srovnání indexu s katalogy z let 1920/1921 až 1944/1945. Připomeňme, že index byl pořízen na počátku 30. let 20. století jako pomůcka pro rychlejší orientaci úředníků; vznikl výpisem z původních katalogů a osobních složek.

[43] Viz katalogy uchazečů, fond Německá zkušební komise pro střední školy, kartóny č. 311 a 312, Archiv Univerzity Karlovy v Praze.

[44] Tento trend pravděpodobně souvisel s poklesem počtu povinných hodin deskriptivní geometrie na středních školách v Československu a nárůstem obliby tzv. reálných reformních gymnázií, kde nebyl velký prostor pro výuku deskriptivní geometrie. Proto poklesla „společenská“ poptávka po učitelích deskriptivní geometrie. Nezanedbatelným faktorem bylo i to, že klasická deskriptivní geometrie byla již v tomto čase více méně uzavřenou (mrtvou) disciplínou, v níž už nebylo mnoho prostoru pro další rozvoj, a proto nelákala tolik zájemců.

(2), fyzika a matematika (2) a matematika a tělesná výchova (2)).[45] Je zajímavé, že opět došlo ke změně zájmu o kombinace aprobačních předmětů. Vymizel zájem o spojení matematiky s přírodopisem, resp. chemií, nepatrně vzrostl zájem o deskriptivní geometrii a kreslení.[46]

Připomeňme ještě jednu zajímavou skutečnost, která se promítla do celkové analýzy zkoušek učitelské způsobilosti, a to výrazný nárůst počtu uchazečů v letech 1937/1938 až 1938/1939. V předvečer válečných událostí se mnoho mladých lidí rozhodlo uspíšit studium a v co nejkratším zákonném čase získat oprávnění k výuce na střední škole. V roce 1937/1938 se o první státní zkoušku pokusilo 103 studentů (17 v kombinaci s matematikou), v roce 1938/1939 dokonce 256 studentů (36 v kombinaci s matematikou). V roce 1936/1937 o druhou státní zkoušku usilovalo 65 posluchačů (20 v kombinaci s matematikou), v roce 1937/1938 již 100 studentů (21 v kombinaci s matematikou), v roce 1938/1939 celkem 104 studentů (23 v kombinaci s matematikou) a v roce 1939/1940 dohromady 147 studentů (31 v kombinaci s matematikou), což byl dozvuk předválečného vzepětí.

5 Závěrečné poznámky

Výše popsané archivní materiály dokumentují průběh zkoušek učitelské způsobilosti aprobací v kombinací s matematikou. Ukazují jejich strukturu, odbornou náročnost a požadavky na pedagogicko-psychologickou průpravu budoucích učitelů stejně jako míru neúspěšnosti. Současně umožňují popsat a pochopit proměnu aprobačních kombinací a dát ji do přímé souvislosti s všeobecnými změnami v našem vzdělávacím systému, a také do souvislosti s rozvojem věd. Osobní složky a evidenční listy jednotlivých kandidátů a všeobecné podací protokoly ukazují nelehkou práci zkušební komise, neboť dovolují rekonstruovat způsob zadávání témat, vlastní organizaci zkoušek a posuzování domácích i klauzurních prací. Z osobních složek je též zřejmé, že se zkušební komisaři snažili neopakovat zkušební otázky, což při neexistenci „standardních souborů vzorových otázek" nebyla vůbec jednoduchá práce. Z jednotlivých složek současně vyplývá, že se komisaři snažili bezprostředně reagovat na rozvoj svých oborů a zadávat otázky, které se dotýkaly i nejnovějších objevů a výsledků, tj. zkušební okruhy více méně pravidelně upravovali a doplňovali, resp. rozšiřovali nebo zužovali. Ze všech dochovaných dokumentů je tedy patrné, že zkoušky učitelské způsobilosti byly odborně, časově i administrativně náročné, ale v období první československé republiky precizně organizované a vládnuté.

[45] Poznamenejme, že první státní zkouška byla jakýmsi „regulátorem" počtu kandidátů učitelství. Někteří neuspěli při první zkoušce (zhruba 12 procent) a ke druhé se nemohli přihlásit, jiní sice složili první státní zkoušku, ale ke druhé se již z neznámých důvodů nepřihlásili (v letech 1932/1933 až 1938/1939 se 24 studentů ze 149, kteří uspěli při první zkoušce (matematika v kombinaci s jiným předmětem), nepřihlásilo ke druhé státní zkoušce, a tudíž nezískalo oprávnění k výuce na středních školách).

[46] Není však zřejmé, proč tato proměna nastala a co ji způsobilo. Doplňme pro zajímavost, že v letech 1939/1940 až 1944/1945 se konalo 233 zkoušek učitelské způsobilosti, z toho 40 bylo „s matematikou" (matematika a fyzika − 16 uchazečů, deskriptivní geometrie a kreslení − 11 uchazečů, zeměpis a kreslení − 8 uchazečů, matematika a deskriptivní geometrie − 3 uchazeči, kreslení a matematika − 1 uchazeč, kreslení a zeměpis − 1 uchazeč). V letech 1941/1942 až 1944/1945 se nikdo nově nepokusil získat aprobaci „s matematikou" (probíhaly pouze doplňující, rozšiřující a opravné zkoušky). Posledním úspěšným uchazečem byl Viktor Alexy (nar. 9. 7. 1919), který se ve školním roce 1940/1941 přihlásil ke zkoušce učitelské způsobilosti a v roce 1942 získal oprávnění k výuce matematiky a fyziky. Viz *Katalog II über die II. Staatsprüfung, 9-1939/1940 až 7-1944/1945*, číslo 33-1940/1941, kartón č. 314, fond Německá zkušební komise pro střední školy, Archiv Univerzity Karlovy v Praze.

Studium dochovaných materiálů může být přínosné pro pedagogy připravující budoucí učitele matematiky, pro matematiky, obecné pedagogy, psychology a oborové didaktiky, neboť může poskytnout náměty pro vylepšení odborné přípravy učitelů, pro vybudování kariérního řádu učitelů, pro vytvoření účinných metod dalšího vzdělávání učitelů apod. Může však být inspirativní i pro historiky, demografy a sociology, neboť materiály ukrývají dostatek informací o vývoji vzdělávacího systému, o proměně aprobačních kombinací, o sociálním zázemí a původu studentů atd.

Adresa

Doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT v Praze
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
e-mail: *becvamar@fd.cvut.cz*

Doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *becvamar@fd.cvut.cz*

OLOMOUCKÝ KONKURZ

MARTINA BEČVÁŘOVÁ, LUBOŠ MORAVEC, JAN ŠKODA

Abstract: Just 200 years ago there was a competition at Lyceum in Olomouc which was the first step in Jakub Filip Kulik's (1793–1863) academic career. The aim of the article is to show preserved documentation, participants and run of such competition in that time.

1 Univerzita v Olomouci

1.1 Historie školy

Dějiny univerzity v Olomouci sahají do 16. století, kdy zde byla založena jezuitská škola. Po roce 1573 se stala plnohodnotnou univerzitou s filosofickou, teologickou, později i právnickou fakultou a lékařsko-chirurgickým ústavem. Roku 1773 byla Jezuitům v souvislosti s rušením jejich řádu odňata správa univerzity. Zmatek, který na škole zavládl, vyústil v přesun školy do Brna roku 1778.

O čtyři roky později byla škola navrácena do Olomouce, ovšem modifikovaná na pouhé tříleté lyceum,[1] které nemělo právo udělovat titul magistra, mělo snížený počet vyučujících a nabízelo pouze menší rozsah výuky. Stálo tak na rozhraní mezi střední a vysokou školou. Roku 1827 jí byl opět navrácen status plnohodnotné univerzity. Její zapojení do revolučního hnutí v letech 1848 až 1849 však nakonec zapříčinilo její uzavření roku 1860. K obnovení došlo až v roce 1946, kdy vznikla Univerzita Palackého.[2]

1.2 Výuka matematiky v době lycea

Na konci 18. a na počátku 19. století se na základě přání císařského dvora omezovaly teoretické výklady, důraz byl kladen především na znalosti a dovednosti použitelné v praxi. Vyučující se nesměli odchylovat od učebnic oficiálně schválených ve Vídni. K doktorátu z filozofie byli předpsány tři zkoušky – z filozofie, z matematiky a fyziky a ze všeobecných dějin.

Profesorem matematiky po navrácení školy do Olomouce byl Franz Conrad Bartl.[3] V prvním ročníku přednášel podle Wolffovy učebnice[4] elementární matematiku v rozsahu 9 hodin týdně. Ve druhém ročníku na ni navazoval kurz aplikované matematiky v rozsahu 2 až 4 hodin týdně vyučovaný podle Kärstnerovy učebnice.[5] Učivo pokrývalo

[1] Univerzity na základě císařského rozhodnutí zůstaly pouze v Praze, Vídni a Lvově.

[2] O historii univerzity v Olomouci viz Navrátil J. (ed.): *Kapitoly z dějin Olomoucké univerzity 1573–1973*, Profil, Olomouc, 1973.

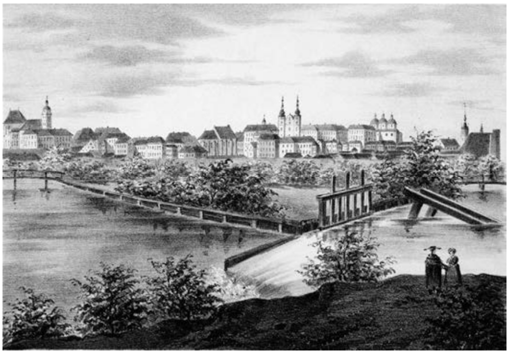
[3] Franz Conrad Bartl (1750–1813) vystudoval filozofii v Praze, roku 1779 jmenován mimořádným profesorem elementární matematiky na pražské univerzitě. Od roku 1782 byl řádným profesorem matematiky na lyceu v Olomouci, kde setrval až do smrti. Sepsal několik učebnic matematiky a zkonstruoval vylepšenou variantu skleněné harmoniky.

[4] Wolff Ch.: *Anfangs-Gründe aller Mathematischen Wissenschaften*. Halle und Magdeburg, 1775.
Christian Wolff (1679–1754) byl významným německým filozofem, působil na univerzitách v Halle a v Marburgu.

[5] Kästner A. G.: *Anfangsgründe der Mathematik*. Göttingen, 1780. Abraham Gotthelf Kästner (1719–1800) byl německý matematik a epigramatik. Působil na univerzitách v Lipsku a Göttingen. Sepsal řadu matematických pojednání a učebnic.

základy aritmetiky a algebry, vrcholem poznatků pak bylo řešení kvadratických rovnic a použití logaritmů.[6]

Po Bartlově smrti výuku matematiky suploval Joseph Ildephonsus Steinheibl (nar. 1785), profesor fyziky, a Franz Bartl, syn zemřelého přednášejícího. Na uvolněné místo profesora elementární matematiky byl vypsán konkurz.[7] Jeho průběh s využitím dochovaných archivních materiálů[8] popíšeme v následujících odstavcích.



Obrázek 1: *Olomouc kolem roku 1843 (Anton Ziegler).*

2 Konkurzy v 19. století

V první polovině 19. století byla profesorská místa na univerzitách, polytechnikách a „vyšších lyceích“ obsazována na základě veřejného konkurzu, který vypisovala studijní komise příslušné školy pod dohledem Vídně. Zájemci o tato místa zasílali své materiály konkurzní komisi. Ta po prostudování předložených dokumentů vybrala nejlepší trojici (tzv. terno), jindy kandidáty podrobila přísné několikahodinové písemné a následné ústní zkoušce. Výsledný návrh spolu s konkurzními materiály všech uchazečů odeslala na ministerstvo do Vídně, které vybralo jednoho kandidáta a doporučilo císaři jeho jmenování. Nově jmenovaný profesor složil přísahu věrnosti panovníkovi, zemi a škole. Při konkurzu měli přednost absolventi rakouských univerzit a polytechnik, zahraniční diplomy nebyly až na výjimky uznávány. Noví profesoři byli nejčastěji vybíráni z řad starších a zkušených gymnaziálních profesorů. Při výběru se více hledělo na loajálnost k rakouské říši, perfektní znalost němčiny a délku pedagogické praxe než na vlastní vědeckou práci. Profesoři měli být především dobrými a spolehlivými úředníky a vychovateli mládeže. Místo vysokoškolského profesora přinášelo v 19. století společenskou prestiž, poskytovalo slušný a pravidelný plat, který se zvyšoval každých pět let, penzi a zaopatření pro vdovy a sirotky.

Řádní profesoři, pokud se hrubě neprovinili proti zákonům své země, resp. proti morálce, měli celoživotní jistotu místa. Vyučovat mohli až do sedmdesáti let, pak byli

[6] O výuce matematiky na univerzitě v Olomouci viz Bečvářová M.: *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918*, edice Dějiny matematiky, sv. č. 34, Matfyzpress, Praha, 2008, Navaříková L.: *Historie matematiky na olomoucké univerzitě* (dostupné na http://navarikp.sweb.cz).

[7] V konkurzním materiálu se objevují různá označení uprázdněné stolice – *stolice elementární matematiky*, *stolice čisté matematiky*, *stolice vyšší měřičské a početní vědy*, *stolice matematiky*.

[8] Viz [1] až [6].

penzionování. Se svolením panovníka mohli jeden nebo výjimečně dva roky přesluhovat.[9]

3 Konkurz na místo profesora matematiky v Olomouci

Konkurz byl konán dne 3. března 1814 na třech místech současně – v Olomouci, ve Vídni a ve Lvově, což vzhledem k velikosti rakouské říše nebylo neobvyklé. Jeho průběh byl patrně všude totožný – byly přineseny zapečetěné obálky s otázkami, po kontrole neporušení pečetí a otevření bylo uchazečům předloženo několik úkolů k písemnému vypracování. Členové konkurzní komise[10] si rozdělili služby při dozoru a sepsali otázky pro ústní zkoušku, které uložili do nové obálky a tu opět zapečetili.[11] Následující den se komise sešla k ústní zkoušce, tj. k předvedení přednášky na zkoušku.[12] O průběhu řízení byla sepsána „dobrozdání“, která se sešla v Olomouci.[13] Teprve po obdržení všech zpráv byl konkurz vyhodnocen a stanoveno tzv. terno, tj. trojice nejlepších kandidátů.

V Olomouci se konkurzu účastnila trojice kandidátů – profesor „inženýrských věd“ na olomoucké stavovské akademii a suplent uprázdněné stolice matematiky Franz Bartl, profesor matematiky na gymnáziu v Olomouci a profesor řečtiny na filozofické fakultě v Olomouci Johann Budin a student druhého ročníku práv Jan Novotný.[14]

Ve Lvově měl konkurz patrně jediného účastníka – Jakuba Filipa Kulika (1793 až 1863), tehdy také studenta právnické fakulty.[15]

Ve Vídni byla trojice zájemců. Prvním byl Andreas von Baumgartner (1793−1865), který se roku 1817 stal profesorem fyziky na olomouckém lyceu,[16] Simon Peter Schwalt

---

[9] O konkurzech viz Bečvářová M.: *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918*, edice Dějiny matematiky, sv. č. 34, Matfyzpress, Praha, 2008.

[10] Členy konkurzní komise byli Michael Wenzl Voigt (1765−1820**)**, ředitel filosofických studií v Olomouci, Joseph Leonard Knoll (1775−1841), profesor dějin, Victor Locher, profesor náboženství, Joseph Wittengs (1784−1846), profesor filozofie, Joseph Wobraska (1778−1820**)**, profesor národohospodářství (resp. zemědělství), Joseph Ildephonsus Steinheibl, profesor fyziky.

[11] V průběhu písemné části konkurzního řízení byl v učebně nepřetržitě přítomen jeden člen konkurzní komise, který zapisoval vše, co se během jeho služby stalo.

[12] Doslovné zadání známe pouze u jediné ústní otázky, totiž (latinsky*): Fractionum decimalium calculum exponere et demonstrare* (v českém překladu výklad a demonstrace desetinných zlomků). Ostatní témata ústní zkoušky můžeme částečně rekonstruovat z dochovaného dokumentu − kořeny algebraických rovnic, racionální a iracionální čísla, důkaz iracionality √3, ryze imaginární čísla a komplexní čísla a jejich znázornění, konstrukce a vlastnosti dvanáctiúhelníku (desetiúhelníku), trigonometrické funkce. Poznamenejme, že doba na vypracování písemných odpovědí byla stanovena na jeden den, uchazeč neměl k dispozici žádnou literaturu ani pomůcky. Doba přípravy na ústní zkoušku byla stanovena na 30 minut, vlastní délka zkoušky nebyla nijak omezena.

[13] Každý člen komise vypracoval samostatné vlastní hodnocení, na jejichž základě byla sepsána závěrečná zpráva, stanoveno pořadí uchazečů a proveden definitivní výběr navrhovaného terna.

[14] Jan Novotný nechal do svých materiálů výslovně zaznamenat, že *konkurz činí s úmyslem, aby na něho byl v budoucnu při uvolnění profesury matematiky činěn milostivý zřetel, pročež se zbývajícím dvěma kandidátům jakožto profesorům nechce stavět do cesty*. Je pravděpodobné, že si byl vědom svých nedostatečných matematických znalostí.

[15] J. F. Kulik byl profesorem matematiky na olomouckém lyceu, od r. 1816 působil na lyceu a polytechnice ve Štýrském Hradci a o 10 let později se stal profesorem vyšší matematiky na pražské univerzitě, kde setrval až do své smrti. Sepsal několik učebnic a ve své odborné práci se věnoval především teorii čísel. O Kulikově životě a díle viz Moravec L.: *Jakub Filip Kulik and his tables.* In Binder Ch. (ed.): XI. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik, TU Wien, Wien, 2012, 110–116, popř. Moravec L.: *Jakub Filip Kulik v Olomouci, Štýrském Hradci a Praze.* In J. Bečvář, M. Bečvářová (ed.): 31. mezinárodní konference Historie matematiky, Praha, 2010, 156–163.

[16] A. von Baumgartner vyučoval v Olomouci do roku 1823, kdy byl jmenován profesorem fyziky a aplikované matematiky na univerzitě ve Vídni. Roku 1833 se musel kvůli onemocnění krku vzdát pedagogického působení

(1782−1838), lékař, filozof, později rektor univerzity v Innsbrucku, děkan filozofické fakulty, univerzitní profesor elementární matematiky a ředitel nemocnice v Innsbrucku, a Joseph Kirchberger, o němž se bohužel v dostupných archívních pramenech nepodařilo nalézt žádné podrobnosti.

Z hodnotitelů však měl matematické vzdělání pouze J. I. Steinheibl, jeho odborně fundovaný protokol do hloubky postihuje i exaktní stránku kandidátských odpovědí. Ostatním členům komise, jejichž obory byla filosofie, náboženství, historie či národohospodářství, nezbylo než zůstat u pouhého hodnocení vnějších projevů.

Jednoznačným vítězem se stal F. Bartl, který všechny členy komise nadchl svými znalostmi i schopností bez přípravy správně, výstižně, srozumitelně a uspořádaně přednášet na zadané téma. V dochovaném konkurzním protokolu se objevilo:[17]

Jeho zodpovězení tří otázek je vyčerpávající, učené a prokazuje dokonalý přehled této vědy. Při oznámení druhé otázky sice skrz přehlédnutí namísto věty o dvanáctiúhelníku záměnou použil větu o desetiúhelníku, čímž si však úlohu jen ztížil, v jejím řešení však rozvinul dokonalé vzdělání. Podepsaný držel při práci tohoto uchazeče několik hodin dohled a měl tudíž příležitost pozorovat, s jakou přímostí a znalostí předmětu píše Bartl svá řešení. Tuto znalost vědy prokázal při ústní zkoušce. S rezignací na jakoukoliv přípravu zasedl ihned za katedru a přednesl výklad s jasností, zřetelností a bez nejmenší závady k všeobecné spokojenosti přítomných porotců. Jeho hlas je zvučný, latinu má plně v moci a jeho tělesné držení při přednášce nevykazuje žádný kaz. (J. L. Knoll)

… pan František Bartl odevzdal vypracování úplné, bezchybné a vyčerpávající a ačkoliv 2. otázku z pouhého nedorozumění spletl, tak dosáhl ještě větší cti u zbývajících těžkých úloh, které řádně vyřešil. Pan František Bartl se vůbec prokázal, jak ve svém písemném vypracování, tak i ve své příjemné, zřetelné a souvislé přednášce, jako muž hlubokého úsudku, vysokého vzdělání matematických znalostí, a když se vezme v úvahu jeho solidní, bezúhonný charakter bez ohledu na zásluhy jeho osobní a jeho otce, tak se musí v každém příteli literárního talentu ihned vznítit touha snažit se tohoto muže doporučit na jeho místo. Podepsaný si činí příjemnou a svědomitou povinnost pro jeho nejpřednější vlastnosti navrhnout jej na první nejčestnější místo. (J. Wobraska)

… usedl pan profesor Bartl bez přípravy za katedru a systematicky, důkladně, jasně a srozumitelně zřetelným hlasem rozebral podstatu desetinných zlomků, jejich vznik, početní zákony pro všechny aritmetické funkce a užitek, které tyto zlomky v počtech poskytují. (J. I. Steinheibl)

Když provisorní profesor František Bartl vyslechl otázku určenou pro ústní přednášku, usedl bez vlastního zastoupení rovnou za katedru. Jeho přednáška působila takto: mužné vystupování, působivost řeči, zřetelnost a precisnost rozvíjení ústředního bodu otázky, pořádek, souvislost a důkladnost ve vedení důkazu. … Provisorní profesor František Bartl první a třetí otázku správně vysvětlil, zobrazil a plně dokázal, a jenom v horlivosti se mohlo stát, že v označení druhé otázky namísto řešení problému dvanáctiúhelníku řešil problém desetiúhelníku, kterýžto je v testu těžší. (J. Wittgens)

---

a začal pracovat na vedoucích postech v několika průmyslových podnicích. Roku 1848 odstartoval jeho politickou kariéru, neboť byl jmenován ministrem hornictví a veřejných prací. Slavnou se stala jeho učebnice *Die Naturlehre nach ihrem gegenwärtigen Zustande, mit Rücksicht auf mathematische Begründung* (Wien, 1824). Více viz http://de.wikipedia.org/wiki/Andreas_von_Baumgartner.

[17] Při překladu pasáží z dochovaného německy psaného protokolu byl zachován půvabný květnatý styl dobového vyjadřování.

Pan František Bartl přednesl uloženou úlohu z katedry okamžitě bez předchozího času na rozmyšlenou, takže krom toho, že skrz své důkladné znalosti oboru i schopnosti ostatním zřetelně a srozumitelně předal své znalosti, se skrz úplnost a důkladnou zběhlost, se kterými svoji dobrou přednášku začal i skončil, ukázal plně schopným tuto katedru, kterou již po jistý čas suploval, moci převzít jako řádný profesor. (V. Locher)

Druhé místo i přes své mládí a chybějící zkušenosti s výukou matematiky obsadil J. F. Kulik, který komisi zaujal svými rozsáhlými znalostmi matematiky. V konkurzním protokolu bylo napsáno:

… jeho odpovědi jsou rovněž téměř vyčerpávající a prokazují, s jakou železnou pílí se tento vyučil vědě vysokého měřičství a počtářství. (J. L. Knoll)

Kandidát konkursu ve Lvově pan Jakub Filip Kulik plně vypracoval svůj elaborát s úplností, přesností a matematickým řádem, že nelze chtít více. Jeho naprosto zdařilá práce v něm prozrazuje muže, který s vynikajícím talentem a neúnavnou pílí sám dosáhl vyspělého vědění na poli matematiky a jehož pevná paměť mu vše přečtené zaručuje jako vlastnictví. Jeho duch vytáhl bohatou stravu z překypující zásobárny otce Euklida a ukazuje se v plné vědecké síle. (J. I. Steinheibl)

… Jeho vypracování prozrazuje velkou sečtělost, obsáhlou znalost věci a vůbec nese pečeť výrazného talentovaného učence. … Podepsaný si klade za zvláštní povinnost, ačkoliv nemá tu čest jej osobně poznat, tohoto ctěnému ředitelství doporučiti s přáním, aby jej vysokoctěná dvorská studijní komise držela ve zvláštní patrnosti, aby jeho vědecký talent, obzvláště v abstraktních předmětech nejvyššího druhu, byl podporován a povzbuzován. (J. Wobraska)

Třetí místo obsadil A. von Baumgartner, který se dopustil drobných chyb a jeho odpovědi obsahovaly malé nedostatky. V protokolu byl jeho výkon hodnocen takto:

… pan Andreas Baumgartner prokázal zde zvláště, přes nějaké slabiny, že otázkám správně porozuměl a rovněž správně zpracoval, čímž si vysloužil zvláštní pozornost, neboť jen málo individuí se jako studijnímu oboru věnuje tak abstraktním předmětům, jako je matematika. (J. Wobraska)

Kandidát konkursu Andreas Baumgartner stanovil na začátku řešení první otázky nesprávný pojem racionálních a iracionálních velikostí a zdá se, že tento pojem zaměnil s pojmem sudých a lichých čísel. Jeho příklady podané k objasnění předkládaného vysvětlení tedy nemají žádný účel, takže správný a skutečný rozdíl, jak mu konkursní otázka předkládá, pochopil zcela špatně, zatímco např. čísla 6 a 12 naprosto pokládá za racionální čísla a 2 a 3 za iracionální, k čemuž [: *pravděpodobně z ukvapenosti* :] *udává první kvótu = 6, ale přece 6 je obsaženo v 12 pouze dvakrát, nikoli šestkrát. Pak přece nechává plně udat poměr 3:2, totiž výrazem 3/2 nebo 1,5. Když pan Baumgartner nakonec řekl: „tímto řešením je mezi iracionálními 3 a √3 kvota přesně dána“, tak myslel že není dána neboť ostatně nejednou bývá konsekventní nesprávnými pojmy. Pojem kořenových velikostí, které pan elaborant v pravidlech výpočtů nutně předesílá, je asi příliš omezený; přesto dává z něho vyplývající správné, jen místy poněkud nezřetelně vyjádřené zákony, svědectví o zběhlém a rozumném náhledu do funkce manipulace tohoto výpočtu. Důkazy pro jednotlivé zákony jsou provedeny v obecné rovině. – Když pan elaborant zodpovězení první otázky zakončil slovy: k radikálům také směřují imaginární veličiny, jejichž kořeny jsou zcela nemožné. Jak věří podepsaný, toto nelze brát v tom smyslu, že takové velikosti podléhají týmž početním zákonům jako kořenové veličiny* *podle pravého pojmu, neboť v tomto smyslu by byl údaj nesprávný. Druhou konkursní otázku pan Baumgartner zcela vyřešil. V závěru tohoto řešení připojil poznámku (nota bene), kde říká: „že plocha dodekagonu byla stanovena, když se circumference (obvod) s perpendiculem (olovnicí, svislicí) a čočky ke straně vedené znásobí“ mělo u toho být: a dvěma vydělí. V řešení třetího problému pan Baumgartner ničemu nerozuměl a osvědčil svůj úsudek v poměru trigonometrických linií.* (J. I. Steinheibl)

Dvorské studijní komisi ve Vídni bylo doporučeno, aby držela Kulikovo a Baumgartnerovo jméno v patrnosti pro jejich výjimečný talent a znalosti a brala při obsazování dalších uvolněných míst zřetel na jejich zájem o pedagogickou dráhu.

S výsledky zbývajících kandidátů již hodnotitelé spokojeni nebyli.[18] J. Budin a J. Novotný z konkurzu odstoupili již v průběhu písemné části.[19]

I přes Bartlovo jednoznačné vítězství v konkurzu se dne 14. listopadu 1814 J. F. Kulik stal profesorem elementární matematiky na lyceu v Olomouci. Důvody tohoto rozhodnutí se nepodařilo dohledat.

4 Přepis protokolu z konkurzu

V archivu olomoucké univerzity (viz [5]) se dochoval devítistránkový protokol, který podrobně zachycuje jednotlivé etapy konkurzu probíhajícího v Olomouci, Vídni a Lvově na jaře roku 1814. Byl sepsán německy (s ojedinělými citáty v latině) jednotlivými členy konkurzní komise. Dokument dokládá délku konkurzního řízení,[20] jeho odbornou náročnost a komplexnost.[21]

Protokol je psán německou novogotickou kurzívou (tzv. kurentem), slova latinská, popř. s latinským základem jsou vypisována písmem humanistickým. Texty byly napsány vlastní rukou jednotlivých členů komise, liší se tudíž co do úpravy i čitelnosti (nejkaligrafičtější rukopis náleží opět J. I. Steinheiblovi, vcelku jsou však i ostatní celkem dobře čitelné). Ověření bylo provedeno pouze podpisy, žádné pečeti nebo razítka použity nebyly. Po jazykové stránce se jedná o běžnou úřední (a v případě J. I. Steinheibla i odbornou matematickou) němčinu, přičemž u některých členů komise (zejména J. Wobrasky) je znát, že nebyla jejich jazykem mateřským. Pozoruhodné je zkomolení pravopisu u řady odborných termínů – *philosophien Studien*, *Gessichte, Mathematick*, *Physick*, *Dothetaconum* (namísto *philosophischen Studien*, *Geschichte*, *Mathematik*, *Physik*, *Dodecanonum*).

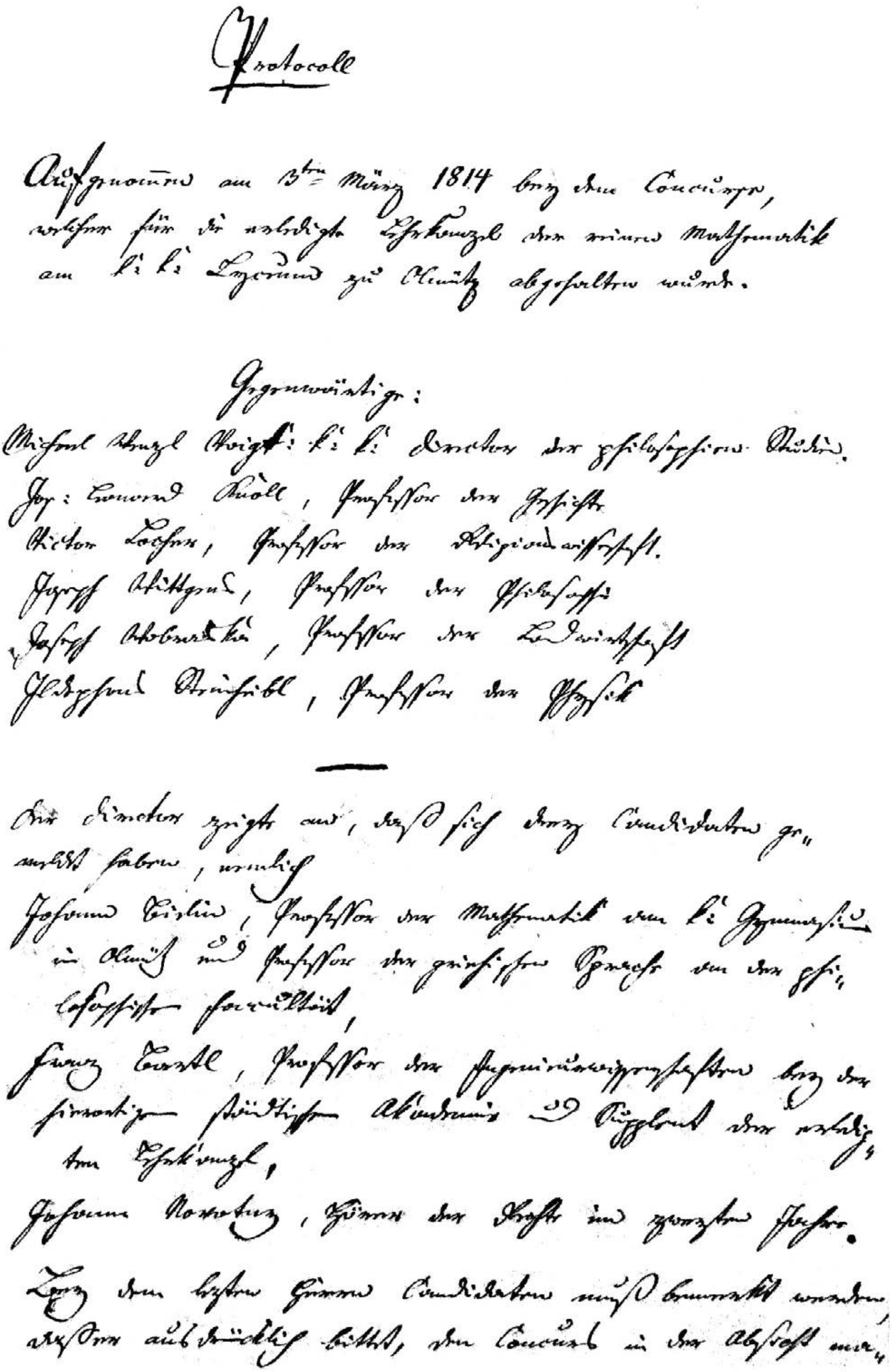
---

[18] V protokolu je například uvedeno: *Uchazeči z Vídně nezodpověděli předepsané úlohy s takovou pílí a v takovém rozsahu a obsadili po svých písemných pracích takové pořadí, jaké posuzovatelé v císařském městě udělili jejich ústním přednáškám. Nejprve Andreas Baumgartner, poté Simon Schwalt a v nekonečném odstupu od obou Kirchberger Josef.* (Joseph Leopard Knoll)

[19] V konkurzní zprávě je uvedeno: … *kandidát konkurzu Novotný se pro nevolnost kolem 3. hodiny odpolední od konkurzu vzdálil, aniž by zanechal elaborátu. … Během tohoto času* [mezi pátou a sedmou odpoledne] *profesor Budin opustil sál, neboť čas shledal příliš krátkým, aby všechny tři otázky zevrubně zpracoval a čitelně předložil.* (Joseph Ildephonsus Steinheibl)

[20] Písemná zkouška probíhala bez přestávky od 8 hodin do 21 hodin.

[21] Dochovaný protokol byl přepsán v původním znění, tj. s dobovým pravopisem, nejednotným zápisem křestních jmen a příjmení a drobnými pravopisnými chybami, pouze zjevné chyby (např. vynechaná písmena a přepisy) byly opraveny.


Protocoll

Aufgenommen am 3ten März 1814 bey dem Concurse, welcher für die erledigte Lehrkanzel der reinen Mathematik am k: k: Lyceum zu Olmütz abgehalten wurde.

Gegenwärtige:
Michael Wenzel Voigt: k: k: Director der philosophischen Studien.
Jos: Leonard Knoll, Professor der Geschichte
Victor Lachner, Professor der Religionswissenschaft.
Joseph Mittgraf(?), Professor der Philosophie
Joseph Wobratzki(?), Professor der Landwirthschaft
Ildephons Reinschibl(?), Professor der Physik

Der Director zeigte an, daß sich drey Candidaten gemeldet haben, nemlich
Johann Seidlin(?), Professor der Mathematik am k: Gymnasium in Olmütz und Professor der griechischen Sprache an der philosophischen Facultät,
Franz Czastl(?), Professor der Ingenieurswissenschaften bey der hiesigen ständischen Akademie und Supplent der erledigten Lehrkanzel,
Johann Nowotny(?), Hörer der Rechte im zweyten Jahre.
Bey dem letzten Herrn Candidaten muß bemerkt werden, daß ihm ausdrücklich bewilligt, den Concurs in der Absicht mit-

Obrázek 2: *Část úvodní strany protokolu z konkurzu.*

Aufgenommen am 3ten März 1814 bey dem Concurse, welcher für die erledigte Lehrkanzel der reinen Mathematik am k.k. Lyceum zu Olmütz abgehalten wurde.

Gegenwärtige:
- Michael Wenzl Voigt: k.k. Director der philosophien Studien
- Jos. Leonard Knoll, Professor der Gessichte
- Victor Locher, Professor der Religionswissenschaft
- Joseph Wittgens, Professor der Philosophie
- Joseph Wobraska, Professor der Landwirtschaft
- Ildephons Steinheibl, Professor der Physik

Der Director zeigte an, daβ sich drey Candidaten gemeldet haben, nemlich
- Johann Budin, Professor der Mathematik am k. Gymnasium in Olmütz und Professor der griechischen Sprache an der philosophischen Facultät
- Franz Bartl, Professor der Ingenieurwissenschaften bey der hierortigen ständischen Akademie und Supplent der erledigten Kanzel
- Johann Novotny, Hörer der Rechte in zweyten Jahre

Bey dem letzten Herrn Candidaten muβ bemerkt werden, daβ er ausdrücklich bittet, den Concurs in der Absicht machen zu können, damit auf ihn künftig bey Erledigung einer Professur der Mathematik gnädigste Rücksicht genommen werde, indem er der übrigen zwey Candidaten als wirklichen Professoren sich nicht in Weg stellen wolle.

Diese Candidaten wurden angerufen. Der Director lies die versiegelten Fragen unter den Professoren, so wie unter den Candidaten herumgehen, um zu untersuchen, ob sie nicht abgebrochen und noch volkommen versiegelt wären. Jederman fand die Fragen unentbrochen und volkommen versiegelt.

Der Director überreichte diese versiegelte Fragen den Candidaten, damit Einer von ihnen das Couvert öffne. Der Professor Budin öffnete es.

Den Candidaten wurden nun die Fragen in die Feder dictirt, und wieder versiegelt für den mündlichen Concurs.

Die Professoren trafen unter einander folgende Eintheilung der Stunden, durch welche jeder einzeln zugegen seyn werde.

Der Anfang dieser Amtshandlung war um 8 Uhr Vormittags. Bis 11 Uhr wird Professor Locher, von 11 bis 1 Uhr Professor Steinheibl, von 1 bis 3 Professor Knoll, von 3 bis 5 Professor Wobraska, von 5 bis 7 Professor Knoll, von 7 bis 9 Professor Steinhübl Aufsicht halten.

gefertigter hielt die Aufsicht von 9 bis 11 Uhr Viktor Locher

Unterzeichneten -------------------------- von 11 – 1 Uhr

Jos. Leonard Knoll

Gefertigter bemerkt, daβ der Concurs Candidat Nowotny sich wegen Unpäβlichkeit um die 3te Nachmittags Stunde von Konkurse entfernt hat, ohne ein Elaborat zu hinterlassen.

Inspicient von 1 – 3 Uhr

Jos. Ild. Steinheibl

Inspicient von 3 bis 5 Uhr

Jos. Wobraska

Unterzeichneter hielt die Aufsicht wieder von 5 bis 7 Uhr.

Jos. Leonard Knoll

Während dieser Zeit hat der Professor Budin den Saal verlassen, weil er die Zeit zu kurz fand, alle drey Fragen erschöpfend zu bearbeiten und leserlich darzustellen.

Der Concurrent Prof. Bartl beendigte sein Elaborat nach verfloβene neunter Abendstunde, und überreichte dasselbe dem Unterzeichneten als Inspicienten von 7 – 9 Uhr, es wurde sogleich unter Couvert und Siegel gelegt und so dem Hr. Director eingehendigt.

Jos. Ild. Steinheibl

Fortsetzung des Protokolles am 4. Martius

um 11 Uhr vormittags

Da von den Candidaten nur Einer, nämlich Franz Bartl die Fragen ausgearbeitet hatte, die zwey übrigen aber abgetreten waren: so erschien zu dem mündlichen Konkurs natürlicherweise nur der erwähnte Franz Bartl. Nachdem alle Professoren und der Candidat versammelt waren, wurden die versiegelten Fragen, wie gestern, herumgegeben und zu sehen, ob sie nicht etwa eröfnet worden sind. Die gesammten Professoren und der Candidat fanden sie unerofnet und noch volkommen versiegelt. Hierauf wurden sie erbrochen und die für den mündlichen Vortrag allerhöchst gestellte Frage dem Candidaten vorgelegt mit dem Bedeuten, daβ er sie überdrucken hatte und nach höchstens einer halben Stunde darüber einen gehörigen mündlichen Vortrag [machen][22] halten solle.

Der Candidat erklärte auf den ersten Blick der Frage, daβ er keiner Verarbeitung und keines Uiberdenkens über diesem ihm sehr bekannten Gegenstand bedürfe, sondern bitte, sogleich die Kanzel besteigen zu dürfen. Dieses wurde ihm auch gestattet.

Nachdem der Candidat seinen Vortrag gehalten hatte, wurde festgesetzt, daβ jeder Professor über diesen mündlichen Konkurs seine Meinung schriftlich aufsetze und sie dem Directorate überreiche, sodann, daβ die schriftliche Ausarbeitung versiegelt werde, und so lange bey dem Directorate liegen bleibe bis die Ausarbeitungen von den Candidaten in Wien, wenn welche daselbst erschienen sind, angelangt seyn werden.

Da nun nicht weiter zu neuerinnern war wurde dieses Protokoll dieses Protokoll geschloβen und unterfertigt.

Olmütz am 4. Martius 1814

Jos. Leonard Knoll, Professor der Gessichte

M. W. Voigt, Director

Viktor Locher, Professor der Religionswisenschaft

Jos. Wittgens, Professor der Philosophie

Jos. Wobraska, Prof. der Landwirtschaft

Jos. Ild. Steinheibl, Prof. d. Physik

Urtheil

über die Bewerber um den erledigten Lehrstuhl der höheren Meβ= und Berechnungswissenschaft an der hohen Schule zu Olmütz

Nach Würdigung der schriftlichen Ausarbeitungen und des mündliches Vortrags kommen die Bewerber in folgende Rangordnung zu stehen.

Franz Bartl behauptet in jeder Hinsicht der ersten Platz. Seine Beantwortung der drey Fragen ist erschöpfend, gelehrt und beweist die vollständigste Uibersicht dieser Wissenschaft. Beym Angeben der zweyten Frage hat er zwar durch ein Versehen statt des Lehrsatzes vom Zwölfeck jene vom Zehneck auseinandergesetzt und bewiesen, dadurch aber die Aufgabe sich nur schwierigen gemacht, in ihrer Lösung jedoch eine vollendte Ausbildung entwickelt. Unterzeichneter führte während der Arbeiten der hiesigen Bewerber durch einige Stunden die Aufsicht und hatte hiebey Gelegenheit die Bemerkung zu machen, mit welcher heitere Unbefangenheit und Vertrautheit mit seinem Gegenstande Bartl seine Auflösungen

[22] Slovo je škrtnuto.

wiederschriebe. Dieselbe Bekanntschaft mit der Wissenschaft bewies er beym mündlichen Vortrag. Mit Verzichtleistung auf jede Vorbereitung bestieg er unverzüglich den Lehrstuhl und trug die ihm vorgelesene Aufgabe mit Klarheit, Lichtigkeit und ohne den geringsten Anstand zum allgemeinen Beyfall der anwesenden Beurtheiler vor. Seine Stimme ist wohltönend, die lateinische Sprache hat er in seiner Gewalt und seine körperliche Haltung wird beym Vortrag durch keine Unreif entstellt.

Jacob Kullik verdient den zweiten Platz. Seine Beantwortungen sind gleichfalls ziemlich erschöpfend und bewiesen, mit welchen eisernen Fleiβe derselbe die Wissenschaft der höhere Messungen und Berechnungen erlernte.

Die Bewerber von Wien haben vorgeschriebenen Aufgaben nicht mit derselben Fülle und in derselben Ausdehnung beantwortet, und sind auch nach ihren schriftlichen Ausarbeitungen in jene Stufenfolge zu setzen, welche die Beurtheiler in der Kaiserstadt ihrem mündlichem Vortrage anwiesen.

zuerst Andreas Baumgartner

hierauf Simon Schwalt

und in einer unendlichen Entfernung von diesen beyden

Kirchberger Joseph

Olmütz den 24. April 1814

Joseph Leonard Knoll
öffentlicher und ordentlicher
Lehrer der allgemeiner
Menschengeschichte

Gutachten

Uiber die schriftlichen Ausarbeitungen, die in Wien, Lemberg, und Olmütz erschienenen Concurrenten um die Ollmützer mathematische Lehrhanzel.

So viel sich aus den schriftlichen Ausarbeitungen aller Concurrenten, − aus den Urtheile über die mündlichen Prüfungen der Wiener, und lemberger Concurrenten, und aus den mündlichen Vortrage des Herrn Franz Bartl beurtheilen läβt, so verdient.

Herr Franz Bartl als der erste

Jakob Kullik − − zweyte und

Andreas Baumgartner als der dritte

vorgeschlagen zu werden.

Weil 1tens Herr Franz Bartl die Ausarbeitung vollkommen, fehlerfrey, und erschöpfend auseinander gesetzt hat, und obgleich er die 2te Frage aus bloβe Miβverständniβ verrükte; so gereicht er ihm eben zu einer noch gröβeren Ehre diese bey weiten schwierigen Aufgabe ordentlich gelöβt zu haben,

Herr Franz Bartl zeugte sich überhaupt sowohl in seinem schriftlichen Ausarbeitung; − als in seinen angenehmen deutlichen, und zusammenhängenden

Vortrage, als ein Mann von tiefer Einsicht, − von hohen Ausbildung mathematischer Kenntniβe; und wenn man noch seinen soliden, tadelsfreyen Charakter ohne Rücksicht auf seine persöhnliche , und seines Vaters Verdienste in Erwegung zieht: so muβ in jeden litterarischen Tallenten Freund der Wunsch rege werden, einen Mann, wie diesen an seinen Ort befördert zu wissen.

Gefertigte macht es sich zur angenehmen und gewissenschaften Pflicht ihn seiner vorzüglichen Eigenschaften wegen als den ersten Würdigsten vorzuschlagen.

Eine ehrenvolle Erwähnung verdient

2tens Herr Jakob Kullik. Seine Ausarbeitung verräth viel Belesenheit, umfassende Sachkenntniβ, und trägt überhaupt das Gepräge eines deutenden talentvollen zeugen Gelehrten an sich. Nur ein Bartl konnte ihm den 1ten Rang streitig machen, weil seine Ausarbeitung, − obgleich richtig, und vollkommen, − doch nicht so erschöpfend, wie jene des H. Bartls durchgeführt worden ist.

Gefertigten macht sich zur besonderen Pflicht, obgleich er nicht die Ehre hat, ihn persöhnlich zu kennen, selben Einem löbl: Directorat mit der Bitte anzuempfehlen; Eine Hochlöb. Studienhofkomission aufmerksam zu machen, womit dieses wissenschaftliche Talent besonders in einen so abstrakten Gegenstande höheren Orts unterstützt und angeeifert werde.

3tens Herr Andreas Baumgartner zeigte zwar hier, und da einige Blößen allein da die Fragen richtig verstanden und eben so richtig durchgearbeitet werden sind; so verdient er doch einige Aufmerksamkeit; weil es so wenige Individuen giebt, die sich einem so abstrakten Gegenstande, als die Mathematik ist, zum Berufsstudium widmen.

4tes Herr Schwalt hat nicht entsprechend gearbeitet, und Herr Kirchberger scheint die Fragen gar nicht verstanden zu haben.

Ollmütz den 22te April 814

Joseph Wobraska
Prof: der höheren
Landwirthschaft

Amtliches Gutachten über die bey dem am 3ten März 1814 in Wien, Lemberg und Ollmütz für die Besetzung der erledigten mathematischen Lehrkanzel am hiesigen k.k. Lyzäum vorschriftmäßig abgehaltenen Concurse, eingereichten Concurs=Elaborate, wie solche vom Unterfertigten nach bedachtsammer mehrmals wiederholter und gewissenhafter Prüffung rangfähig befunden worden.

A. Der Concurs Candidat Herr Franz Bartl, Professor des Genie Faches an der hiesigen Akademie der mährisch=schlesischen Stände, hat in seinem Elaborate in der Beantwortung der ersten Frage den wahren reinen umfassenden Begriff von rationellen und irrationellen Größen praziß und augenfällig aufgestellt, und den in der Concurs Frage verlangten Unterschied besagten Größen vollkommen genau angegeben. Er führt durch den klarsten und kündigsten Beweiß, daß Wurzeln, die sich nicht durch ganze Zahlen ausdrüken lassen, auch durch keinen Bruch vollständig angeblich sind, zur reinen Quelle der sogenannten Wurzelgrößen, deren Calcul er durch die im Ausdruk deutliche methode darstellt, das in der Evidenz schwankende Fundament dieser Methode kenntlich gemacht, die strengsten Bereiche auf eine von der gewöhnlichen Art abweichenden, aus dem Begriff der Wurzel Ausziehung rein hervorgehende keinem Zweifel unterliegende Basis aufgeführt, und somit seine Beantwortung der ersten Frage zu einer preißwürdigen Abhandlung erhoben, welche den Elaboraten als den Mann bewährt, bey dem die bescheidenste Skeptis im Felde der Evidenzlehre das durch ausdauerenden Fleiß erworbene zu seinem unverkennbaren Eigenthum umgeschaffen, und aus sich selbst wiedergebohren hat.

Nachdem die Gesetzte des Calculs der Wurzelgrößen vollständig auseinander gesehen wurden, berührt der Herr Elaborant das Anthunliche der Anwendung solcher Gesetze auf die sogenannten imaginaren Groβen, und stellt kurz und bündig die Anrichtigkeit des in Leonhard Eulers Schriften angenommenen Satzes [: daß die Wurzel aus solchen Größen sowohl positiv als negativ seyn könne :] augenfällig dar.

Bey Auflösung der zweyten Frage hat besagter Herr Elaborant statt der verlangten Arca des Dodecagons aus einem leichten Verstehen wegen der Aehnlichkeit des Namens, die Arca des Decagons bestimmt, und die wohl schweren Aufgabe mit einer Genauigkeit und richtigen Consequenz gelößt, welche den geübten und denkenden Beweißsteller unverkennbar anschaulich macht.

Das dritte Concurs Problem hat der besagte Herr Elaborant volkommen geordnet, und ohne alle Demonstrations Brüke rein aufgelößt. In dem ganzen Elaborate herrscht klares Licht systematische Ordnung und ein fester unschwankender Schritt, der sich auf geprüfte gründliche Einsicht stützt, und das unbemakelte Gepräge der Evidenz an sich trägt.

B. Der Concurs Candidat Andreas Baumgartner stellt zu Anfang der Auflösung der ersten Frage einen unrichtigen Begriff von rationellen und irrationellen Größen auf, und scheint die Begriffe dieser mit den Begriffen von geraden und ungeraden Zahlen verwechselt zu haben. Seine zur Erläuterung der gegebenen Erklärung aufgestellten Beyspiele lassen gar keine Zweifel übrig, daß er den wahren und ächten Unterschied, wie ihn die Concurs Frage verlangt, ganz falsch dachte, indem er z.B. die Zahlen 6 und 12 vollkommen enthalten als rationelle Zahlen, und 2 und 3 als irrationelle Zahlen darstellt, zu dem [:wahrscheinlich aus Uebereilung:] den Quotus der ersteren = 6 angiebt, da doch 6 in 12 nur 2 mal aber nicht 6 mal enthalten ist. Dann läßt sich ja doch wohl das Verhältniß von 3 : 2 volkommen angeben, nemlich durch den Ausdruck 3/2 oder 1,5. Wenn der Herr Baumgartner endlich sagt:

„eadem ratione inter irrationales 3 et √3 quotus exacte datur", so hat er sich das non datur gedacht, denn sonst würde er sich nicht einmal in den unrichtigen Begriffen consequent seyn. – Der Begrif von Wurzelgrößen, den der Herr Elaborant den Calculgesetzen dieser Größen nothwendig vorausschickt, ist etwas zu beschränkt; doch geben die darauf folgenden richtig, nur bisweilen etwas undeutlich, ausgedrükte Gesetze Zeugenschaft von geübter und verständiger Einsicht in die Funktions Manipulationen dieses Calculs. Die Beweise für die einzelnen Gesetze werden auf dem gewöhnlich als eingebrochen ist fortgeführt. – Wenn der Herr Elaborant die Beantwortung der ersten Frage mit den Worten beschließt:

Ad radicales quoque spectant quantitates imaginariae, quarum radices sunt plane impossibiles.

So glaubt der Unterzeichnete solches nicht in dem Sinne nehmen zu dürfen, als ob diese Größen den nemlichen Calculgesetzen unterliegen wie die Wurzelgrößen nach dem wahren Begriffe, denn in diesem Sinne würde die Angabe unrichtig seyn.

Die zweyte Concurs Aufgabe hat Herr Baumgartner vollständig aufgelößt. In der am Schluß dieser Auflößung beygesetzten, NB wo er sagt: „daß die Area Dodecagoni gefunden werde, wenn man die Circumferenz mit dem Perpendiculum e Lentes ad latus ductum multiplizire" – sollte dabey stehen: und durch 2 dividire.

In Auflösung des 3ten Problems hat Herr Baumgartner nichts verstehen, und hat seine Einsicht in die Verhältniß trigonometrischer Linien bewährt.

C. Der Concurs Candidat Herr Joseph Kirchberger zeigt in seinem Elaborate, daß er wohl etwas der Mathematik aehnliches aufgefaßt, aber auch nichts von soliden richtigen Wissen in diesem Fache erworben habe. – Sein Elaborat bleibt sich durch alle 3 Auflösungen gleich unter aller Kritik, wenn man auch von den Begriffen Sätzen und Beweisen abstrahirt, so wird man durch die Ausdrücke Triangulus und Dothetaconum, und quantitati totae & volkommen überzeugt, daß es dem Herrn Elaboranten nicht nur an der Wissenschaft des Faches, sondern an technisch-philosophischer Kenntniß gebreche.

D. Der Concurs Candidat in Lemberg Herr Jacob Philipp Kullik hat sein Elaborat durchgängig mit einer Vollständigkeit, Genauigkeit und mathematischer Ordnung gestellt, die nichts mehr verlangen läßt. Seine volkommen gelungene Arbeit läßt in ihm einen Mann sehen, der mit ausgezeichneten Talent und unermüdeten Fleiß im Felde der Mathematik sich ausgebildetes Wissen eigen gemacht, und dessen festes Gedächtniß ihm alles Gelesene als Eigenthum garantirt. Sein Geist hat reichliche Nahrung aus der strotzend vollen Vorrathskammer Vater Euklids gezogen, und zeigt sich in voller wissenschaftlicher Kraft.

E. Der Concurs Candidat Simon Schwalt hat in der Beantwortung der 1ten Frage dem Begriffe von irrational und rational Zahlen den von Wurzelgrößen in einem Beystiel Ausdruk vorangeschickt, nachdem doch nicht nicht nur die Frage selbst, sondern die natürliche Ordnung den Begrif von rational und irrational Zahlen und ihren wahren Unterschied voraus verlangt. Aber auch selbst dieser aus dem angenommenen Ausdruck der Wurzelgröße abgeleitete Begriff ist unrein dargestellt, weil der Herr Elaborant die rationalitat aus dem Quotus mit ganzen Zahlen, die irrationalitat aus dem Quotus mit gebrochenen Zahlen deducirt, da doch eine gebrochene Zahl auch ein exactes Verhältniß darstellen kann. Die Calculgesetze der Wurzelgrößen sind unvollständig angegeben, und jene Strenge in Beweisen, die die Mathematick unnachsichtlich fordert, vereißt man in diesem ersten Theile des Elaborates. Das 2te und 3te Problem sind richtig aufgelöst.

Nach des Unterfertigten besten Wissen und Gewissen verdienen die Herrn Concurs Candidaten nach ihren Elaboraten in folgender Rang Ordnung aufgeführt zu werden:

Als der 1te Herr Professor Franz Bartl
„ „ 2te Herr Jacob Kullik
„ „ 3te Herr Andreas Baumgartner
„ „ 4te Herr Simon Schwalt
„ „ 5te Herr Joseph Kirchberger

In Hinsicht des mündlichen Vortrages über die Concurs Aufgabe:

„Fractionum decimalium calculum exponere et demonstrare".

Hat der Herr Professor Franz Bartl nachdem er ohne Vorbereitung die Kanzel bestiegen, die Natur der Decimal Brüche, das Entstehen derselben, die Calcul Gesetze durch alle arithmetische Funktionen, und den

Nutzen, den solche Brüche in der Rechnung darbiethen, systematisch, vollständig, klar und deutlich mit vernehmlicher Stimme auseinander gesetzt.

Olmüz den 8ten Maj 1814

J. J. Steinheibl
k.k. Professor d. Physick

Gutachten über den mündlichen Vortrag des Concurrenten um der Lehrkanzel der reinen Mathematik zu Olmütz.

Als der provisorische Professor Franz Bartl die für den mündlichen Vortrag bestimmte Frage vernahm, bestieg er ohne eigener Vertretung alsogleich die Kanzel. Seinen Vortrag ze nen aus: ein männliches Benehmen, Gelüstigkeit der Sprache, Deutlichkeit und praecision der Entwicklung des Fragepunktes, Ordnung, Zusammenhang und Gründlichkeit in der Führung des Beweises.

Gutachten der schriftlichen Ausarbeitungen

Der provisorische Professor Franz Bartl hat die erste und dritte Frage richtig erörtert, dargestellt und volkommen bewiesen, und nur in Eifer konnte es geschehen, daβ er in Bezeichnung auf die zweyte Frage anstatt das Problem von Zwölfecken aufzulösen, das Problem von Zehnecken auflöβte, welches in der Thest schwerer ist. Jacob Kulik zeigt sich als ein gründlicher mathematischer Kopf, minder streng in gründlichen Beweisen stellte sich Andreas Baumgarter dar. Indessen hält Gefertigter keinen von diesen für unfähig für eine mathematische Kanzel. Da aber Jacob Kulik und Andreas Baumgarter dem provisorischen Professoren Franz Bartl sowohl in Ansehung der schriftlichen Ausarbeitungen, als ab erworbenen Verdiensten nicht gleichgesetzt werden können, so verdient der p. P.Franz Bartl die erste Stelle – Jacob Kulik und Andreas Baumgartner aber eine besondere Aufmuntern sich ferners den mathematischen Wissenschaft zu widmen.

Olmütz den 10ten April 814

Joseph Wittgens
k.k. ordl. u öffl. Professor
der Philosophie

Gutachten

des gefertigten, über den mündlichen Vortrag, des um die Lehrkanzel der reinen Mathematik zu Olmütz konkurirenden Herrn Franz Bartl, provisorischen Professor des besagten Lehrgegenstandes.

Herr Franz Bartl hat die vorgelegte Aufgabe ohne frühere Bedenkzeit, sogleich auch ihrer Bekanntmachung von der Kanzel so vorgetragen, auβer dadurch seine gründliche Fachkenntniβ, und die Fähigkeit, auch andern sein eigenes Wissen deutlich und begreiflich zu machen, vollkommen bewiesen, und durch die Vollstandigkeit grundlich= und Gelaüfigkeit, mit welchen er seinen guten Vortrag begann und vollendete, sich vollkommen tauglich gezeigt hat, diese Lehrkanzel, die er bereits von so genauer Zeit supliert, als wirklicher Professor übernehmen zu können.

Gutachten über die schriftliche Ausarbeitungen.

Die Hern Konkurrenten für die Lehrkanzel der reinen Mathematik zu Olmütz, Franz Bartl, Jakob Philipp Kullik, und Andreas Baumgartner haben die vorgelegten drey Aufgaben auf eine solche des auseinander gesezt, und so gründlich bewiesen, daβ daraus ihre Fähigkeit, einer mathematischen Lehrkanzel vorzustehen, einleuchtet. Und nur die von erworbenen Verdienste um diese Kanzel in Olmütz von Seite des Herrn Franz Bartl bewogen den Gefertigten, denselben an die erste Stelle zu sitzen, den, wenn er auch aus einem Miβverstande statt das Problem von Zwölfecken, jenes von Zehnecken behandelte, und bewieβ; doch dadurch hinlänglich zeigte, daβ er auch hätte dieser Miβverstand nicht stellgehabt, dem ersten eben so würde gewachsen gewesen seyn.

Die beiden andern Herrn Jakob Kullik und Andreas Baumgartner verdienen durch ihr musterhaftes Bestreben, sich in den mathematischen Wissenschaften fortwährend auszubilden, eine besondere Auszeichnung und Aufmunterung.

Olmütz den 10ten Mai 1814 Viktor Locher, Prof. der Religionswissenschaft

Literatura

[1] Univerzitní matrika, fond Univerzita Olomouc, kniha č. 6, Zemský archív v Opavě, pobočka Olomouc.

[2] Podací protokoly rektorátu lycea, fond Univerzita Olomouc, knihy č. 894 až 896, Zemský archív v Opavě, pobočka Olomouc.

[3] Podací protokoly rektorátu filozofické fakulty, fond Univerzita Olomouc, knihy č. 968 až 969, Zemský archív v Opavě, pobočka Olomouc.

[4] Spisy rektorátu lycea, fond Univerzita Olomouc, karton č. 131–133, Zemský archív v Opavě, pobočka Olomouc.

[5] Spisy direktorátu filozofické fakulty, fond Univerzita Olomouc, karton č. 396–397, Zemský archív v Opavě, pobočka Olomouc.

[6] Seznamy přednášek, fond Univerzita Olomouc, karton č. 544, Zemský archív v Opavě, pobočka Olomouc.

Adresa

Doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT v Praze
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
e-mail: *becvamar@fd.cvut.cz*

Doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *becvamar@fd.cvut.cz*

RNDr. Luboš Moravec
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *moravec@karlin.mff.cuni.cz*

PhDr. Jan Škoda
Archiv hlavního města Prahy
Archivní 6
149 00 Praha 4
e-mail: *Jan.Skoda@praha.eu*

O PASCALOVĚ VĚTĚ

PAVEL BOHÁČ

Abstract: This paper deals with Pascal's first serious mathematical work *Essay on Conic Sections*. In this work he presented an important result of projective geometry that became known as the *Pascal's theorem* or the *Mystic hexagon theorem*. Blaise Pascal discovered this proposition in 1639 when he was only sixteen and published it the next year.

1 Úvod

Blaise Pascal dnes patří mezi nejproslulejší přírodovědce a myslitele 17. století. Svoji vědeckou práci započal poměrně brzy, již ve svých šestnácti letech totiž objevil významné tvrzení projektivní geometrie o vztazích mezi body na kuželosečkách známé dnes jako *Pascalova věta*. Tento výsledek publikoval v následujícím roce formou eseje stručně nazvané *Essay povr les coniqves* [Pojednání o kuželosečkách] (1640) ([1]). V tomto příspěvku se nejprve seznámíme s klíčovými momenty Pascalova života, především těmi, jež předcházely jeho prvnímu zásadnímu objevu. Dále popíšeme strukturu dotyčné eseje, povšimneme si přitom podrobněji uvedené původní podoby Pascalova výsledku v porovnání s jeho moderní formulací.

2 Pascalův život

2.1 Mládí

Blaise Pascal se narodil 19. června 1623 ve městě Clermont (dnes Clermont-Ferrand) ve střední Francii jako třetí potomek a jediný syn Étiennea Pascala (1588–1651). Étienne byl povoláním právník, zajímal se však o vědu a především matematiku. Pascalova matka, Antoinette Begon (1596–1626), zemřela v jeho pouhých třech letech. V roce 1631 se rodina přestěhovala do Paříže, kde se Étienne rozhodl, že bude své děti vzdělávat sám, neboť všechny vykazovaly mimořádné intelektuální nadání, zejména syn Blaise ([2]).

Od svých čtrnácti let doprovázel mladý Pascal svého otce na setkání kruhu matematiků a fyziků vzniklého kolem osobnosti Marina Mersennea (1588–1648),[1] františkána a snad nejvýznamnější osoby vědeckého světa první poloviny 17. století. Mezi tyto myslitele se řadil i Girard Desargues (1591–1661), francouzský matematik, inženýr a architekt, jehož průkopnickou práci na poli projektivní geometrie začal Blaise Pascal v této době silně obdivovat ([3]).

2.2 Pozdější Pascalova léta a objevy

Blaise Pascal během svého života významně ovlivnil mnohá odvětví matematiky. Aby otci ulehčil zdlouhavou početní práci při evidenci daní, zkonstruoval v roce 1642 první funkční mechanický kalkulátor později známý jako *Pascalina*.[2] S jeho jménem je rovněž spojena výhodná tabulková reprezentace binomických koeficientů známá jako *Pascalův trojúhelník*, který pro Evropu objevil a kolem roku 1653 popsal ve svém *Traite dv triang-*

[1] Známého rovněž jako Otec Mersenne.
[2] Za vynálezce úplně prvního mechanického kalkulátoru (cca 1624) bývá považován německý profesor hebrejštiny a astronomie Wilhelm Schickard (1592–1635). Je však pravděpodobné, že jeho početní stroj nebyl nikdy dokončen, případně nebyl plně funkční.

le arithmetiqve [Pojednání o aritmetickém trojúhelníku] (1665).[3] Tato práce spolu s Pascalovou korespondencí s Pierrem de Fermatem (1601–1665) položila základy počtu pravděpodobnosti a kombinatoriky. Pascal se přirozeně podepsal i na vývoji fyziky, především jeho práce o tlaku a experimentální důkaz existence vakua jsou v této souvislosti nejčastěji zmiňovány ([3], [4]).

Po roce 1654 Pascal prakticky zanechal vědecké práce[4] a věnoval svoje myšlenkové úsilí filosofii, zejména filosofii křesťanství ([2]). V tomto směru bývají uváděny jeho *Lettres provinciales* [Listy provinciálovi] (1656–1657). Avšak za vůbec nejzávažnější dílo Pascalovy filosofické tvorby jsou považovány jeho *Pensées* [Myšlenky] (1657–1658), v nichž Pascal obhajuje víru v Boha na základě racionálního přístupu. Právě odtud pochází známá *Pascalova sázka*.[5] Obě zmíněná Pascalova díla patří, díky bohatosti a vytříbenosti jazyka a myšlení, k vrcholům francouzské prózy a vynesla tak svému autorovi rovněž literární slávu ([4]).

Blaise Pascal trpěl celý svůj život chatrným zdravím. Zemřel v Paříži 19. srpna 1662 ve třiceti devíti letech, a to patrně následkem zhoubného nádoru žaludku a jeho rozšíření do mozku ([3]).

3 Pojednání o kuželosečkách

Essay povr les coniqves [Pojednání o kuželosečkách] (1640) představuje kratší francouzsky napsanou práci,[6] kterou Blaise Pascal navázal na myšlenky Girarda Desarguesa (stručně komentovaný anglický překlad originálu [5] je uvedený v [6]).

Pascal zahajuje svůj text soupisem tří definic, z nichž první, zavádějící pojem svazku přímek[7] jakožto souhrnu[8] všech přímek procházejících týmž bodem nebo přímek vzájemně rovnoběžných, je takřka doslova převzata právě od Desarguesa. Druhá a třetí definice pak vymezují pojmy kuželosečka a přímka. Pascal chápe kuželosečku jako kružnici, elipsu, hyperbolu, parabolu nebo dvě různoběžné přímky, neboť právě takové jsou řezy kuželové plochy rovinou.[9] Přímkou pak má na mysli úsečku v dnešním pojetí.

Následuje stěžejní část Pascalovy práce, která v sobě skrývá právě historicky první zaznamenanou formulaci Pascalovy věty. Tato věta v moderní podobě říká, že pro libovolnou šestici bodů dané kuželosečky spojených šesti úsečkami tak, aby tvořily šestiúhelník (který může být nekonvexní či dokonce zkřížený) platí, že průsečíky jeho protilehlých stran (prodloužených, pokud je to nezbytné) leží na jediné přímce, která bývá nazývána *Pascalova přímka* tohoto šestiúhelníku (obrázek 1 zachycuje možné uspořádání šestice bodů na kružnici do šestiúhelníku *PKNOVQ*).[10]

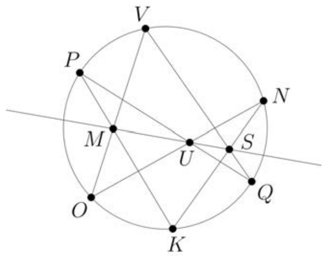
---

[3] Dotyčné pojednání vyšlo až po Pascalově smrti.
[4] Mezi lety 1658 a 1659 ještě napsal o cykloidě a jejím využití při výpočtu objemu těles.
[5] Pascalova sázka spočívá v uvážení rizika a zisku přijetí či odmítnutí víry. Pokud Bůh neexistuje, věřící netratí mnoho a nevěřící nezíská nic. Opačný případ však znamená zatracení ateisty oproti nezměrnému zisku věřícího.
[6] Celý originál, jenž se zachoval pouze ve dvou exemplářích, je vytištěn na jediné hustě popsané stránce.
[7] V originále „ordre de lignes“, resp. „ordonnance de lignes“ [přímky téhož řádu].
[8] V originále „la multitude“ [množství], v současné české matematické terminologii bychom řekli množina.
[9] V tomto výčtu Pascal opomenul situaci, kdy rovina má s dotyčnou kuželovou plochou společný pouze jeden bod, její vrchol, nebo jednu (dvojnásobnou) přímku.
[10] Poznamenejme, že pokud je tato věta formulována v eukleidovské rovině, je navíc nutné zvlášť ošetřit případ, kdy některá z dvojic protilehlých stran onoho šestiúhelníku je tvořena dvěma rovnoběžkami; v projektivní rovině je takové ošetření přirozeně zbytečné.

Klíčová pasáž Pascalova pojednání sestává celkem ze tří (nedokazovaných) lemmat. Vybereme první z nich a uvedeme je v českém překladu a plném znění opatřeném (nepůvodním) obrázkem 1[11] ke snazšímu pochopení samotné formulace:

Lemma I.

Pokud v rovině M, S, Q jsou bodem M vedeny dvě přímky MK, MV a bodem S jsou vedeny dvě přímky SK, SV a pokud K je průsečíkem přímek MK, SK a V je průsečíkem přímek MV, SV a A je průsečíkem přímek MK, SV[12] a μ je průsečíkem přímek MV, SK a pokud dvěma ze čtyř bodů A, K, μ, V, které neleží na téže přímce jako body M, S ani body K, V, prochází kružnice protínající přímky MV, MK[13], SV, SK v bodech O, P, Q, N, pak tvrdím, že přímky MS, NO, PQ jsou téhož řádu.[14]



Obr. 1: Šestiúhelník *PKNOVQ*

Druhé lemma pak říká, že pokud jedinou přímkou prochází několik rovin a pokud uvažujeme libovolnou další rovinu, pak všechny vzniklé průsečnice oněch rovin náleží jednomu svazku přímek. Toto druhé lemma Pascalovi umožňuje formulovat lemma třetí[15] s týmiž předpoklady, jako jsou vysloveny v prvním lemmatu, avšak obecněji pro jakoukoliv kuželosečku, tedy nejen kružnici. Právě toto zobecněné tvrzení, byť v jiné podobě, než jakou obsahují současné učebnice, představuje slavné tvrzení Pascalovy věty.

Aby Pascal dokázal šíři svých úvah, uvádí v další části své práce řadu tvrzení (opět nedokazovaných) týkajících se převážně poměrů jistých součinů délek úseček vzniklých na kuželosečkách za pomoci rozličných uspořádání přímek. Právě v této části se vyznává ze svého hlubokého obdivu k práci a erudici Girarda Desarguesa a vyjadřuje mu svoji vděčnost za možnost objevit několik dalších poznatků spojených s kuželosečkami.

V závěru práce Pascal podává seznam několika úloh, jež je nyní schopen na základě svých myšlenek řešit, například jak sestrojit z libovolného bodu tečnu k libovolné kuželosečce apod. Dále vyjadřuje svůj záměr rozpracovat téma kuželoseček do podoby ucelené práce, která by vyšetřila všechny jejich základní vlastnosti (průměrů, tečen atd.). Přiznává však, že zatím, díky své nezkušenosti, není na tento úkol plně připraven, současně však věří, že dá-li mu Bůh sílu, bude toho později schopen.

Kvalita Pascalovy první práce byla ohodnocena velmi vysoko; o její úrovni svědčí ocenění Pařížskou královskou akademií i pochyby Reného Descartesa (1596–1650) ohledně jejího autorství, ze kterého podezříval Pascalova otce Étiennea ([3]). Právě Des-

[11] Pascalova práce [5] obsahuje celkem tři ilustrace, jedna se přitom vztahuje mimo jiné i k prvnímu lemmatu. Námi použitý obrázek však nevychází přímo z originálního dokumentu, neboť by působil poněkud nepřehledně (oproti originálu jsme pozměnili uspořádání elementů a vynechali jsme označení bodů A a μ, které sice figurují ve formulaci lemmatu, avšak nejsou v dané situaci přímo podstatné).

[12] V originále je chybně uvedeno přímo označení „*MA*, *SA*" ([7]).

[13] V původní Pascalově práci se objevuje nepřesné označení „*MP*" přímky *MK* ([7]).

[14] Tj. jedná se o přímky téhož svazku (buď jsou vzájemně rovnoběžné, nebo se všechny tři protínají v témže bodě, na obrázku 1 je jím bod *U*).

[15] *Na základě těchto dvou lemmat a několika jednoduchých úvah …*, které ovšem nejsou v originálu [5] uvedeny. Druhé lemma umožňuje zdůvodnit projektivní souvislost kružnice s ostatními kuželosečkami.

cartes považoval objev Pascalovy věty za doklad toho, že tehdejší matematika, resp. geometrie, nejen dostihla, ale již překonala matematiku antickou ([4]). Pascalova věta totiž zobecňuje tvrzení Pappovy věty o šestiúhelníku připisované Pappovi z Alexandrie (cca 290 až cca 350), kterou (včetně triviálních podob) obdržíme z Pascalovy věty, pokud za dotyčnou kuželosečku vezmeme dvojici různých přímek v rovině.

4 Závěr

Blaise Pascal později opravdu zahájil práci na obsáhlejším díle o kuželosečkách. Jeho první část takřka dokončil v březnu 1648 (na práci pokračoval v letech 1653 a 1654), ovšem celé dílo zřejmě nikdy nedokončil. Bohužel ani sepsaná první část se nedochovala, jistou představu o jejím obsahu a struktuře si lze udělat jen z poznámek, které si k dílu vypsali Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) a Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (1651–1708) ([3]). Není proto jasné, zda Blaise Pascal svůj slavný výsledek z roku 1639 kdy vůbec dokázal, ani to ovšem nijak nesnižuje význam jeho objevu.

Literatura

[1] Stillwell J.: *Mathematics and Its History*. Third edition, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2010, 150–156.

[2] Wikipedia (The free encyclopedia): *Blaise Pascal* [online]. Poslední revize 19. února 2014 [cit. 10. 3. 2014].

http://en.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal.

[3] O'Connor J. J., Robertson E. F.: *The MacTutor History of Mathematics archive: Blaise Pascal* [online]. Poslední revize prosinec 1996 [cit. 10. 3. 2014].

http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Biographies/Pascal.html.

[4] Wikipedia (The free encyclopedia): *Blaise Pascal* [online]. Poslední revize 30. ledna 2014 [cit. 10. 3. 2014].

http://cs.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal.

[5] Pascal B.: *Essay povr les coniqves*. Paříž, 1640.

[6] Smith D. E.: *A Source Book in Mathematics*. Volume 3, Dover Publications, Inc., Minola, New York, 1959, 326–330.

[7] Taton R.: *L' « Essay pour les Coniques » de Pascal*. In Delorme S., Taton R. (eds.): Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, Volume 8, No. 1, Presses universitaires de France, Paříž, 1955, 1–18.

Adresa

RNDr. Pavel Boháč
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita
Kotlářská 2
611 37 Brno
e-mail: *pavel.bohac@mail.muni.cz*

„ZASADY ALGEBRY WYŻSZÉJ“ WŁADYSŁAWA ZAJĄCZKOWSKIEGO

DANUTA CIESIELSKA

Abstract: Treatise *Zasady algebry wyższéj* (*Principles of Higher Algebra*) by Władysław Zajączkowski, professor of mathematics at the Polytechnic School and the University in Lvov, a member of the Academy of Sciences and Fine Arts in Kraków, was published in 1884. In the book, which is an extract of lectures held in the Polytechnic School in Lvov a modern course in algebra was presented. In addition to basic information about the numbers and algebraic operations, the most important results of nineteenth century algebra were included there. Zajączkowski presented the theory of determinants and its application to solving systems of equations and the theory of algebraic equations. The most interesting are Bezout's theorem (with rigorous proof) and Ruffini-Abel's theorem and information that the collection of solutions of Abel's equation has structure of a group.

1 Wstęp

1.1 Polskie monografie i podręczniki algebry od 1750 do 1884

W latach 80. wieku XIX materiał dotyczący algebry w podręcznikach ograniczał się zwykle tylko do podstawowych zagadnień. W czasie stu lat poprzedzających wydanie dzieła Zajączkowskiego można wymienić zaledwie kilka polskich monografii z algebry. W drugiej połowie XVIII wieku w Polsce korzystano z dwóch podręczników: tłumaczenia E. Bézouta *Nauka matematyki do użycia artyleryi francuzkiey* [3] oraz oryginalnego dzieła[1] Jana Śniadeckiego *Rachunku algebraicznego teorya przystosowana do linii krzywych* [24]. Początek XIX stulecia przynosi kolejne książki: tłumaczenia S. F. Lacroix [15] – [16], P.L.M. Bourdona [4] oraz oryginalne dzieła: A. Wyrwicza [31] i G. A. Hreczyny [12]; wtedy powstało również dzieło A. Krzyżanowskiego [14]. Wydawane były także książki przeznaczone do nauczania w szkołach: J. J.Węgleńskiego [30], A.S.Ustrzyckiego [28] oraz tłumaczenie Jakubowicza rosyjskiego dzieła [13]. Przełom XIX wieku co prawda dostarczył wielu kolejnych dzieł, jednak wiele z wydanych wówczas książek było przeznaczone dla uczniów szkół średnich, nie zaś studentów. Wydano wtedy tłumaczenia na język polski: J. A. Bretthnera [5] oraz M. Mayera i Ch. Choqueta [18] oraz oryginalne dzieła: K. Lilbelta [17] i J. K. Steczkowskiego [23]. W bibliotece Politechniki we Lwowie znajdowały[2] się książki: Bézouta, Lacroix [15], Krzyżanowskiego, Węgleńskiego, Ustrzyckiego oraz Jakubowicza.

Poważną zmianę można odnotować dopiero w latach 70. XIX w. Powstało wtedy Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu, a uczeni w nim skupieni mieli na celu zapoznanie polskiego czytelnika z najnowszymi osiągnięciami matematyki. W Krakowie utworzono

---

[1] O losach tego dzieła pisała J. Dianni: *Dzieje dzieła Jana Śniadeckiego "Rachunku algebraicznego teoria zastosowana do linii krzywych" w świetle jego korespondencji*, Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 1(1977), 59–71.

[2] Za: *Katalog biblioteki c.k. Szkoły Politechnicznej. Zeszyt 1. Matematyka, geometria wykreślna*, nakładem Szkoły Politechnicznej, Lwów, 1894.

Akademię Umiejętności, a skupieni w jej gronie uczeni rozpoczęli działalność publikacyjną na dużą skalę. Znaczenie ma również wprowadzenie autonomii w Galicji, i w związku z tym języka polskiego, jako języka wykładowego, do szkół wszelkich poziomów. Powstały wtedy pierwsze polskie, w miarę wyczerpujące temat, opracowania teorii wyznaczników: W. Kretkowskiego [27], M. Baranieckiego [2] oraz A. Żelewskiego [33] oraz A. Sągajły [21] tłumaczenie drugiego tomu dzieła G. Salmona [20] i L. O. Hessego [10]. Niestety do roku 1884 nie powstała polska książka o teorii Galois, chociaż pewne przesłanki zdają się potwierdzać tezę, że planowano wydanie takiego dzieła, niewykluczony jest także współudział Zajączkowskiego w jego tworzeniu (więcej informacji na temat można znaleźć w [6]). W bibliotece Politechniki Lwowskiej znajdowały się książki: Kretkowskiego, Baranieckiego, Żelewskiego, Salmona (oryginał) oraz Hessego.

1.2 O Zajączkowskim

Władysław Zajączkowski (1837–1898) absolwent i wykładowca Uniwersytetu Jagiellońskiego, profesor Carskiego Uniwersytetu w Warszawie, Akademii Technicznej we Lwowie; był dziekanem Wydziału Inżynierii oraz Wydziału Budownictwa Politechniki we Lwowie, dwukrotnie był rektorem tej uczelni. Prowadził również wykłady na Uniwersytecie we Lwowie[3]. Zajączkowski był członkiem Akademii Umiejętności w Krakowie, Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu oraz członkiem Rady Szkolnej Krajowej[4].

2 *Zasady algebry wyższéj*

2.1 O *Zasadach algebry wyższéj* Zajączkowskiego

Zasady algebry wyższéj Władysław Zajączkowski opracował na podstawie wykładów prowadzonych w Szkole Politechnicznej we Lwowie. Autor we wstępie informuje: „Jéj przeznaczeniem jest zaradzenie brakowi odpowiedniego dzieła, któreby, jako podręcznik, można polecić słuchaczom" ([32], s. III). Oczywiście Autor ma na myśli podręcznik napisany w języku polskim.

Książka *Zasady algebry wyższéj* podzielona została na piętnaście rozdziałów. Są to kolejno: *O liczbach*, *O działaniach algebraicznych*, *O funkcyjach algebraicznych w ogólności*, *O funkcyjach pochodnych*, *O pierwiastkach funkcyj całkowitych jednéj zmiennéj*, *O funkcyjach symetrycznych pierwiastków i o rugowniku*, *O równaniach algebraicznych*, *Rozwiązanie równań algebraiczne*, *Rozwiązanie równań arytmetyczne*, *O funkcyii algebraicznéj i wymiernéj i ułomkowéj*, *O funkcyjach algebraicznych uwikłanych*, *O wyznacznikach*, *Zastosowanie teoryi wyznaczników do rozwiązania układu równań algebraicznych*, *Teoryja form kwadratowych*. Książka został oparta na wykładach odbywających się w Szkole Politechnicznej we Lwowie. Czas tych wykładów można oszacować na podstawie czasu pracy Zajączkowskiego w Szkole Politechnicznej. W latach 1876−1898 Zajączkowski prowadził wiele kursów matematyki, a zwykle był to kurs wyższy matematyki. Z roku akademickiego 1878/79 zachował się program wykładu (za [8]), w którym wyraźnie zaznaczono zagadnienia z zakresy algebry, a hasła wymienione w tym programie zbliżone są do tematów rozdziałów *Zasada algebry wyższéj*.

[3] O burzliwych losach Kretkowskiego i Zajączkowskiego na Uniwersytecie Lwowskim można przeczytać w: D.Ciesielska, *Sprawa doktoratu Władysława Kretkowskiego*, Dzieje matematyki polskiej II, Wyd. Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 2013, 7–38.

[4] Więcej informacji można znaleźć: S. Domoradzki, Z. Pawlikowska-Brożek, D. Węgłowska (red.): *Słownik biograficzny matematyków polskich* , Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa, Tarnobrzeg, 2003.

W spisie wykładów zgłoszonych na Uniwersytecie Lwowskim na początku lat 80. XIX wieku dostępnym w Archiwum Obwodowym we Lwowie nie udało[5] się znaleźć żadnego wykładu z zakresu samej algebry.

Zajączkowski zaprezentował oryginalne ujęcie tematu. Lista monografii i artykułów, na które się powołuje jest pokaźna. Warto zwrócić uwagę na duży nacisk na zaprezentowanie efektywnych metod oraz metod numerycznych. Pobieżny ogląd tytułów skłania do refleksji nad pojawieniem się haseł z zakresy analizy matematycznej w książce poświęconej algebrze, jednak zaliczenie elementów rachunku różniczkowego do algebry w tamtych czasach nie było nietypowym rozwiązaniem[6]. Szczegółowe przedstawienie zawartości całej książki nie wydaje się celowe. Tylko te, których znaczenie dla monografii jest wyjątkowe oraz zawierają bardzo interesujące treści zostaną szczegółowo zaprezentowane. Są to na przykład rozdziały o algebraicznych i numerycznych metodach rozwiązywania równań algebraicznych, o funkcjach symetrycznych pierwiastków równania algebraicznego oraz zastosowaniu teorii wyznaczników do rozwiązywania układów równań algebraicznych.

2.2 Rozdział VI *O funkcjach symetrycznych pierwiastków i o rugowniku*

Wprowadzone zostało klasyczne twierdzenie o związku współczynników równania algebraicznego oraz wartości kolejnych funkcji symetrycznych pierwiastków równania algebraicznego. Jednak Zajączkowski nie poprzestaje na tym prostym związku, podaje i dowodzi twierdzenie: „Każda funkcyja symetryczna i wymierna pierwiastków funkcyi całkowitéj[7] $f(z)$ jednéj zmiennéj z daje się przedstawić pod postacią funkcyi wymiernéj współczynników téjże funcyi.” ([32], s.70).

Kolejne cztery paragrafy poświęcone zostały teorii eliminacji zmiennych. W pierwszym z nich przedstawione zostało pojęcie rugownika dwóch wielomianów jednej zmiennej, a w następnym twierdzenie jednoznacznie związujące istnienie wspólnych pierwiastków dwóch wielomianów z zerowaniem się ich rugownika. Kolejny rozdział to w istocie wprowadzenie do dowodu twierdzenia Bézouta o liczbie rozwiązań układu dwóch równań algebraicznych, czyli twierdzenie o tym, że liczba wspólnych rozwiązań dwóch równań algebraicznych nie przekracza iloczynu stopni tych równań. Zajączkowski dowodzi, że stopień rugownika dwóch wielomianów dwóch zmiennych jest iloczynem stopni tych wielomianów. W rozważaniach tych konieczne jest prawidłowe wprowadzenie pojęcia krotności przecięcia dwóch krzywych. Przyjmuje się, że pojęcie to, jako pierwszy, w roku 1873r. prawidłowo określił G. H. Halphén (zob. [9]). Zajączkowski mógł, w trakcie pisania monografii, znać te wyniki, jednak treść wykładu tego nie potwierdza[8].

W paragrafie *Twierdzenie Bézout'a* Zajączkowski podaje twierdzenie w bardziej ogólnej postaci:

„[...] *k funkcyj odpowiednio stopnia* $n_1, n_2, \dots, n_k$ *z* k *zmiennymi posiada* $n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ *rozwiązań*.” ([32], s. 83)

---

[5] Znajdują się tam zaś, na rok akademicki 1882/3, propozycja Kretkowskiego wykładu *Teorya czwarków Wiliama Hamiltona wraz z niektóremi zastosowaniami do geometryi*.

[6] Warto zwrócić uwagę, że w latach 70−80 XX wieku w polskich szkołach również formalnie zaliczano podstawy analizy matematycznej do algebry.

[7] Zajączkowski ma na myśli wielomian algebraiczny.

[8] W bibliotece PL znajdowały się tylko powstały później traktatu Halphena z teorii funkcji eliptycznych.

Wypowiedź została uzupełniona pewnym wywodem, który zapewne Zajączkowski uważał dowód. Niestety taka wersja twierdzenie Bézouta wymaga większej formalizacji wprowadzonych pojęć, a ta nastąpiła później.

2.3 Rozdział VIII *Rozwiązanie równań algebraiczne*

Pierwszy paragraf rozdziału zawiera metodę Cardano rozwiązania dowolnego równania stopnia trzeciego. Wprowadzone zostało podstawienie $x = z - \frac{b}{a}$, które sprowadza wyjściowe równanie $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ do prostszej postaci $z^3 + qz + r = 0$. Następnie użyto podstawienia $z = u + v$ doprowadzającego drugie równanie do układu $3uv + q = 0$ oraz $u^3 + v^3 + r = 0$, z którego łatwo otrzymuje się równanie $u^6 + ru^3 - \frac{q^3}{27} = 0$.

Zajączkowski przedstawia także metodę rozwiązania równania stopnia czwartego; zwanego przez niego *„równaniem dwukwadratowym”*. Oczywiście rozpoczyna od podstawienia, dzięki któremu sprowadza równanie stopnia czwartego do prostszej postaci, w której nie ma składnika stopnia trzeciego. Następnie nie stosuje metody Ferrary, a wykorzystuje podstawienie Eulera $z = u + v + w$, analogiczne do podstawienia Cardano. Podstawienie to doprowadza go w rozważaniach do układu trzech równań algebraicznych, który prowadzi do równania stopnia trzeciego. Mamy zatem otwartą drogę do uzyskania rozwiązania. Niestety rozwiązanie to nie jest zupełnie efektywne i oczywiście jawne wzory nie zostały podane.

Najbardziej przyciągają uwagę następne paragrafy, zatytułowane kolejno: *Niemożność rozwiązania algebraicznego równań algebraicznych ogólnych stopni wyższych nad czwarty*, *Równanie Abela*, *Równanie Abela, którego pierwiastki tworzą jedną grupę*, *Rozwiązanie algebraiczne równań dwuwyrazowych*. W paragrafach tych Zajączkowski odwołuje się do wielu oryginalnych prac, na przykład w paragrafie *Niemożebność rozwiązania algebraicznego równań algebraicznych ogólnych stopni wyższych nad czwarty* do prac Ruffiniego [25], Abela [1] oraz trzeciego wydania monografii[9] Serreta [22]. Zajączkowski w tych paragrafach wyłożył wyniki teorii równań algebraicznych bezpośrednio poprzedzające wprowadzenie klasycznej teorii Galois[10]. Rozpoczął od dowodu twierdzenia Ruffiniego-Abela. Zacytujmy wypowiedź tego twierdzenia za Zajączkowskim:

„[...] *równanie algebraiczne stopnia wyższego nad czwarty ze współczynnikami ogólnymi nie może być rozwiązane algebraicznie, tj. że jego pierwiastków nie można przedstawić pod postacią funkcyj algebraicznych współczynników*.” ([32], s.112)

W następnych paragrafach przywołany został przypadek równania stopnia wyższego niż 4, które można rozwiązać przez pierwiastniki, poprzedzony informacją o tym, że Abel dowiódł, że wymierna zależność między współczynnikami równania redukuje problem do rozwiązania równania stopnia niższego, co może w ostateczności prowadzić do

---

[9] Warto zwrócić uwagę, że jest to pierwsza książka w której opisana została klasyczna teoria Galois.

[10] O recepcji klasycznej teorii Galois w Polsce w XIX wieku można przeczytać w [6].

równania rozwiązywalnego przez pierwiastniki. Szczegółowo zostało rozważone równanie Abela postaci:

$$z^{16} + z^{15} + \ldots + z + 1 = 0$$

na przykładzie którego przedstawiona jest metoda wyznaczania jego pierwiastków oraz zilustrowane zostało pojęcie grupy pierwiastków równania Abela. Na koniec Zajączkowski zauważa, że przedstawiony został algebraiczny sposób rozwiązania geometrycznego zagadnienia wpisania w okrąg siedemnastokąta foremnego.

Brak w książce rozdziałów poświęconych teorii Galois. Warto zwrócić uwagę, że teorią tą interesował się Władysław Kretkowski, przyjaciel Zajączkowskiego. Zainteresowanie potwierdza odnaleziony w spuściźnie rękopis (prawdopodobnie Kretkowskiego) w którym zaprezentowano klasyczną teorię Galois [26].

2.4 Rozdział IX *Rozwiązanie równań arytmetyczne* oraz rozdział X *Rozwiązanie równań arytmetyczne (dokończenie)*

W rozdziałach IX oraz X opisane zostały numeryczne metody rozwiązania równań algebraicznych. Obecnie, wraz z dominującą rolą komputerów, nastąpił gwałtowny wzrost zainteresowania metodami numerycznymi. Opisane przez Zajączkowskiego metody rozwiązywania równań w XIX wieku należały do kanonu akademickiego wykształcenia, szczególnie wykształcenia technicznego. Rozważania rozpoczyna twierdzenie, które w istocie jest pewną wersją twierdzenia Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich. Następne twierdzenie – twierdzenie Rolle'a – służy głównie do wprowadzenie wniosku o lokalizacji rzeczywistych pierwiastków równania algebraicznego: *„między dwoma kolejnymi pierwiastkami równania $Df(x) = 0$ znajduje się co najwyżej jeden pierwiastek równania $f(x) = 0$ ”*. Kluczowe w tym rozdziale jest przedstawienie oraz zilustrowanie na konkretnym przykładzie metody Sturma w jej klasycznej postaci. Zajączkowski, po długim i raczej nieczytelnym dowodzie twierdzenia Sturma, wyprowadza, jako proste zastosowanie metody do przedziału o końcach 0 oraz $+\infty$, metodę znaków Descartesa: „Ilość pierwiastków rzetelnych i dodatnich równania $f(x) = 0$ nie może być większa od ilości przemian znaków, zachodzących w szeregu współczynników tego równania”. Finalnie zaprezentowana została metoda Fouriera–Boudana., której podstawę stanowi tablica:

$$f(x), Df(x), D^2(x), \ldots, D^n f(x).$$

Szereg wartości przyjmowanych przez tak otrzymane funkcje umożliwia wyznaczenie w wybranych przedziałach, z dokładnością do parzystości, liczby pierwiastków równania $f(x) = 0$. W rozdziale X zaprezentowano metodę wyznaczenia całkowitych pierwiastków unormowanego równania o całkowitych współczynnikach. Ponadto podano algorytm Newtona, wraz z poprawką Fouriera, wyznaczanie z założoną dokładnością niewymiernych pierwiastków równania algebraicznego. Rozdział kończy metoda Hornera[11] wyznaczania dowolnych (wymiernych oraz niewymiernych) pierwiastków równania algebraicznego; tzw. schemat Hornera dzielenia wielomianów jest zaledwie algorytmem służącym do wyznaczania kolejnych równań.

[11] Zajączkowski odsyła do pracy W.G. Hornera z roku 1819.

2.5 Rozdział XIV *Zastosowanie teoryi wyznaczników do rozwiązania układu równań algebraicznych*

Rozdział otwiera paragraf o rozwiązywaniu układu równań stopnia pierwszego. Zajączkowski definiuje układ równań stopnia pierwszego, a następnie informuje, że „*teorya układu równań 1. stopnia zawarta w dwu twierdzeniach, które w najnowszych czasach udowodnił p. Eugenijusza Rouché*”. Zajączkowski ma na myśli twierdzenie Kroneckera-Capellego[12] jednoznacznie określające warunki istnienia rozwiązania układu równań liniowych. Język, którym się posługuje jest językiem wyznaczników. Definiuje *wyznacznik główny* prostokątnego układu mn elementów (macierz o m wierszach i n kolumnach), czyli we współczesnym języku minor główny macierzy. Znane twierdzenie o postaci rozwiązania układu n równań liniowych o n niewiadomych Zajączkowski formułuje jako *prawidło* będące szczególnym przypadkiem, gdy *wyznacznik główny* ma rząd równy liczbie niewiadomych:

„Wartości niewiadome $x_1,...,x_m$ przedstawiają się pod postacią ułomków o wspólnym mianowniku; mianownik wspólny wartości na niewiadome $x_1,...,x_m$ jest wyznacznikiem głównym układu, a każdy licznik otrzyma się, gdy w wyznaczniku głównym, elementy kolumny tego samego wskaźnika, co niewiadoma, zastąpi się przez odpowiednie wyrazy wiadome.”

Bardziej interesujący jest drugi paragraf: *Układ dwu równań stopni wyższych*. Na wstępie zaprezentowany został sposób Eulera rugowania jednej zmiennej z układu dwóch równań algebraicznych dwóch zmiennych (o metodzie Eulera w [7]). Zajączkowski dodaje uwagę, że otrzymany w ten sposób rugownik jest identyczny z wyznaczonym za pomocą funkcji symetrycznych. Zaprezentowana została również metoda Sylvestera rugowania zmiennej – metoda zwana *dyalityczną* – która daje wynik identyczny z metodą Eulera. Zwracając uwagę na niedogodność metod Eulera i Sylvestera, które prowadzą do wyznaczników wysokich stopni, Zajączkowski prezentuje metodę Bézouta (można o niej przeczytać w [7] oraz [29]) i ocenia ją bardzo wysoko.

3 Zakończenie

Wybrano do przedstawienia zaledwie kilka zagadnień poruszonych w wykładzie algebry Zajączkowskiego. Kierowano się głównie związkiem z teorią eliminacji, a szczególnie podstawowym dla niej oraz dla geometrii algebraicznej twierdzeniem Bézouta. Dodatkowo zwrócono uwagę na teorię równań algebraicznych. Brak jednak odniesień, poza podstawowymi, do polskich i zagranicznych dzieł z zakresu algebry.

Literatura

[1] Abel N. H.: *Mémoire sur les équations algébriques, ou l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré*. Christiania, 1824.

[12] Warunek konieczny i wystarczający istnienia rozwiązania układu równań liniowych jest nazywany twierdzeniem: we Francji Rouché-Fontené, w Rosji i Polsce Kroneckera-Capellego, we Włoszech Rouché-Capellego, w Hiszpani i krajach Ameryki łacińskiej Rouché-Frobeniusa.

[2] Baraniecki M.–A.: *Teorya wyznaczników (determinantów). Kurs uniwersytecki*. Nakładem właściciela Biblioteki Kórnickiej, Paryż, 1879.

[3] Bézoute E.: *Nauka matematyki do użycia artyleryi francuzkiey, tom 2: Algebra i przystosowanie algebry do jeometryi*. Warszawa, 1781. Tłumaczenie: J. Jakubowskiego.

[4] Bourdon P. L. M..: *Zasady algebry*. Drukarnia K. Kulig, Płock, 1828. Tłumaczenie: W. Józefowicz.

[5] Bretthner J.A.: *Wykład arytmetyki literowéj i algebry. Cz. I.*. E Mitler i syn, Berlin, 1850. Tłumaczenie: W. Milewski.

[6] Ciesielska D.: *Teoria Galois w spuściźnie Kretkowskiego*. W: J. Bečvář, M. Bečvářová (eds.). 34. mezinárodní konference Historie Matematiky, Matfyzpress, Praha, 2014, 81–88.

[7] Ciesielska D.: *Twierdzenie Bézouta o przecięciu krzywych algebraicznych w pracach Eulera*. Ann. Univ. Paed. Cracov., Studia ad Didacticam Math. Pertinentia 5(2013), 39–50.

[8] Domoradzki S.: *The growth of mathematical culture in the Lvov area in the Autonomy Period (1870−1920)*. History of Mathematics 47, Matfyzpress, Praha, 2011.

[9] Halphén G.: *Sur un point de la théorie du contact*. Bulletin de la Société Mathématique de France 2(1873/1874), 94-96.

[10] Hesse L. O.: *Wyznaczniki: opracowane elementarnie*. Kowalewski, Warszawa, 1880. Tłumaczenie: A. Zdziarski.

[11] L'Huillier S.: *Algiebra dla szkół narodowych*. Michał Gröll, Marywil, 1782. Tłumaczenie: S. Gawroński.

[12] Hreczyna G. A.: *Początki algebry*. N. Glücksberg, Krzemieniec, 1830.

[13] Jakubowicz A.: *Arytmetyka i pierwsze zasady algiebry z rozkazu Jego Cesarzewiczowskiey Mości Wielkiego Księcia Konstantyna, Naczelnego Wodza, z rossyyskiego na język polski przez Antoniego Jakubowicza, Podporucznika Adjunkta Dyrekcyi Artyleryi przełożone*. Warszwa, 1822.

[14] Krzyżanowski A.: *Teorya równań wszech stopni: podług binomu Newtona*. Drukarnia nr. 646, Warszawa,1816.

[15] Lacroix S. F.: *Algebra dla szkół narodowych.* Drukarnia Uniwersytetu w Wilnie, Wilno, 1804.

[16] Lacroix S. F.: *Początki algebry S. F. Lacroix dla użycia w Szkole Centralnej Paryzkiey*. Drukarnia XX. Pijarów, Wilno, 1818. Tłumaczenie E. Sieradzki.

[17] Libelt K.: *Wykład matematyki dla szkół gimnazyalnych*. T. 2., Kamieński i ska, Poznań, 1844.

[18] Mayer M., Choquet Ch.: *Zasady algebry Mayer'a i Choquet'a* (tyt. org.: *Traité élémentaire d'algebre*). Olgerbrand, Warszawa, 1846. Tłumaczenie W. Wrześniowski.

[19] Niewęgłowski G.–H.: *Algebra. Cz. 1, zawierająca algebrę elementarną*. Nakładem właściciela Biblioteki Kórnickiej, Paryż, 1879.

[20] Salmon G.: *Lessons introductory to the modern higher algebra.* Hodges, Smith and Company, second edition, Dublin, 1866.

[21] Sągajło A.: *Wykład zupełny algebry*. T. I. *Początki algebry*, T. II. *Teorya wyznaczników i ich przedniejsze zastosowania*. nakładem właściciela Biblioteki Kórnickiej, Paryż,1874.

[22] Serret J.-A.: *Cours d'Algèbre supérieure*. Troisième edition, Gauthier-Villars, Paris, 1866.

[23] Steczkowski J. K.: *Wykład matematyki. Część 2. Algebra*. Drukarnia Uniwersytecka, Kraków, 1852.

[24] Śniadecki J.: *Rachunku algebraicznego teorya przystosowana do linii krzywych*. Drukarnia Szkoły Głównej Koronnej, Kraków, 1783.

[25] Ruffini P: *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto*. Societa tipografica, Modena, 1813.

[26] *Teoria Galois*. Biblioteka Naukowa PAU i PAN, Rkps. 9505.

[27] Trzaska W. (Kretkowski W.): *Krótkie wiadomości o wyznacznikach*, [w:] *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego*. W. Folkierski, t.1., nakładem właściciela Biblioteki Kórnickiej, Paryż,1870.

[28] Ustrzycki A. S.: *Algebra czyli nauka o rachunkach literalnych, porządkiem do każdego zrozumienia przystosowanym we dwóch częściach ułożona a ciekawemi i uzytecznemi przykładami obiasniona*, cz. 1., cz. 2., Drukarnia XX Pijarów, Warszwa, 1778−1781.

[29] Wimmer H. K.: *On the History of the Bezoutian and the Resultant Matrix*. Linear Algebra and its Applications 128(1990), 27−34.

[30] Węgleński J. J.: *Algebra początkowa przykładami arytmetyki objaśniona dla szkolney młodzi*. Drukarnia XX Pijarów, Warszawa, 1775.

[31] Wyrwicz A.: *Początki algebry*. Cz. 1, nakładem A. Marcinowskiego, Wilno, 1826

[32] Zajączkowski W.: *Zasady algebry wyższéj*. Księgarnia Gubrynowicza i Schmidta, Lwów, 1884.

[33] Żelewski A.: *Nauka o wyznacznikach z zastosowaniami: wyłożona w sposób przystępny*. Księgarnia S.A. Krzyżanowskiego, Kraków, 1877.

Adres

Dr Danuta Ciesielska
Instytut Matematyki
Wydział Matematyczno-Fizyczno-Techniczny
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków, POLAND
e-mail: *smciesie@cyfronet.krakow.pl*

PREDOHRA K SCHÉMAM

JÁN ČIŽMÁR

Abstract: A. Grothendieck has declared in his *Éléments de géométrie algèbrique* the following four disciplines to be preliminaries of his theory of schemes: commutative algebra, theory of categories, homological algebra and theory of sheaves. The goal of this paper is to give a short survey of notions and results serving to the construction of the theory of schemes.

1 Úvod

Základné koncepcie algebrickej geometrie boli v 20. storočí v priebehu necelého polstoročia dvakrát podrobené radikálnym zmenám, ktoré zreteľnejšie než vo väčšine ostatných matematických disciplín odzrkadľovali istú všeobecnú tendenciu vývoja. Táto tendencia sa prejavovala v úsilí zapájať do štrukturálnej výstavby disciplín čoraz vo väčšom počte a rozsahu metódy, výsledky a prostriedky nielen blízkych a príbuzných disciplín, ale neraz aj odborov s podstatne odlišným predmetom štúdia. Osobitne významnú úlohu v tomto smere nadobúdali nielen odbory, ktoré tvorili tradičnú teoretickú a metodologickú základňu iných disciplín – ako napr. matematická analýza a teória diferenciálnych rovníc pre diferenciálnu geometriu alebo algebra pre algebrickú geometriu – ale aj novo etablujúce sa disciplíny vyššej abstraktnej úrovne, akými boli napr. topológia v prvých desaťročiach storočia a teória kategórií od začiatku druhej polovice 20. storočia.

Charakteristickou črtou vývoja algebrickej geometrie od polovice 20. rokov do polovice 40. rokov 20. storočia bola postupná zmena jej hlavnej algebrickej bázy z lineárnej algebry a teórie polynómov nad poľom komplexných čísel – metodologického okruhu príznačného pre taliansku školu – na teóriu ideálov v okruhu polynómov spravidla nad algebricky uzavretým poľom. Tento prístup k formovaniu základov algebrickej geometrie v učebnicovej – a v širšom chápaní aj v náučnej – literatúre pretrvával prinajmenšom do r. 1960. Prvým vrcholom tohto vývoja bola publikácia klasickej monografie André Weil: *Foundations of algebraic geometry* (American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1946), ktorá na báze teórie ideálov a ďalších pokrokov komutatívnej algebry vrátane najnovších súdobých výsledkov z prvej polovice 40. rokov (ku ktorým výdatne prispel aj autor monografie) transformovala do nového jazyka všetky dôležité tradičné okruhy algebrickej geometrie a v inšpiratívnom náčrte predstavila perspektívy spojenia algebrickej geometrie s metódami relatívne nových a dynamicky napredujúcich oblastí matematiky, ktoré sa stali základom modernizácie a povznesenia algebrickej geometrie na vyššiu úroveň abstrakcie v ďalšej etape jej rozvoja.

Knižná produkcia v oblasti algebrickej geometrie v nasledujúcom poldruhadesaťročí je reprezentovaná jednak dielami, ktoré paralelne spájajú klasické témy a metódy prameniace prevažne z talianskej školy s novými metódami ideálovej koncepcie, jednak monografiami informačného zamerania, ktoré v detailoch spresňujú a dopĺňajú Weilovu knihu. K prvému okruhu patrí napr. trojzväzkové metodicky vysoko hodnotné dielo W. V. D. Hodge – D. Pedoe: *Methods of algebraic geometry* (Cambridge, I. diel 1947, II. diel 1952, III. diel 1953) alebo prehľadná kniha *M. Baldassary*: *Algebraic varieties* (Springer, Berlin, 1956); k dielam druhého druhu možno zaradiť útlu knižku P. Samuel: *Méthodes d´algèbre abstraite en* *géométrie algébrique* (Springer, Berlin etc., 1955) alebo prehľadné, rozsahom stručné dielo S. Lang: *Introduction to algebraic geometry* (Interscience, New York, 1958).

Od začiatku 50. rokov sa v literatúre časopiseckého charakteru začali objavovať príspevky svedčiace o tendencii zaradiť do metodológie algebrickej geometrie nové výsledky a metódy vypracované a osvedčené ako užitočné a produktívne v niektorých rýchlo rozvíjajúcich sa disciplínach blízkych aj zdanlivo značne vzdialených od algebrickej geometrie. Takými odbormi boli napr. teória diferencovateľných variet, homologická algebra, teória komplexných funkcií niekoľkých premenných, začínajúca sa teória kategórií a niektoré ďalšie. Bolo len otázkou času, kedy spojenie týchto rôznorodých prúdov nájde svoj výraz v zjednocujúcej a zovšeobecňujúcej ucelenej teórii, ktorá na vyššej abstraktnej úrovni fundamentálnych pojmov a na podstatne odlišnej metodologickej báze predstaví kardinálnu prestavbu základov algebrickej geometrie v 20. storočí. Táto grandiózna úloha, triezvym odhadom realizovateľná v rámci intenzívneho tvorivého vzopätia jednou generáciou špičkových odborníkov, bola v podstatných rysoch splnená za polovicu desaťročia jedinečnou vedeckou osobnosťou – Alexandrom Grothendieckom.

2 Štyri zdroje a štyri zložky teórie schém

A. Grothendieck (nar. 1928) v úvode k prvému dielu svojej rozsiahlej monografie *Éléments de géométrie algèbrique*, pozostávajúcej z ôsmich dielov v trinástich zväzkoch, za štyri základné zdroje svojej *teórie schém* označuje komutatívnu algebru, algebrickú topológiu, teóriu kategórií a teóriu zväzkov. Tieto štyri odbory s rozličnou dobou vzniku a s rozličnými cestami vývoja sa v Grothendieckovej novej koncepcii základov algebrickej geometrie stali nielen jej metodologickým základom, zdrojom základných objektov, výsledkov a pracovných prostriedkov, ale niektoré ich objekty, vlastnosti, výsledky a postupy vošli po príslušnej nenásilnej adaptácii do vecného obsahu novej koncepcie algebrickej geometrie. (V prípade algebrickej topológie ide presnejšie skôr o homologickú algebru.)

V nasledujúcom texte je uvedený stručný – a zákonite neúplný – prehľad dôležitých ideí uvedených štyroch disciplín, ktoré zohrali významnú úlohu pri budovaní teórie schém.

2.1 Komutatívna algebra 1920–1960

Korene disciplíny, ktorá sa vyvinula na komutatívnu algebru v chápaní matematiky 20. storočia, tkvejú v nemeckej algebre a teórii čísel posledných dvoch desaťročí 19. storočia. Prvé kroky k formovaniu nového odvetvia algebry urobili R. Dedekind a L. Kronecker prácami o štruktúre *číselných polí*. V súvislosti s týmito štruktúrami sa objavili aj pojmy *okruh* a *ideál*. Túto fázu úvodneho vývoja disciplíny uzavrel v poslednom desaťročí 19. storočia D. Hilbert rozsiahlym traktátom *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper* (Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 4(1897), 175–546). Definíciu abstraktného poľa uviedol ako prvý H. Weber r. 1893. V rozvíjaní teórie týchto štruktúr pokračovalí v prvom desaťročí 20. storočia K. Hensel (1908) a E. Steinitz (1910). Prvú ucelenú teóriu ideálov v okruhoch polynómov publikoval časopisecky r. 1905 E. Lasker. (Prirodzene, v tomto článku budú zmienky len o tých témach komutatívnej algebry, ktoré majú priame uplatnenie v algebrickej geometrii.)

Prvá etapa úspešného rozvoja komutatívnej algebry po 1. svetovej vojne je spätá s účinkovaním E. Noetherovej v Göttingene. Jej algebrický seminár v 20. rokoch spolu so seminárom E. Artina v Hamburgu od 2. polovice 20. rokov boli strediskami výchovy talentovaných mladých vedcov, ktorí výrazne prispeli k formovaniu komutatívnej algebry ako samostatnej vetvy algebry. Hlavný smer zamerania vedeckej činnosti E. Noetherovej sa uberal v duchu Hilbertovej metodológie výstavby matematických disciplín, totiž v úsilí postaviť teóriu konkrétnej oblasti na axiomaticko-deduktívny základ. To je u Noetherovej zreteľné v jej rozvíjaní teórie komutatívnych okruhov a špeciálne v teórii ideálov v komutatívnych okruhoch, osobitne v teórii ideálov v okruhoch polynómov nad komutatívnym okruhom, resp. poľom koeficientov. Na rozdiel od E. Noetherovej, ktorá výklad svojich prác viedla v striktne algebrickom duchu, jeden z jej prvých a najúspešnejších žiakov, B. L. van der Waerden, hneď svoj prvý článok *Zur Nullstellentheorie der Polynomideale* (Math. Ann. 96(1926), 183–208) venoval transpozícii Noetherovej algebrických výsledkov do tematiky a jazyka novej koncepcie algebrickej geometrie. V nej algebrická varieta n-rozmerného (afinného) priestoru nad poľom P je definovaná ako množina všetkých koreňov ideálu $\boldsymbol{a}$ v okruhu $R = P[x_1,\ldots,x_n]$ polynómov n neurčitých nad poľom P, v prípade ireducibilnej variety prvoideálu $\boldsymbol{p}$. Faktorový okruh $R/\boldsymbol{p}$ je oblasť integrity a jej podielové pole má tvar $P(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, kde $\xi_i = x_i (\mathrm{mod}\, p)$. „Bod“ $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ anulujúci všetky generátory ideálu $\boldsymbol{p}$ (aj všetky polynómy ideálu $\boldsymbol{p}$) sa nazýva *všeobecným nulovým bodom* ideálu $\boldsymbol{p}$ aj *všeobecným bodom* variety M tvorenej všetkými koreňmi ideálu $\boldsymbol{p}$. Každý iný „bod“ anulujúci všetky polynómy ideálu $\boldsymbol{p}$, majúci za súradnice n-ticu s menším počtom algebricky nezávislých neurčitých, než je ich počet v množine $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$, sa nazýva *špeciálnym nulovým bodom* ideálu $\boldsymbol{p}$ (neskôr *špecializáciou* nulového bodu $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$) aj *špeciálnym bodom* variety M (neskôr *špecializáciou všeobecného bodu* variety M). – V ďalšom vývoji algebrickej geometrie sa pojem všeobecného bodu ustálil na termíne *generujúci bod* (angl. *generic* – Weil, Zariski, Samuel).

Posledným zásadným prínosom van der Waerdenovej prvej práce zameranej na prestavbu základov algebrickej geometrie bolo zavedenie *rozmeru* (*dimenzie*) prvoideálu $\boldsymbol{p}$ (aj variety M všetkých koreňov ideálu $\boldsymbol{p}$) ako stupňa transcendentnosti poľa $P(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ nad poľom P. (E. Noetherová zaviedla pojem rozmeru ako maximálnu dĺžku klesajúceho reťazca prvoideálov okruhu R obsahujúcich prvoideál $\boldsymbol{p}$.)

V článku *Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie* (Math. Ann. 97(1927), 756–774) van der Waerden zaviedol pojem *špecializácie zachovávajúcej reláciu* (nem. *relationstreu*) ako prostriedok vyjadrenia násobnosti podvariety, ktorá je prienikom dvoch variet. Násobnosťou podvariety sa nazýva číslo, ktoré vyjadruje počet výskytov podvariety vo výsledku riešenia všeobecného problému, v ktorom neurčité parametre boli nahradené *špecializáciou*. Teória špecializácie a násobnosti bola exaktne spracovaná vo vyššie spomenutej Weilovej monografii.

V článku o zovšeobecnení Bézoutovej vety z r. 1928 van der Waerden zaviedol pole nekonečného stupňa transcendentnosti nad základným poľom. Neskôr toto pole doplnené požiadavkou algebrickej uzavretosti A. Weil nazval *univerzálnym poľom.*

Monografia B. L. van der Waerdena *Moderne Algebra* (Springer, Berlín, I. diel 1930, II. diel 1931), hoci aj nebola príručkou komutatívnej algebry, obsahovala všetky podstatné výsledky teórie ideálov, čím čiastočne plnila aj úlohu vhodnej pomôcky pre algebrickú geometriu.

V sérii fundamentálnych článkov *Zur algebraischen Geometrie* v časopise Mathematische Annalen, z ktorých prvý vyšiel r. 1933, predposledný – deviatnásty r. 1958 a posledný r. 1971, sa van der Waerden zameriaval prevažne na úplnejšie a presnejšie riešenie problémov spracúvaných predtým metódami talianskej školy.

Medzitým r. 1935 vyšla monografia *Idealtheorie* (Springer, Berlín) W. Krulla, taktiež žiaka E. Noetherovej a E. Artina, vysoko hodnotná a užitočná pre algebrickú geometriu ideálovej koncepcie. Zaoberala sa o. i. podrobne metódou *ohodnotenia*, ktorú O. Zariski v 40. rokoch rozvinul na mimoriadne účinný prostriedok štúdia algebrickogeometrických problémov, špeciálne biracionálnych korešpondencií. Ešte významnejšiu úlohu zohral pojem *lokálneho okruhu* zavedený Krullom r. 1938, ktorý sa v prvom použití A. Weilom a O. Zariskim a v neskoršom hojnom použití P. Samuelom osvedčil ako veľmi vhodný prostriedok štúdia lokálnych vlastností algebrických variet a algebrických štruktúr k nim príslušných.

V druhej polovici 30. rokov vyšli dve významné monografie, ktorých autormi boli špičkoví predstavitelia komutatívnej algebry a algebrickej geometrie. Boli to publikácie O. Zariski: *Algebraic surfaces* (Springer, Berlin, 1935) a B. L. van der Waerden: *Einführung in die algebraische Geometrie* (Springer, Berlin, 1939). S odstupom času bez znalosti motívov a pozadia ich tvorby sa nezdajú jasnými príčiny a dôvody, prečo sa obaja autori vyhli použitiu ideálovej koncepcie spracovania základných objektov algebrickej geometrie a vlastností týchto objektov. Kým u O. Zariského to možno ospravedlniť menšou rozvinutosťou bázovej teórie (Krullova *Idealtheorie* vyšla v tom istom roku v tej istej sérii *Ergebnisse der Mathematik* vydavateľstva Springer) a tesnou spätosťou tematiky s talianskou školou, u B. L. van der Waerdena ako prvého tvorcu základov ideálovej koncepcie algebrickej geometrie je zámerné vyhýbanie sa používaniu ideálov v algebrickej geometrii sotva pochopiteľné a ospravedlniteľné napriek jeho pokusu o vysvetlenie takéhoto postupu v predhovore k vydaniu knihy. Skôr sa možno domnievať – a silné indície pre takú domnienku poskytuje aj korešpondencia van der Waerdena z toho obdobia – že hlavnými motívmi uprednostnenia metód talianskej školy v základnej koncepcii *Einführung* bola politická situácia charakterizovaná politickým a vojenským zbližovaním nacistického Nemecka a fašistického Talianska a zjavné či skryté tlaky oficiálnych miest demonštrovať spoluprácu oboch krajín aj v oblasti vedy, kultúry a ďalších sfér spoločenského života. Možno len ľutovať, že z príčin cudzích vede van der Waerden premeškal príležitosť pozdvihnúť základy algebrickej geometrie dôkladnou aplikáciou teórie ideálov na vyšší stupeň abstrakcie a špeciálne, že nedospel k spracovaniu vnútornej geometrie algebrickej variety V v afinnom priestore nad poľom k metódou ideálov v súradnicovom okruhu $k[V]$, čím by sa bol dostal k predobrazu *afinnej schémy*.

Druhá polovica 30. rokov a prvá polovica 40. rokov nevniesli explicitne z komutatívnej algebry do algebrickej geometrie také závažné pojmy, akými sa ukázali vo van der Waerdenovom predvedení všeobecný bod, rozmer a špecializácia. Aritmetická teória polí algebrických funkcií od H. Hasseho, taktiež jedného z predstaviteľov nemeckej algebrickej školy E. Noetherovej a E. Artina, nevzbudila v čase svojho uverejnenia r. 1942 takú pozornosť, aká jej z pohľadu neskôr odhalených súvislostí so základmi algebrickej geometrie prináležala. V turbulentných rokoch 2. svetovej vojny sa niektorí čelní predstavitelia komutatívnej algebry a algebrickej geometrie – pokiaľ im to okolnosti umožňovali – zaoberali problematikou spresňovania kardinálnych pojmov a rozširovaním oblastí potenciálneho uplatnenia v algebrickej geometrii. A. Weil za osobného odborného prispenia a výdatnej morálnej podpory niektorých kolegov, osobitne C. Chevalleyho a O. Zariského, pripravil r. 1944 do tlače fundamentálne dielo *Foundations of algebraic geometry* (vyšlo r. 1946 v New Yorku ako *Colloqium Publi-cation* vedeckej spoločnosti American Mathematical Society), prezentujúce ideálovú koncepciu základov algebrickej geometrie, zahrňujúcu algebrickogeometrickú transpo-zíciu podstatných výsledkov komutatívnej algebry od r. 1920, relevantných vzhľadom na obsah algebrickej geometrie. Dielo bolo vydané tlačou ešte niekoľkokrát – naposledy r. 1989 – pričom prvé revidované a doplnené vydanie, ktoré vyšlo r. 1962, bolo rozšírené o najnovšie výsledky algebrickej geometrie a jej pomocných disciplín, sčasti publikovaných časopisecky alebo formou kurzu seminárnych prednášok pripravených samotným autorom alebo spolupracovníkmi. Takú formu mal záznam série A. Weil: *Fibre spaces in algebraic geometry* (Notes by A. Wallace, University of Chicago, 1949, 1952), signalizujúcej nástup algebrickotopologických metód do skúmania objektov algebrickej geometrie.

Špecifickú úlohu v rozvoji komutatívnej algebry najmä z aspektu jej aplikovateľnosti v algebrickej geometrii zohral O. Zariski na jednej strane sériou svojich fundamentálnych článkov v 40. rokoch, zameraných na riešenie dlhodobých kardinálnych problémov algebrickej geometrie (násobnosť, redukcia singularít, exaktné podloženie parciálnych teórií a i.) novými prostriedkami a metódami komutatívnej algebry, na druhej strane priamym vstupom do procesu zdokonaľovania komutatívnej algebry časopiseckou tvorbou a vydaním klasického diela *Commutative algebra I, II* (spoluautor P. Samuel; Van Nostrand, Princeton, I. diel 1958, II. diel 1960).

K rozvoju poznania lokálnych vlastností algebrických variet výrazne prispela rozsahom skromná, ale obsahom bohatá knižka P. Samuela *Méthodes d´algèbre abstraite en géométrie algébrique* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer, Berlin etc., 1955), ktorej terminológia zreteľne dokumentuje pokrok od vydania Weilových *Foundations* (súradnicový okruh, pole racionálnych funkcií, lokálny okruh bodu a i.).

Za štandard komutatívnej algebry patriaci do prerekvizít teórie schém možno bez zmenšovania významu iných dobových príručiek označiť dvojdielnu monografiu O. Zariského a P. Samuela. Bola písaná zjavne so zámerom poskytnúť užívateľovi dostatočne obsažné a úplné kompendium komutatívnej algebry, potrebné na porozumenie základným a stredne náročným monografiám o algebrickej geometrii. Sám Zariski v predslove k prvému dielu uvádza, že koncepcia i detaily diela vznikali pri písaní nikdy nedokončenej a nevydanej knihy o algebrickej geometrii, ktorú mal pripraviť na vydanie v sérii Colloquium Publications Americkej matematickej spoločnosti. Preto napísanú monografiu označil za „dieťa nenarodeného rodiča“.

2.2 Teória kategórií

Zo štyroch disciplín, ktoré uviedol Grothendieck ako odbory, z ktorých teória schém čerpá svoje základné metódy a prostriedky, patrí teória kategórií s teóriou zväzkov k historicky najmladším. Prirodzene, stanoviť okamih zrodu ktorejkoľvek disciplíny je sotva možné: retrospektívny pohľad nachádza jej zárodky v iných odboroch dávno predtým, než sa sformovala ako zjavne odlišná od blízkych predchádzajúcich. Pri teórii kategórií je úloha sledovať proces jej prvotného vývoja o to zložitejšia, že disciplína vznikla a rozvíjala sa riešením problémov, v ktorých sa neoddeliteľne preplietali momenty všeobecnej topológie, algebrickej topológie, homologickej algebry a súbežne vznikajúcej teórie zväzkov. Aj pri sledovaní neskoršieho stavu vývoja všetkých týchto disciplín býva často zložité odlíšiť, či pojmy teórie kategórií majú svoju motiváciu a svoje predobrazy v objektoch, reláciách a štruktúrach uvedených odborov, alebo je poznanie kategoriálnej povahy týchto predmetov výsledkom retrospekcie a projekcie pojmov teórie kategórií do týchto disciplín. V každom prípade je historickým faktom, že prvé stránky teórie kategórií vyšli v rokoch 1942–1945 z pera S. Eilenberga a S. Mac Lana v súvislosti so sledovaním tematiky homologickej algebry.

Algebrická geometria premrhala svoju historickú príležitosť byť priekopníkom a významným spolutvorcom teórie kategórií prezentovaním svojich početných štruktúr priehľadne kategoriálnej povahy utváraných na báze ideálovej koncepcie. Smer algebrizácie algebrickogeometrických objektov a zobrazení naštartovaný van der Waerdenom mal pri rozvíjaní do šírky a hĺbky šancu dopracovať sa pri systematickom sledovaní zvyšovania abstrakcie a zovšeobecňovania ku konkrétnym kategóriám. Jedným z príkladov je dnešný často uvádzaný jednoduchý a priehľadný príklad kategórií a funktora, ktorý ich zväzuje: ide o kategóriu uzavretých množín (v Zariského topológii) afinných priestorov nad algebricky uzavretým poľom k (afinných k-variet), v ktorej morfizmami sú regulárne zobrazenia, a kategóriu konečne generovaných k-algebier bez nilpotentných prvkov, v ktorej morfizmami sú k-homomorfizmy k-algebier. Priradenie $X \to k[X]$ súradnicového okruhu $k[X]$ ku každej uzavretej množine X je kontravariantným funktorom z prvej z týchto kategórií do druhej. Jednoduchým preverením vlastností tohto funktora sa ukáže, že kategórie sú ekvivalentné.

Dôsledné štúdium štruktúry podvariet afinnej variety za súbežného štúdia štruktúry ideálov súradnicového okruhu afinnej variety privádza zákonite algebrickú geometriu na prah definície *afinnej schémy* – pojmu, ktorý je základným stavebným kameňom Grothendieckovej koncepcie objektov algebrickej geometrie.

2.3 Teória zväzkov

Začiatky teórie zväzkov sú späté s osobnosťou J. Lerayho, ktorý sa počas pobytu v nemeckom zajateckom tábore v rokoch 1940–1945 intenzívne zaoberal určitými problémami algebrickej topológie, súvisiacimi s tematikou jeho predvojnovej vedeckej práce. V prvých povojnových rokoch 1946–1947 bola o výsledkoch jeho výskumu publikovaná séria krátkych oznamov v *Comptes rendus*; podrobnejšie výsledky boli postupne publikované časopisecky. Tematika sa týkala abstraktných komplexov nad základným okruhom A a konštrukcie určitých A-modulov priradených k uzavretým množinám topologického priestoru. Štruktúru v súvislosti s pokrytím priestoru pomenoval r. 1946 *zväzkom* (fran. *faisceau*, angl. *sheaf*, nem. *Garbe,* rus. *пучок*).

Neveľmi jasný a málo zrozumiteľný Lerayho výklad novej teórie v krátkom čase upravili a niekoľkými novými pojmami doplnili a rozšírili H. Cartan a jeho žiak J.-L. Koszul a na rozhraní 40. a 50. rokov teóriu zväzkov ďalej rozvinuli A. Borel a J.-P. Serre. Treba mať stále na pamäti, že teória zväzkov sa minimálne v prvom desaťročí svojej existencie rozvíjala v tesnej koexistencii s algebrickou topológiou a samu túto svoju „materskú“ oblasť obohatila celým radom nových užitočných pojmov a procedúr. V modernizácii algebrickej geometrie osobitne významnú úlohu zohral rozsiahly Serrov článok *Faisceaux algébriques cohérents* (Ann. of Math. 61(1955), 197–298), prinášajúci podrobnú teóriu koherentných zväzkov – o krátky čas jedného z kľúčových pojmov Grothendieckovej koncepcie základov algebrickej geometrie.

Pre menej zainteresovaného čitateľa je azda vhodné pripomenúť zjednodušenú definíciu (bez použitia jazyka teórie kategórií) *predzväzku* a *zväzku*. Aby krajne triviálna definícia predzväzku, resp. zväzku *množín* nebola zdrojom skreslených predstáv o týchto štruktúrach, bude v definícii reč o predzväzku, resp. zväzku *grúp*.

Definícia 1. Nech X je topologický priestor, $(U_i)_i$ systém otvorených množín tvoriacich pokrytie priestoru X. *Predzväzkom* grúp F na priestore X sa nazýva systém $(F(U_i), \rho_{U_i U_j})$, U_i, $U_j \subset X$, kde $F(U_i)$ je grupa pre každú otvorenú množinu $U_i \subset X$ a $\rho_{U_i U_j}: F(U_i) \to F(U_j)$ je homomorfizmus grupy $F(U_i)$ do grupy $F(U_j)$ pre vnorenie $U_j \subset U_i$, pričom sú splnené podmienky:

(0) $F(\emptyset) = 0$

(1) $\rho_{U_i U_i}: F(U_i) \to F(U_i)$ je identické zobrazenie na $F(U_i)$ pre každú otvorenú množinu $U_i \subset X$

(2) Ak $U_k \subset U_j \subset U_i$, platí $\rho_{U_i U_k} = \rho_{U_j U_k} \circ \rho_{U_i U_j}$

Definícia 2. Predzväzok grúp F na topologickom priestore X sa nazýva *zväzkom* (grúp), ak spĺňa nasledujúce doplňujúce podmienky:

(3) Ak $U \subset X$ je otvorená množina, $(V_i)_i$ – systém otvorených podmnožín tvoriacich pokrytie množiny U a f, $g \in F(U)$ sú dva prvky tej vlastnosti, že $f|V_i = g|V_i$ (zúženie prvkov f, g na V_i) pre každé i, tak $f = g$.

(4) Ak $U \subset X$ je otvorená množina, $(V_i)_i$ – systém otvorených podmnožín tvoriacich pokrytie množiny U, $(s_i | s_i \in F(V_i))$ – systém prvkov s_i z každej grupy $F(V_i)$ tej vlastnosti, že $s_i | V_i \cap V_j = s_j | V_i \cap V_j$ (zúženie prvkov s_i, s_j na prienik množín $V_i \cap V_j$), tak existuje (jediný) prvok $s \in F(U)$ tej vlastnosti, že $s | V_i = s_i$ pre každé i. (Unicita prvku s je zaručená už splnením podmienky (3).)

V algebrickej geometrii sa pracuje so zväzkami grúp, okruhov, ideálov, modulov, algebier atď.

2.4 Homologická algebra

Zárodky homologickej algebry sa objavili v druhej polovici 19. storočia v prácach B. Riemanna a E. Bettiho zavedením „*homologických čísel*“, ktorým exaktný základ dal ku koncu storočia H. Poincaré. Tematiku posunula na vyššiu úroveň abstrakcie E. Noetherová zavedením homologických grúp priestoru. Technika numerických výpočtov sa rozvíjala v 30. rokoch 20. storočia. Sporadicky pribúdali aj nové fundamentálne pojmy, akým bol napr. koreťazec, definovaný r. 1938 H. Whitneym.

V rokoch 1940–1955 bol do homologickej algebry zavedený celý rad pojmov, ktoré dnes patria do štandardnej pojmovej sústavy tejto disciplíny: funktory *Tor* a *Ext* pre abelovské grupy, homológia a kohomológia grúp a Lieho algebier, homológia neasociatívnych algebier. Kohomológie zväzkov a spektrálne postupnosti sa objavili v procese formovania teórie zväzkov.

V polovici 50. rokov H. Cartan a S. Eilenberg sumarizovali a systemizovali výsledky tohto vývoja v monografii H. Cartan – S. Eilenberg: *Homologická algebra* (Princeton, Prin. Univ. Press, 1956). Okrem súhrnu dovtedy známych výsledkov a metód uviedli celý rad tematických okruhov spracovaných pomocou rozšíreného abstraktnejšieho a výkonnejšieho aparátu. Ako silný nástroj sa osvedčili derivácie funktorov definované pomocou projektívnych a injektívnych rezolvent; ich použitím sa podarilo zjednotiť predchádzajúce rôznorodé teórie homológií. Derivácie funktorov sa osvedčili ako produktívne nástroje aj v iných súvislostiach; napr. hľadanie základných motívov ich zavedenia viedlo k pojmu abelovskej kategórie, hľadanie netriviálnych príkladov projektívnych modulov bolo motívom budovania algebrickej *K-teórie*. A všeobecne sa ukázalo, že toto nové smerovanie homologickej algebry sa prelínalo s modernizačným pohybom v početných príbuzných i vzdialenejších disciplínach, akými boli algebrická topológia, všeobecná topológia, algebrická geometria, teória zväzkov, teória projektívnych priestorov a ďalšie. Mnohé nové idey a koncepcie v nich tvoria tematickú jednotu pojmov a metód niekoľkých disciplín, nerozdeliteľnú na separované zložky stroho zaraditeľné do jednotlivých odborov. Motivačná a inšpiračná funkcia takýchto ideí a koncepcií je očividná, rovnako ako zjednocujúci účinok tohto ovplyvňovania a spolupráce, vyúsťujúci niekedy zákonite do zrodu nových ideí a odborov. Z historicko-filozofického pohľadu bude tento proces určite hodnotený ako potvrdenie jednoty matematiky, jednoty narušovanej neustálou tendenciou diferenciácie vedúcej k vzniku nových matematických odborov odhaľujúcich hlbšie, predtým nediferencované stránky matematiky, nasledovanej procesom integrácie na vyššej úrovni abstrakcie, ktorou sa oddelené odbory stretávajú pod strechou zjednocujúcej všeobecnejšej a abstraktnejšej disciplíny.

Pretože základným motívom pozornosti jednotlivým sledovaným disciplínam je ich bližšia, v niektorých ohľadoch značne tesná súvislosť s algebrickou geometriou, je relevantné spomenúť niektoré konkrétnosti vzťahu homologickej algebry a algebrickej geometrie v sledovanom historickom období. Okrem fundamentálneho Serrovho článku o koherentných algebrických zväzkoch – spomenutého v predchádzajúcej časti 2.3 – ktorý má výraznú a podstatnú homologickoalgebrickú zložku, je namieste uviesť ďalšie zásadné príspevky k úspešnému vzťahu homologickej algebry a algebrickej geometrie. Zoznam je, prirodzene, krajne kusý bez najmenšieho zámeru sledovať úplnosť položiek a ich významovú hierarchiu. Citované pramene spĺňajú charakteristiku predchádzajúcich riadkov – odzrkadľujú komplexný prístup k téme a nemožno ich jednoznačne zaradiť do jediného z odborov opísaných v častiach 2.1 – 2.4. Cieľom citácie je poskytnúť čitateľovi tituly základnej literatúry, v ktorých je náležite prezentovaný vecný obsah tematiky načrtnutej v predchádzajúcom texte tohto článku. Poradie titulov je chronologické.

Zariski O.: *Algebraic sheaf theory* (Bull. Amer. Math. Soc. 62(1956), 117–141)

Hirzebruch F.: *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie* (Springer, Berlín, 1956)

Grothendieck A.: *Sur quelques points d´algèbre homologique* (Tokohu Math. J. 9(1957), 119–221)

Grothendieck A.: *The cohomology theory of abstract algebraic varieties* (Proc. Int. Cong. Math., Edinburgh, 1958, 103–118)

Godement R.: *Topologie algébrique et théorie des faisceaux* (Hermann, Paríž, 1958)

3 Záver

Výstavba kompaktnej modernej matematickej teórie na báze aktuálneho stavu vedeckého vývoja v štyroch špičkových špeciálnych odboroch, navyše z ktorých dva sa konštituovali v minulosti tak nedávnej, že ju z hľadiska historickej dimenzie treba považovať za súčasnosť, je jav v histórii vedy jav nie príliš častý a jeho plný význam bude možné posúdiť až s náležitým časovým odstupom. Je symbolické, že prestavba základov algebrickej geometrie v poňatí Grothendiecka – príslušníka druhej generácie členov skupiny Bourbaki – sa spája – ak nie v plnom rozsahu tvorivého prispenia, určite v duchu principiálneho usmerňovania a duchovnej podpory – s menom J. Dieudonného (1906–1992), jedného z najvýznamnejších zakladajúcich členov a príslušníka prvej generácie účastníkov tvorivej vedeckej skupiny Bourbaki. Ak nie priamo závažnejším podielom na tvorbe textu diela *Éléments*, určite jeho šírením, rozsiahlou vecnou propagáciou a popularizáciou, si Dieudonné získal nehynúce prvoradé zásluhy v oboznamovaní zainteresovaných kruhov svetovej matematickej komunity s novou globálnou koncepciou algebrickej geometrie. Ostatne, osobitná intenzívna propagačná kampaň nového poňatia klasickej disciplíny nebola potrebná. Stredná generácia inklinujúca k predmetu pochopila bez väčšieho vysvetľovania, že sa v koncepcii základov tohto predmetu udiala zásadná zmena, ktorá je hodná pozornosti a štúdia, a ak už táto generácia sama nezmenila orientáciu svojich vedeckých záujmov, často na onú principiálnu zmenu upriamila pozornosť mladšej generácie začínajúcich talentovaných vedcov. Hlavne z ich dielne vyšli na konci 60. rokov a v prvej polovici 70. rokov prvé texty explikatívneho charakteru o teórii schém, zamerané zjavne na vyššie stupne univerzitného štúdia. (Podľa dnešnej systemizácie išlo o magisterské a doktorandské štúdium.) Jedny z prvých učebných textov – proklamovaných ako provizórne – boli skriptá čelných predstaviteľov mladej generácie algebrických geometrov. „Dočasné a pomocné" učebné texty Ju. I. Manin: *Lekcii po algebraičeskoj geometrii. Časť 1: Afinnyje schemy* (Izdateľstvo MGU, Moskva, 1970) a D. Mumford: *Introduction to algebraic geometry. Preliminary version of chapters I–III* (Cambridge, Harvard University, Mathematical Department, 1970), didakticky transponované z monografie Grothendiecka do prijateľného jazyka, sa stali šlabikárom, z ktorého hltali kapitoly novej teórie študentské špičky elitných svetových univerzít, ale sa aj učili slabikovať jej prvé slová široké vrstvy záujemcov rôzneho pôvodu, rozličnej úrovne predbežnej prípravy, menšieho rozhľadu v ovládaní modernej matematiky a objektívne aj menšej miery talentu na tvorivú prácu v takej náročnej oblasti. S nepatrným časovým posuvom vyšla metodicky vynikajúca monografia I. R. Šafarevič: *Osnovy algebraičeskoj geometrii* (Nauka, Moskva, 1972), ktorá mala charakter vysokoškolskej učebnice, harmonicky spájajúcej dôležité základy algebrickogeometrických koncepcií predchádzajúcich etáp vývoja (talianska škola, ideálová koncepcia) s didakticky majstrovsky podanou teóriou schém. Zámer poskytnúť čo najskôr kvalifikovanú informáciu širšiemu okruhu záujemcov potvrdzuje aj uverejnenie prvých dvoch kapitol publikácie v renomovanom a široko známom a dostupnom časopise *Uspechi matematičeskich nauk* približne s dvojročným predstihom pred vyjdením knihy. Kvality monografie výrečne potvrdzujú jej opakované vydania v nemeckom a anglickom preklade.

Šafarevičova kniha sa nevenuje homologickým aspektom teórie schém. Túto medzeru vzorným spôsobom vyplňuje monografia R. Hartshorne: *Algebraic geometry* (Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1977), sprístupňujúca aj niektoré ďalšie tradičné a aktuálne okruhy algebrickej geometrie spracované novou technikou Grothendieckových *Éléments*. Z desiatok knižných publikácií, reflektujúcich v rokoch 1965–1980 vstup teórie schém ako základnej koncepcie do algebrickej geometrie, si z mnohých dôvodov zasluhuje pozornosť dvojdielna monografia P. Griffiths, J. Harris: *Principles of algebraic geometry* (Wiley & Sons, New York etc., 1978), pozoruhodná dôslednou aplikáciou nových metód na komplexné variety. Toto dielo už v prvej etape akceptácie ideí a metód teórie schém ukázalo, že táto teória je nielen novým jazykom a technikou, ale aj veľmi účinným a produktívnym nástrojom skúmania klasických objektov a rozširovania obzorov ich poznania.

Tento krátky exkurz do etapy *„krátko po"* po predchádzajúcom stručnom vylíčení doby *„tesne pred"* chce naznačiť zložitosť pokusov o dôkladnú analýzu okolností zrodu *novej* algebrickej geometrie po roku 1960 a prvého obdobia jej prieniku do systému matematiky 2. polovice 20. storočia. Výrok D. Mumforda zo 70. rokov, ktorým označil *túto* algebrickú geometriu za *disciplínu 21. storočia*, nezaznamenal žiadnu serióznu negatívnu oponentúru. Kvalifikované posúdenie problematiky príspevku, tým viac problematiky nasledujúceho obdobia vývoja, čaká na povolané osobnosti. Zostáva dúfať, že s odstupom času sa vynoria.

Náležitý zoznam relevantnej literatúry by bol neúnosne rozsiahly. Okrem sporadických poznámok v texte môže záujemcovi poskytnúť mnoho vecných informácií kniha [1] a prístup historika odboru k parciálnej téme môže ilustrovať položka [2].

Literatúra

[1] Herrmann M., Stammler L., Sterz U.: *Geometrie auf Varietäten*. VEB – Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975.

[2] Schappacher N.: *A historical sketch of B. L. van der Waerden´s work on algebraic geometry 1926–1946*. In Gray J. J., Parshall K. H.: *Episodes to the history of modern algebra (1800–1950)*. American Mathematical Society, 2007.

Adresa

Prof. RNDr. Ján Čižmár, PhD.
Katedra matematiky a informatiky
Pedagogická fakulta
Trnavská univerzita
Priemyselná 4
P. O. BOX 9
918 43 Trnava
Slovenská republika
e-mail: *jan.cizmar@truni.sk, Jan.Cizmar@fmph.uniba.sk*

O RÓŻNYCH ASPEKTACH DZIAŁALNOŚCI PROF. J. PUZYNY (1856−1919) WE LWOWIE

STANISŁAW DOMORADZKI

Abstract: Bases on the example of activities of mathematician J. Puzyna, the article will concern university professor activities. These activities included not only the research and their organisations, they also focused on the education of students and young researchers. There will be also mentioned Puzyna's impact on the education of high school students, concern for the fate of the university. There will be used documents that are in the Lvov Regional Archives. Puzyna, a Lvov mathematician, by means of his monograph Theory of analytic functions (1899-1900) became a part of the mainstream of the XXth century mathematics. He showed a close shot of the theory of analytic functions compiled on the basis of set theory. He is one of the precursors of the Lvov School of Mathematics.

1 Wstęp

W artykule, na przykładzie pracy matematyka J. Puzyny, zostanie ukazana działalność profesora uniwersyteckiego. Obejmowała ona nie tylko badania naukowe, dotyczyła ich organizacji, skupiała się ona również na kształceniu studentów i młodszych pracowników naukowych. Wykorzystane zostaną dokumenty, które znajdują się w Archiwum Obwodowym we Lwowie ([9] i [10]). Puzyna zaliczany jest do prekursorów Lwowskiej Szkoły Matematycznej.

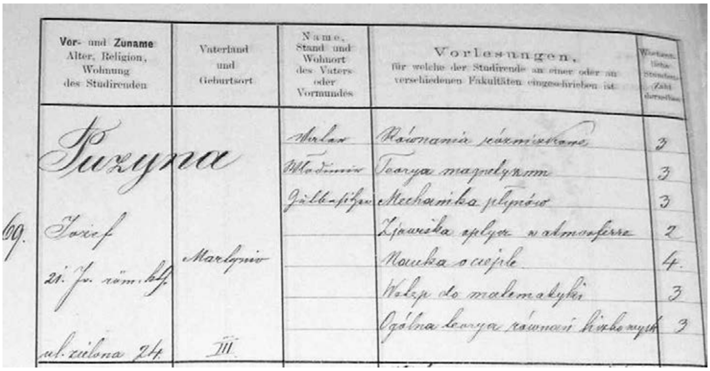
1.1 Puzyna w literaturze

Józef Puzyna (1856−1919) był matematykiem lwowskim, którego wspomina m.in. K. Kuratowski w [6] jako doskonałego specjalistę z teorii funkcji analitycznych, autora dwutomowej monografii *Teorya funkcyj analitycznych* (tom I 1898, tom II 1900). Jego dokonania, zarówno naukowe, jak i dydaktyczno-organizacyjne dla rozwoju Polskiej Szkoły Matematycznej ostatnimi latami zostają coraz bardziej widoczne (zob. m.in.: [5], [8], [1], [3], [4]).

Kierował Katedrą Matematyki Uniwersytetu Lwowskiego jako profesor nadzwyczajny w latach 1889−1892 i od 1892 roku jako profesor zwyczajny już do końca życia. Był bardzo dobrym wykładowcą i wykładał wiele różnych działów matematyki. Pełnił także odpowiedzialne funkcje we władzach uczelni: był rektorem w r. a. 1904/5 i prorektorem w 1905/6, dziekanem Wydziału Filozoficznego w 1894/95. Dziełem jego życia była wspomniana już *Teorya funkcyj analitycznych*, w której nie tylko podał wyczerpujący wykład funkcji analitycznych wraz z najnowszymi osiągnięciami w tej dziedzinie, ale także wykład podstaw teorii mnogości, topologii teoriomnogościowej, teorii grup i teorii powierzchni (bardziej szczegółowo, zob.: [1], [3], [4], [7]). Dodajmy, że już w 1899 r. (!) Puzyna prowadził bezpłatny wykład *Studia topologiczne* dla studentów Uniwersytetu

Lwowskiego. Był pierwszym prezesem Towarzystwa Matematycznego we Lwowie, które powstało w 1917 r., jeszcze przed krakowskim Towarzystwem Matematycznym, to z 1919 r., które zostało przemianowane później w Polskie Towarzystwo Matematyczne.

1.2 Kilka słów o życiu i twórczości Józefa Puzyny



Vor- und Zuname Alter, Religion, Wohnung des Studirenden	Vaterland und Geburtsort	Name, Stand und Wohnort des Vaters oder Vormundes	Vorlesungen, für welche der Studirende an einer oder an verschiedenen Fakultäten eingeschrieben ist	Wöchent-liche Stunden-Zahl derselben
69. Puzyna Józef 21 J. röm. kth. ul. Zielona 24	Martynów III	Włodzimierz Gutsbesitzer	Równania różniczkowe	3
			Teorya magnetyzmu	3
			Mechanika płynów	3
			Zjawiska optyczne w atmosferze	2
			Nauka o cieple	4
			Wstęp do matematyki	3
			Ogólna teorya równań liniowych	3

Informacja na jakie wykłady uczęszczał J. Puzyna w r. a. 1876/77 (według kolejności wykładali: W. Żmurko, O. Fabian, O. Fabian, T. Stanecki, T. Stanecki, O. Fabian, W. Żmurko) ([10])

J. Puzyna był długoletnim profesorem matematyki Uniwersytetu Lwowskiego, pochodził z rodziny książęcej, wywodzącej się z Kozielska[1]. Rodzina książęca Puzynów ufundowała w Kozielsku klasztor składający się z kilkunastu budynków. Puzyna urodził się 19 marca 1856 r. w Martynowie Nowym[2], w Galicji. Ojciec Włodzimierz kniaź Puzyna był właścicielem dóbr ziemskich. W 1875 r. ukończył słynne lwowskie Gimnazjum Franciszka Józefa we Lwowie, następnie zapisał się na Wydział Filozoficzny Uniwersytetu Lwowskiego. Słuchał wykładów profesorów: Żmurki, Czerkawskiego, Staneckiego, Fabiana i Ochorowicza[3]. W r. a. 1877/78 służył w wojsku austriackim, gdzie uzyskał stopień c.k. porucznika rezerwy. W 1882 przystąpił do egzaminu nauczycielskiego z zakresu nauczania matematyki i fizyki w gimnazjum. Po pobycie w Uniwersytecie w Berlinie[4] doktoryzował się w 1883 r. w Uniwersytecie Lwowskim na pod-

[1] Kozielsk do połowy XIV w. był księstwem udzielnym, następnie wszedł w skład Wielkiego Księstwa Moskiewskiego. W Kozielsku był jeden z trzech specjalnych obozów NKWD, skąd przewieziono polskich oficerów do Lasu Katyńskiego, gdzie dokonano brutalnego mordu na nich strzałem w tył głowy. Budynek klasztoru ufundowanego przez Puzynów w latach 1939−40 był miejscem internowania polskich oficerów.

[2] Martynów Nowy – obecnie miejscowość na Ukrainie (obwód iwanofrankowski).

[3] W roku 1874 otrzymał tytuł doktora na Uniwersytecie w Lipsku po przedstawieniu dysertacji *O warunkach świadomości*, współpracując z prof. Wilhelmem Wundtem. Od roku 1881 był docentem na Wydziale Filozoficznym Uniwersytetu Lwowskiego, prowadził psychologiczne i parapsychologiczne badania empiryczne, był prekursorem koncepcji psychologii nieświadomości, wyprzedził w tym zakresie Freuda.

[4] Studiował m.in. u Weierstrassa, L. Fuchsa, Kroneckera, J. Knoblaucha, brał udział w seminariach Weierstrassa i Kroneckera.

stawie rozprawy *O pozornie dwuwartościowych określonych całkach podwójnych*, zaś w 1885 r. habilitował się na podstawie rozprawy *O zastosowaniu uogólnionych form interpolacyjnych Lagrange'a* i następnie objął wykłady z matematyki jako docent.

2 Józef Puzyna mniej znany

2.1 Uczeń o Mistrzu

Już w 1913 r. w *Sprawozdaniach szkolnych II Szkoły Realnej we Lwowie* za r. sz. 1912/13 nauczyciel Ludwik Hordyński (1882−1920) (później pierwszy skarbnik Polskiego Towarzystwa Matematycznego) w pracy *Podstawowe twierdzenia rachunku całkowego,* nie tylko wprowadził pojęcie całki oznaczonej, podał również jej liczne zastosowania. Pokazał na przykładzie w jaki sposób teoria mnogości wpływa na zrozumienie i pogłębienie pojęcia całki oznaczonej. We wstępie jego pracy, co jest ważne dla historii matematyki w Polsce, czytamy m.in. o roli Józefa Puzyny i ważności nowej dziedziny matematyki − teorii mnogości:

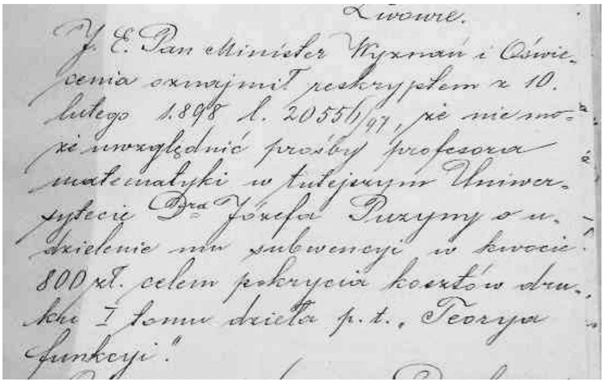
W Polsce pierwszym, który podstawy tej teoryi (mnogości), od lat kilku rozpoczynający każdy podręcznik analizy, przedstawił, jest Dr Józef Puzyna. W dwutomowym klasycznym dziele „Teorya funkcyj analitycznych" (Lwów) 1898 daje cały rozdział „Z teoryi mnogości". Zajmuje się niemi też w wysokim stopniu S. Dickstein w dziele „Pojęcia i metody matematyki"(Warszawa 1891). W zeszłym roku ukazał się „Zarys teoryi mnogości" Dr. Wacława Sierpińskiego (Warszawa 1912), w którym w spo-sób ścisły jasny i gruntowny podane jest wszystko, co dotychczas w tej gałęzi wiedzy zrobiono. Brak w tej cennej książce zastosowań do analizy i geometryi, co tłumaczy autor w przedmowie „różnorodnością" tychże we wszystkich dziedzinach matematyki. Zwolennicy teoryi mnogości, których mnogistami nazwaćby można dzięki wielkiej gruntowności i ścisłości, jaką ta nauka wprowadza do analizy i geometryi przeceniają jej wartość na niekorzyść tych wszystkich zdobyczy, które stały się udziałem matematyki na innej drodze. Jak bowiem z jednej strony teorya mnogości uczyniła wiele zagadnień precyzyjnymi nadała im prawdziwą ścisłość naukową tak też z drugiej strony wieloma postulatami, któremi się zajmuje, wkracza już w dziedzinę czystej filozofii. A matematyczna teorya mnogości z czasem ulegnie z pewnością potędze uprzystępniania i będzie znowu cegiełkami twórczymi jakieś wspaniałej budowli matematycznej. To też mimo zdobywania coraz szerszego prawa obywatelstwa w dziedzinach matematyki czystej nie powinna teorya ta potępiać na pewnych założeniach opartego, heurystycznego sposobu poznawania pewnych części wiedzy matematycznej; sposobu tego wymaga ekonomia czasu i wzgląd na zastosowania praktyczne. A każde zagadnienie najdrobniejsze tej teoryi może z czasem przyczynić się do epokowych odkryć! Dlatego też, będąc wyznawcą wielkiej zasady: „Nauka dla nauki" w obronie której tak dzielnie kruszył kopie genialny myśliciel H. Poincaré („Wartość nauki", przekład Silbersteina, Warszawa 1908). Sądzimy, że czas by zdobycze teoryi mnogości w szerszy wsiąkały ogół.

2.2 O poglądach dydaktycznych Puzyny

Puzyna w podaniu o dopuszczeniu do habilitacji przedstawił wiele cennych uwag dotyczących kształcenia studentów w zakresie matematyki. Zauważył, że *nie dość jest podawać dowody a priori postawionych twierdzeń, ale zarazem stawiać siebie niejako w położeniu wynalazcy dochodzącego do prawd jako do wniosków.* Takie podejście, zdaniem Puzyny, będzie skutkować w przyszłości próbą samodzielnej pracy naukowej. Dodajmy jeszcze, że w proponowanych wykładach Puzynie zależało na reprezentacji w dydaktyce kierunku czysto syntetycznego. *Uwzględniłbym* […] *zatem ów najnowszy kierunek (naszego stulecia) traktowania geometryi bez wszelkich środków rachunkowych przeważnie na tle dzieł Chasles'a*
i Steinera, twórców takiej metody.

Najważniesze dla niego było podmiotowe traktowanie studenta i odkrywanie przez niego matematyki. *Starałbym się we wszystkich moich wykładach trzymać się metody otwierającej i wskazującej słuchaczom drogę, po jakiej w każdej poszczególnej gałęzi w badanich mogliby kroczyć.*

Puzyna żył w okresie, w którym wielu zwróciło się ku działalności społecznej pod hasłem pracy organicznej. Być może atmosfera epoki pozwala wyjaśnić fakt, że dzieło jego życia ukazało się w języku polskim, a nie niemieckim. To, że dzieło się ukazało zawdzięczamy przede wszystkim uporowi autora. Wydał je nakładem własnym i dzięki zasiłkowi z Akademii Umiejętności w Krakowie. Nie świadczy to tylko o szczupłości środków, należy pamiętać też o niechętnej pomocy Ministerstwa w Wiedniu.


Lwowie.
J. E. Pan Minister Wyznań i Oświecenia oznajmił reskryptem z 10. lutego 1898 l. 2055/97, że nie może uwzględnić prośby profesora matematyki w tutejszym Uniwersytecie Dra Józefa Puzyny o udzielenie mu subwencyi w kwocie 800 zł. celem pokrycia kosztów druku I tomu dzieła p.t. „Teorya funkcyi".

Fragment pisma Ministra Wyznań i Oświatyz dnia 28 II 1898 r. odmawiającego zapomogi na druk dzieła *Teorya funkcyj analitycznych* ([9])

Za czasów działalności Puzyny na Wydziale Filozoficznym Uniwersytetu Lwowskiego (od r. a. 1893/94) zaczęło funkcjonować seminarium matematyczne z dwoma oddziałami niższym i wyższym. W oddziale niższym słuchacze otrzymywali pewne zagadnienia do opracowania samodzielnie, bądź po dyskusji z profesorem. W oddziale wyższym realizowane były tematy obszerniejsze, na przykład w ramach pracy seminarium wyższego powstała praca wspomnianego już wyżej L. Hordyńskiego – *O wyznacznikach* *częściowo przetworzonych* (Wiadomości Matematyczne 8(1904)). Z posiedzeń seminarium prowadzona była kronika.

Dokumenty z teczki osobowej Puzyny potwierdzają zaangażowanie Puzyny w jakość kształcenia. Np. Kasa Krajowa Namiestnictwa we Lwowie wypłaciła J. Rajewskiemu i J. Puzynie po 200 koron w 1904 roku za kierowanie seminarium matematycznym na Wydziale Filozoficznym. Warto podkreślić, że 8 słuchaczom seminarium matematycznego Kasa Krajowa postanowiła przyznać stypendia na kontynuowanie rozpoczętych prac. Profesorom zależało na kształceniu młodej kadry i skutecznie pozyskiwali na ten cel kwoty, które z pewnością nie były odpowiednie w stosunku dla potrzeb. Wiele zachowanych dokumentów ukazuje duży wysiłek organizacyjny, który należało poświęcić w funkcjonowanie seminarium, jak również dużą troskę profesorów o prawidłowy rozwój studenta.

Józef Puzyna był niezwykle oddany sprawom związanym z nauczaniem matematyki. Pisywał recenzje podręczników szkolnych i artykułów publikowanych w *Sprawozdaniach Szkolnych*, co podnosiło ich rangę. Po ukazaniu się podręcznika Placyda Dziwińskiego z algebry[5] stwierdził, że ostatnio ukazały się dwie bardzo cenne pozycje: *Zasady i pojęcia matematyki* Samuela Dicksteina i *Zasady algebry dla gimnazyów i szkól realnych* P. Dziwińskiego. Jego zdaniem matematyka poczyniła ogromne postępy dzięki matematykom tej miary co Weierstrass, Cantor, Hankel, Kronecker, Dedekind i inni, a nauczanie matematyki nie powinno *odbiegać od nowych teorii*, treści zaś powinny być tak zestawione w podręczniku, aby uczeń i późniejszy student dowiedział się o *nieprzerwanym związku z tym co później usłyszą*. U Dziwińskiego, zdaniem Puzyny, ważną rolę odgrywają oznaczenia, dzięki którym w podręczniku zostały uproszczone dowody dotyczące własności odejmowania i dzielenia. Zarówno autor, jak też i recenzent dużą rolę w nauczaniu przypisywali ogólnym regułom, np. równolegle omawiają własności dzielenia liczb całkowitych i wielomiany. Recenzja jest wnikliwa, dotyczy m.in. takich zagadnień jak: szeregi, zbieżności szeregów geometrycznych i ich zastosowania w zagadnieniach ekonomicznych, kombinatoryki, rachunku prawdopodobieństwa, wyznaczników, zastosowania liczb zespolonych do zagadnień geometrycznych, elementów historii matematyki. Jak zauważa recenzent – *toż i w matematyce nie powinni mu* [uczniowi] *być nieznani ci, co wiekami składali się na to, byśmy tę umiejętność mieli w tej znakomitej, wygodnej i ogólnej formie, jaką się dziś cieszymy.*

Innym przykładem rzetelności Puzyny jest jego recenzja[6] z 1892 r. publikacji nauczyciela gimnazjalnego Jana Korczyńskiego pt. *Elementarna teorya wyznaczników*, która ukazała w *Sprawozdaniu Dyrektora Gimnazyum św. Jacka w Krakowi*e.

Puzyna zauważa, że jeśli tak elementarna praca o wyznacznikach ukazałaby się w literaturze francuskiej czy niemieckiej, to trzeba by zapytać *quousqe tandem?* W polskiej niezbyt rozległej literaturze taka praca jest jednak bardzo pożyteczna dla uczniów, którzy staną się w niedługim czasie studentami i będą umieli obliczać wyznaczniki stopnia 2 i 3. Krytycznie

---

[5] We Lwowie w 1891 r. nakładem Towarzystwa Nauczycieli Szkół Wyższych ukazał się podręcznik P. Dziwińskiego *Zasady algebry dla wyższych klas gimnazyów i szkół realnych*, stron 384 i XI, do 1912 było pięć wydań dostosowanych do programów zatwierdzonych przez Radę Szkolną Krajową.

[6] Muzeum 8(1892).

zauważył wszakże: *niekorzystnem wydaje mi się to, że autor tak ważne twierdzenie jak rozwijanie wyznacznika podług wyrazów jednego wiersza lub jednej kolumny przy n > 3 pozostawia bez dowodu i daje tylko wskazówkę, mówiąc „zupełnie takim samym sposobem można uporządkować wyznaczniki rzędów wyższych".* Puzynie zależało, aby nie cedować na uczniów treści trudniejszych, ponad ich możliwości. W dalszej części recenzji zwrócił uwagę na sprawy związane z rekurencyjną definicją wyznacznika. W konkluzji podnosi walory, tej jak to nazywa, rozprawki.

Puzyna jako profesor zawsze zachęcał swoich studentów do samodzielnej pracy i chętnie wspierał ich radą oraz wskazówkami. Przystępność, życzliwość i inne osobiste zalety sprawiały, że przebywając w jego obecności, odnosiło się wrażenie obcowania ze starszym kolegą, a nie profesorem bądź przełożonym. W bliższym zetknięciu się z Puzyną dopiero odkrywało się bogactwo jego natury. Prostota i uczynność, które są właściwe umysłom głębokim sprawiały, że przede wszystkim był blisko swoich słuchaczy. Jego wykłady, które zawsze szczegółowo, precyzyjnie i starannie przygotowywał, przyciągały wielu studentów. Warto tutaj zacytować wspomnienie lwowskich profesorów matematyki: Antoniego Łomickiego i Stanisława Ruziewicza:

Kto zaś słuchał tych wykładów wie doskonale, że były one przygotowane nadzwyczaj starannie, że Puzyna umiał wybrać z obfitego materiału rzeczy istotne a interesujące i że wygłaszał swe wykłady w szacie wytwornej, niemal poetycznej, przejmując słuchaczy swem umiłowaniem przedmiotu.[7] Dydaktyka zajmowała ważną, może i pierwszoplanową rolę w profesorskiej działalności Puzyny. W latach 1885−1910 opracował blisko trzydzieści wykładów z różnych dziedzin matematyki, m.in. z historii matematyki, teorii liczb, algebry, szeroko rozumianej analizy matematycznej i geometrii. Najbardziej jednak fascynowała go teoria funkcji analitycznych, której również poświęcił wiele wykładów. Interesował się również historią, filozofią, a także muzyką. Był fanatycznym wielbicielem muzyki Wagnera, z pamięci grywał na fortepianie całe fragmenty oper wagnerowskich.

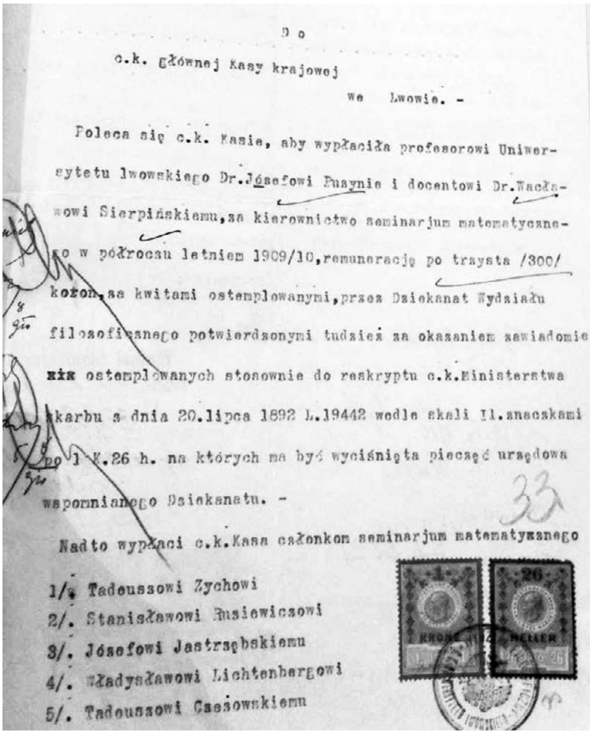
Puzyna w 1907 roku uczestniczył w pracach związanych z ankietą przeprowadzoną wśród wszystkich profesorów matematyki uniwersytetów Monarchii, był liczącym się i znanym profesorem matematyki w Monarchii. Celem tej ankiety było opracowanie memoriału, który został przedłożony Ministrowi Wyznań i Oświaty w Wiedniu. W memoriale wykazano, m.in., konieczność zwiększania liczby katedr matematyki w uniwersytetach Monarchii Austro-Węgierskiej.

Jakość kształcenia, pozyskiwanie środków na zakup dzieł z zakresu matematyki i fizyki było w kręgu zainteresowań profesorów uniwersyteckich. W Archiwum Obwodowym Lwowa zachowało się m.in. pismo Ministerstwa Wyznań i Oświaty z 1907 r. informujące profesorów Puzynę i Smoluchowskiego o przyznaniu dotacji specjalnej na zakup dzieł dla biblioteki seminarium matematycznego.

Działalność seminarium matematycznego wymagała stałej troski, studenci otrzymywali też stypendia, o które starał się Puzyna.

---

[7] A. Łomicki, S. Ruziewicz: *Józef Puzyna (1856−1919)*, Wiadomości Matematyczne 25(1921), 113−119.



Do

c.k. Głównej Kasy krajowej

we Lwowie. -

Poleca się c.k. Kasie, aby wypłaciła profesorowi Uniwersytetu lwowskiego Dr. Józefowi Puzynie i docentowi Dr. Wacławowi Sierpińskiemu, za kierownictwo seminarjum matematycznego w półroczu letniem 1909/10, remunerację po trzysta /300/ koron, za kwitami ostemplowanymi, przez Dziekanat Wydziału filozoficznego potwierdzonymi tudzież za okazaniem zawiadomie ~~zia~~ ostemplowanych stosownie do reskryptu c.k. Ministerstwa Skarbu z dnia 20. lipca 1892 L.19442 wedle skali II. znaczkami po 1 K. 26 h. na których ma być wyciśnięta pieczęć urzędowa wspomnianego Dziekanatu. -

Nadto wypłaci c.k. Kasa członkom seminarjum matematycznego

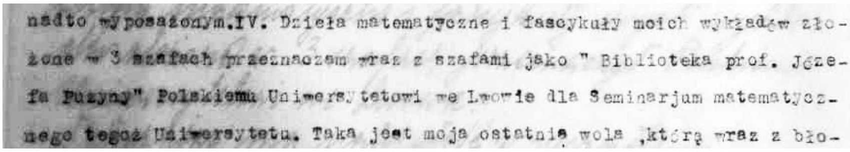
1/. Tadeuszowi Zychowi
2/. Stanisławowi Rusiewiczowi
3/. Józefowi Jastrzębskiemu
4/. Władysławowi Lichtenbergowi
5/. Tadeuszowi Czeżowskiemu

Fragmenty pisma Ministerstwa Wyznań i Oświaty (1910) informujące o przyznaniu stypendiów studentom-członkom seminarium matematycznego we Lwowie

3 Zakończenie

Dydaktyka zajmowała ważną, może i pierwszoplanową rolę w profesorskiej działalności Puzyny. Podkreślmy raz jeszcze, że w latach 1885−1910 opracował blisko trzydzieści wykładów z różnych dziedzin matematyki. Dzięki Puzynie w 1908 r. zaczął pracować we Lwowie W. Sierpiński, ten z kolei zaprosił Z. Janiszewskiego, który habilitował się we Lwowie w 1913 r. Doktoryzowali się za czasów Puzyny S. Mazurkiewicz i S. Ruziewicz, był ich formalnym promotorem. Dodajmy, że w 1917 r. habilitował się również współtwórca Lwowskiej Szkoły Matematycznej H. Steinhaus. Działania Puzyny przyczyniły się do rozwoju matematyki i do osiągnięcia sukcesów przez matematyków polskich po odzyskaniu niepodległości.

Puzyna był niezwykle zatroskany funkcjonowaniem Uniwersytetu Lwowskiego. M.in. swoją bogatą bibliotekę i rękopisy licznych wykładów pozostawił w darze dla Seminarium Matematycznego we Lwowie.


nadto wyposażonym.IV. Dzieła matematyczne i fascykuły moich wykładów zło-
żone w 3 szafach przeznaczam wraz z szafami jako " Biblioteka prof. Józe-
fa Puzyny" Polskiemu Uniwersytetowi we Lwowie dla Seminarjum matematycz-
nego tegoż Uniwersytetu. Taka jest moja ostatnia wola ,którą wraz z bło-

Fragment ostatniej woli Puzyny – dar dla Seminarium Matematycznego we Lwowie ([9])

Literatura

[1] Domoradzki S.: *The Growth of Mathematical Culture in the Lvov area in the Autonomy period (1870–1920)*. Matfyzpress, Prague, 2011.

[2] Domoradzki S.: *Towarzystwo Matematyczne we Lwowie*. In W. Więsław (ed.): *Dzieje matematyki polskiej*. Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 2012, 31–43.

[3] Domoradzki S.: *Teoria mnogości w dziele Józefa Puzyny Teorya funkcyj analitycznych*. In W. Więsław (ed.): *Dzieje matematyki polskiej*. Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 2012, 45–58.

[4] Domoradzki S., Zaricznyi M.: *On some aspects of set theory and topology in J. Puzyna's monumental work* (Technical Transaction, in print).

[5] Duda R.: *Lwowska szkoła matematyczna*. Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 2007.

[6] Kuratowski K.: *Pól wieku matematyki polskiej 1920–1970. Wspomnienia i refleksje*. „Wiedza Powszechna", Warszawa, 1973.

[7] Płoski A.: *O dziele Józefa Puzyny „Teorya funkcyj analitycznych*". In S. Fudali (ed.): *Materiały z II Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki*. Szczecin, 1988, 237–243.

[8] Prytula Y.: *Józef Puzyna- prekursor Lwowskiej Szkoły Matematycznej*. In M. Przeniosło (ed.): *Studia Matematyczne Uniwersytetu Humanistyczno-Przyrodniczego Jana Kochanowskiego w Kielcach* 11(2009), 113–119.

[9] Józef Puzyna, teka osobowa, Lwowskie Archiwum Obwodowe 26.5.15.68.

[10] Główny Katalog Studentów Uniwersytetu Lwowskiego, Lwowskie Archiwum Obwodowe 26.15.555.

Adres

Dr hab., prof. UR Stanisław Domoradzki
Wydział Matematyczno-Przyrodniczy
Uniwersytet Rzeszowski
35-951 Rzeszów
Ul. Prof. S. Pigonia 1
e-mail: *domoradz@ur.edu.pl*

POČET GRAFICKÝ A GRAFICKO-MECHANICKÝ VÁCLAVA LÁSKY A VÁCLAVA HRUŠKY

HELENA DURNOVÁ

Abstract: In the contribution, we first introduce two Czech representatives of practical mathematics, Václav Láska and Václav Hruška and their plan for a set of textbooks of practical mathematics. We will in particular focus on the methodology of computation with the help of drawing, i.e. graphical and graphico-mechanical calculus, a method that may seem obsolete, but is worth the historian's attention.

1 Úvod

Počet grafický, graficko-mechanický a nomografie byly v první polovině 20. století nedílnou součástí matematické přípravy inženýrů.[1] Pomocí přesného rýsování dovolovaly tyto metody rychle dospět ke kýženému výsledku. Jako velmi jednoduchý příklad může posloužit určení délky úhlopříčky ve čtverci: místo počítání podle Pythagorovy věty čtverec narýsujeme a její délku změříme. Graficky se dá i derivovat, integrovat nebo řešit diferenciální rovnice.

S rozvojem výpočetní techniky ztratily tyto metody na důležitosti. V tomto příspěvku naznačíme na příkladu první české souhrnné učebnice grafického a graficko-mechanického počtu, jaké místo zaujímá tato nauka ve vývoji matematiky. Nejprve však představíme autory této práce a zasadíme její vydání do širšího kontextu.

2 Václav Láska (1862–1943)

Od svého mládí projevoval Václav Láska zájem o matematiku, fyziku a astronomii, známý je však především svými pracemi z jiných oborů: geodézie, geofyziky, meteorologie, seismologie a kartografie. Svoji kariéru započal brzy po zahájení studií na pražské německé univerzitě jako dobrovolník hvězdárny v Klementinu. Roku 1887 získal doktorát z matematiky a o tři roky později se habilitoval pro vyšší geodézii a stal se asistentem astronomického ústavu. V roce 1895 odešel na polytechniku do Lvova, kde působil jako profesor astronomie a vyšší geodézie. Ve Lvově nejen přednášel, ale také vedl místní astronomicko-meteorologickou observatoř. Později převzal i vedení místní seismologické stanice a právě v seismologii získal mezinárodní věhlas. Do Prahy se vrátil v roce 1911 jako řádný profesor aplikované matematiky české univerzity. Po vzniku Československa působil v četných komisích a radách. Byl prvním ředitelem Státního ústavu geofyzikálního a podílel se mimo jiné na vzniku *Atlasu republiky Československé* [6].[2]

3 Václav Hruška (1888–1954)

Dalším z českých matematiků, kteří se v době meziválečné věnovali aplikované matematice, byl Václav Hruška. Původně studoval matematiku a deskriptivní geometrii na české technice a univerzitě v Praze s cílem stát se učitelem těchto předmětů na střední

[1] Výuka matematických předmětů na technických VŠ sestávala zejména z matematické analýzy a deskriptivní geometrie. (Viz [13].)
[2] Více informací o Václavu Láskovi lze nalézt v článcích [2, 9, 14], z nichž čerpá tento stručný odstavec.

škole. Po státní zkoušce v roce 1910 byl kandidátem učitelství[3] na vyšší reálce v Praze, ale již od roku 1911 byl navíc i asistentem matematiky na pražské technice. Na této škole získal v roce 1914 doktorský titul a v roce 1919 se habilitoval pro matematiku. Od roku 1921 přednášel grafické početní metody (viz [8]), od roku 1928 jako mimořádný a od roku 1931 jako řádný profesor. Na poli grafického počtu začal Václav Hruška spolupracovat s Václavem Láskou. Díky zájmu o numerické počítání Václav Hruška po 2. světové válce záhy pochopil význam počítacích strojů pro výpočtovou matematiku a svým osobním nasazením přispěl k etablování oboru matematických strojů u nás (blíže viz [2]).

4 Stručně k historii grafického počtu a nomografie

Grafický počet lze rozdělit (viz [5]) na grafický počet v užším slova smyslu, tj. nauku o grafickém provádění operací v aritmetice, algebře a analýze (neboli způsob, jak vidět a změřit řešení pomocí narýsovaného obrázku, viz [3], str. 192) a nomografii, tedy nauku o sestrojování a užívání grafických tabulek funkcionálních vztahů mezi více proměnnými. O graficko-mechanickém počtu mluvíme v případě, že k měření výsledku používáme mechanické pomůcky, které dovolují dosahovat větší přesnosti než samotné rýsování.

Systematické využití grafických metod je spjato s rozvojem techniky, zejména se stavbou železnic ve Francii v 19. století. Za zakladatele nomografie je považován francouzský důstojník Maurice d'Ocagne (1862–1938), jehož první souborná práce o nomografii vyšla v roce 1891. Nomografie se dále rozvíjela především na přelomu 19. a 20. století (blíže viz [3, 7]). V první polovině 20. století byly grafický počet a nomografie považovány za nezbytnou pomůcku inženýra jako součást tzv. praktické matematiky, dnes nazývané častěji matematikou aplikovanou nebo numerickou. V českých zemích se nomografií zabývali zejména V. Láska a V. Hruška. Po 2. světové válce v souvislosti s rozvojem výpočetní techniky význam této výpočetní metody během tří desetiletí pominul.[4]

5 Plánované učebnice praktického počtu

V. Láska a V. Hruška plánovali vydání učebnic praktického počtu ve třech dílech. *Počet grafický a graficko-mechanický*, který vyšel v roce 1923, byl prvním z nich. Následovat měly *Počet numerický a mechanický (počítací stroje)* a *Nauka o hledání empirických formulí,* světlo světa však spatřila (v roce 1934) pouze *Teorie a prakse numerického počítání*. Ta se po válce (v roce 1952) dočkala zásluhou V. Hrušky výrazného přepracování a rozšíření. Rozsah nového vydání byl oproti předchozímu několikanásobný. Obraťme nyní pozornost k původnímu vydání *Počtu grafického a graficko-mechanického*.[5]

5.1 Počet grafický a graficko-mechanický (1923)

V úvodním oddíle své knihy poskytují V. Láska a V. Hruška rady týkající se nezbytných předpokladů k úspěšnému používání grafického počtu. Autoři nabádají čtenáře k přesnému rýsování a radí mu, na jaký papír má rýsovat a jakou má tužku zvolit. V neposlední řadě autoři popisují, jak zajistit přesnot při rýsování: „Při kreslení čáry dle pravítka jest tužku odkloniti poněkud ze svislé polohy a sice horním koncem od pravítka, aby hrot tužky byl přesně veden hranou pravítka." (Viz [5], str. 1.) Dále podávají praktické informace ohledně volby tzv. modulu (jednotky měření), od níž je odvozeno měřítko

---

[3] Po státní zkoušce z předmětu musel budoucí učitel absolvovat ještě rok praxe na příslušné škole. Více viz [10].
[4] Učebnice nomografie vycházely ještě v 80. letech 20. století; viz www.jib.cz.
[5] V době, kdy tento díl vyšel, bylo například v němčině pouze jedno dostupné dílo o nomografii, totiž shrnutí d'Ocagnovy knihy z konce 19. století. (Viz [11].)

pro rýsování. Je totiž zřejmé, že čím větší bude narýsovaný obrázek, tím přesněji se nám podaří změřit požadovanou délku. Za tím účelem je možné si sestrojit libovolné měřítko například na proužku papíru tak, že naneseme několikrát za sebe zvolený modul rozdělený na vhodný počet stejných dílků, přičemž jednotlivé dílky by z praktických důvodů měly být nejméně půl milimetru široké. Takové měřítko bylo pro některé moduly možno zakoupit, avšak místo několika dřevěných pravítek určených pro rýsování podle různých měřítek doporučují autoři použít papírové *proporcionelní měřítko*: „Promítneme-li z bodu nějaké měřítko, na př. o modulu $\mu = 25$ cm, svazkem paprsků, můžeme patrně obdržeti měřítko o libovolném modulu menším tím, že papír přeložíme dle vhodné rovnoběžky s původním měřítkem." (Viz [5], str. 3.)

Ve druhém oddíle, nazvaném „Grafická arithmetika a algebra", autoři pojednávají o nejjednodušších konstrukcích. Představují v ní grafické provedení čtyř základních operací, grafické řešení systémů lineárních rovnic, řešení algebraických rovnic, schémata mnohočlenů a grafy součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí.

Ve zbývajících dvou oddílech jsou vyloženy metody spadající do nomografie jako takové. Výklad začíná pojednáním o funkcionálních stupnicích. Funkcionální stupnice mají podobnou roli jako graf funkce, neboť z nich, podobně jako z grafu funkce, můžeme odečítat funkční hodnoty v jednotlivých bodech. Některé hojně užívané stupnice mají i své jméno: projektivní (pro funkce racionální lomené), reciproké (pro nepřímou úměrnost) a logaritmické. Spojením dvou logaritmických stupnic tak, aby se jednou dalo posouvat po-dél druhé, vzniká jednoduchý prostředek pro rychlé přibližné výpočty, logaritmické pra-vítko.[6] Dalšími prostředky grafického počítání, jejichž konstrukce je v tomto oddíle vylo-žena, jsou grafické papíry a průsečíkové a spojnicové nomogramy. Celá kniha vrcholí od-dílem o grafickém derivování, integrování a řešení diferenciálních rovnic.

Kniha je doplněna názornými ukázkami rýsování včetně měření. Velmi cenné z hlediska vývoje výpočtové matematiky jsou i úvahy autorů týkající se přesnosti a rychlosti výpočtů. Autoři například upozorňují, že pro řadu oblastí praktických výpočtů postačí přesnost na dvě až tři desetinná místa, jíž lze u grafických metod dosáhnout vhodnou volbou jednotky měření. (Viz [5], str. iii.)

Výhodou grafického počtu byla menší náchylnost této metody k chybám, než tomu bylo v případě numerických výpočtů, a nesrovnatelně větší rychlost. Grafické metody byly proto používány i pro odhad počátečních hodnot při použití iteračních metod. V případě grafických metod nejde o zjednodušení či vizualizaci, ale doslova o výpočet. Jak píší Václav Láska a Václav Hruška v předmluvě ke knize *Počet grafický a graficko-mechanický* [5], v některých praktických případech nešlo jen o samotné provedení výpočtu, ale také o to, aby výsledky byly ještě použitelné: například v letectví, potřebujeme-li navést letadlo na přistávací dráhu, máme pro výpočet pouze omezený čas.

6 Závěr

Z dnešního pohledu by se mohlo zdát, že je Láskova a Hruškova kniha o grafickém počtu pouhou historickou kuriozitou, neboť popisuje metody, které s rozvojem výpočetní techniky ztratily na významu, a řada lidí již neví, co nomografie byla. Kouzlo této knihy však spočívá právě v tom, že s metodami grafického počtu seznamuje čtenáře, který

[6] Základy manipulace s logaritmickým pravítkem se vyučovaly na ZŠ ještě v 80. letech 20. století.

s podobnou metodou nemá žádné nebo jen velmi malé praktické zkušenosti (viz Předmluva k [5]), pročež jsou praktické problémy související s grafickým počtem pečlivě vysvětleny.

Díky tomu, že je Láskův a Hruškův *Počet grafický a graficko-mechanický* orientován prakticky, dává těm dnešním čtenářům, kteří se ve škole neučili zacházet ani s logaritmickým pravítkem, nahlédnout do souvislostí spojených s výpočtovou matematikou v době těsně před bouřlivým rozvojem výpočetní techniky. Další vhled do problematiky grafického a graficko-mechanického počtu lze získat studiem knihy mladšího z autorů, *Konstrukce omezenými prostředky* [4], v níž se dozvíme například to, jak je třeba postupovat, nestačí-li k narýsování požadovaného vztahu rozměr použitého papíru. V neposlední řadě poskytuje práce Václava Lásky a Václava Hrušky cenné svědectví o závěrečné fázi přechodu od ručního počítání k počítání na počítacích strojích.

Literatura

[1] Boháč J.: *Václav Láska.* Akademický bulletin AV ČR, 2012, č. 12, 32.

[2] Durnová H.: *Matematikové u matematických strojů.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 56(2011), 194–206.

[3] Evesham H. A.: *The History and Development of Nomography*. Docent Press, Boston, 2010.

[4] Hruška V.: *Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace.* JČMF, Praha, 1940.

[5] Láska V., Hruška V.: *Počet grafický a graficko-mechanický.* JČSMF, Praha, 1923.

[6] Láska V., Pantoflíček J.: *Atlas republiky Československé.* Orbis, Praha, 1935.

[7] Pleskot V.: *Nomografie a grafický počet v technické praksi*. SPASEI, Praha, 1949.

[8] Pleskot V.: *Prof. Dr. Václav Hruška.* Stroje na zpracování informací 3(1955), 9–14.

[9] Pleskot V., Zátopek A.: *In memoriam profesora Dr. Václava Lásky.* Časopis pro pěstování matematiky 89(1964), 247–249.

[10] Potůček J.:*Vývoj vzdělání učitelů elementárních a středních škol.* In Bečvář J., Fuchs E. (ed.): *Matematika v proměnách věků. I.* Prometheus, Praha, 1998, 181–191.

[11] Schilling F.: *Über die Nomographie von M. d'Ocagne.* Teubner Verlag, Leipzig, Berlin, 1922.

[12] Smith D. E.: *Source Book in Mathematics*. Dover Publications, 1959.

[13] Šišma P.: *Matematika na německé technice v Brně.* Prometheus, Praha, 2002.

[14] Vetter Q.: *Profesor Dr. Václav Láska šedesátníkem.* Časopis pro pěstování matematiky a fyziky 53(1924), 1–19.

Adresa

Mgr. Helena Durnová, Ph.D.
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta, Masarykova univerzita
Poříčí 31
603 00 Brno 3
e-mail: *helena.durnova@mail.muni.cz*

KURT HENSEL A *p*-ADICKÁ ČÍSLA

MAGDALENA HYKŠOVÁ

Abstract: The contribution recalls the personality of Kurt Hensel and discusses his most famous mathematical result, the introduction of *p*-adic numbers. His primary motivation was to use methods of mathematical analysis for the simplification of the theory of algebraic numbers. Throughout the 20th century, *p*-adic numbers found interesting applications also outside pure mathematics, e.g., in physics, probability theory or modeling.

1 Kurt Hensel (1861 – 1941)

Kurt Hensel se narodil 29. prosince 1861 ve východopruském Královci v dobře situované židovské rodině Sebastiana Hensela[1] a jeho ženy Julie, dcery obchodníka Jacoba Ludwiga von Adelsona. Když bylo Kurtovi devět let, přestěhovala se rodina do Berlína, kde se jeho otec stal ředitelem konstrukční firmy. Od roku 1880 studoval Kurt Hensel matematiku a částečně také fyziku a filosofii na univerzitě v Berlíně a v Bonnu. Mezi jeho učitele patřili například Carl Borchardt, Hermann von Helmholtz, Gustav Kirchhoff, Rudolf Lipschitz, Karl Weierstrass či Leopold Kronecker, pod jehož vedením Hensel napsal disertační práci *Arithmetische Untersuchungen über Diskriminaten und ihre ausserwesentlichen Teiler*, kterou obhájil v roce 1884 na berlínské univerzitě. O dva roky později se Hensel na téže univerzitě habilitoval a byl jmenován soukromým docentem. V roce 1887 se oženil s Gertrudou Hahnovou; v jejich manželství se narodilo celkem pět dětí – jeden syn a čtyři dcery. V roce 1890 byl Hensel jmenován mimořádným profesorem na univerzitě v Berlíně, o jedenáct let později získal místo řádného profesora na univerzitě v Marburku, kde pak působil až do svého penzionování v roce 1930. Kurt Hensel zemřel 1. června 1941 v Marburku.[2]

Patrně největší vliv na Henselovo odborné zaměření v matematice měl jeho učitel Leopold Kronecker, který byl žákem Ernsta Eduarda Kummera. Připomeňme, že Kummer vybudoval aritmetiku pro celá cyklotomická čísla, tj. pro čísla z okruhu $\mathbb{Z}[\alpha]$, kde $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha^{\lambda} = 1$, $\alpha \neq 1$. Jako první upozornil na skutečnost, že ireducibilní prvek okruhu $\mathbb{Z}[\alpha]$ nemusí být zároveň prvočinitelem v dnešním smyslu; aby tento problém odstranil, rozšířil okruh $\mathbb{Z}[\alpha]$ o „ideální čísla”, jež umožnila rozložit takový „nevhodný prvek” na součin prvočinitelů. Leopold Kronecker pak byl vedle Richarda Dedekinda a Egora Ivanoviče Zolotareva jedním z matematiků, kteří různými způsoby vybudovali aritmetiku pro obecný případ, tj. pro okruh celých algebraických čísla z jistého tělesa $\mathbb{Q}(\alpha)$, kde $\alpha \in \mathbb{C}$ je kořenem nějakého polynomu s racionálními koeficienty.[3]

Kurt Hensel věnoval mnoho času soubornému vydání Kroneckerova díla; v letech 1895–1930 vydal celkem pět svazků. Cenil si rovněž díla E. E. Kummera, což vedle různých citací dokládají i pojednání [10] a [11]. V oblasti teorie algebraických čísel přitom sám dosáhl originálních a pozoruhodných výsledků.

---

[1] Poznamenejme, že Sebastianova matka Fanny byla starší sestrou hudebního skladatele Felixe Mendelssohna-Bartholdyho, která sama hrála výborně na klavír a komponovala; celkem napsala více než 500 skladeb.

[2] Podrobné informace o životě a díle K. Hensela lze nalézt například v disertační práci [17] B. Petri.

[3] Okruh celých čísel tělesa $\mathbb{Q}(\alpha)$ je tvořen těmi prvky, jež jsou zároveň kořeny nějakého monického polynomu s koeficienty v $\mathbb{Z}$. Podrobněji viz např. autorčinu publikaci [15].

161

2 *p*-adická čísla

2.1 Motivace

Hensel se intenzivně věnoval teorii algebraických funkcí – viz např. knihu [14], kterou vydal společně s Georgem Landsbergem. A právě metody teorie funkcí se snažil použít ke zjednodušení teorie algebraických čísel.[4] Základní myšlenku lze stručně vyjádřit následujícím způsobem. Pro libovolnou racionální funkci komplexní proměnné můžeme uvažovat její rozvoj se středem v libovolném bodě $\alpha \in \mathbb{C}$, resp. v nekonečnu:

$$f(z) = \sum_{i=n}^{\infty} a_i (z-\alpha)^i, \text{ kde } n \in \mathbb{Z}, \quad \text{resp. } f(z) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{a_i}{z^i}, \text{ kde } n \in \mathbb{Z}.$$

Díky tomu, že máme k dispozici rozvoj dané funkce v různých bodech, máme velmi dobrou představu o její povaze. Řada omezení v dosavadní teorii algebraických čísel je podle Hensela dána tím, že čísla jsou tradičně reprezentována jediným způsobem, totiž dekadickým rozvojem. Kdybychom pro funkce měli k dispozici rozvoj například jen v nule nebo v nekonečnu, narazili bychom i zde na podobná omezení jako v teorii algebraických čísel. Henselovým cílem proto bylo získat pro algebraická čísla nekonečně mnoho alternativních reprezentací, z nichž každá by přinesla nový pohled na vztah daného čísla k určitému přirozenému číslu.

Pro libovolné přirozené číslo g Hensel uvažoval formální nekonečné řady tvaru

$$A = \sum_{i=n}^{\infty} a_i g^i, \text{ kde } n \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0, 1, ..., g-1\} \text{ pro všechna } i \in \mathbb{Z}, i \geq n, \tag{1}$$

které nazýval g-adickými čísly. Poprvé tyto objekty (pro prvočíselný základ p) představil v přednášce pronesené v roce 1897 na shromáždění jednoty německých matematiků DMV (Deutsche Mathematiker-Vereinigung) v Brauschweigu a otištěné o dva roky později pod názvem *Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen* [3]. Z dalších Henselových publikací na toto téma zde uveďme pojednání [4] – [7] z let 1901 – 1907. Výsledky své práce na poli teorie algebraických čísel Hensel shrnul v dodnes často citované monografii *Theorie der algebraischen Zahlen I* [8] z roku 1908. V roce 1913 vyšla monografie *Zahlentheorie* [12], věnovaná obecněji okruhům g-adických čísel pro složené číslo g.

Henselovo zavedení g-adických čísel a jeho teorie čísel algebraických jsou podrobně popsány v autorčině monografii [15].[5] Na tomto místě jen poznamenejme, že pro řady tvaru (1) Hensel definoval rovnost a početní operace pomocí k-tých aproximací

$$A^{(k)} = a_n g^n + a_{n+1} g^{n+1} + \cdots + a_k g^k$$

a dokázal, že pro složené číslo g tvoří g-adická čísla komutativní okruh (viz [12]). Speciálně v případě prvočíselného základu, tj. $g = p$, Hensel dokázal, že p-adická čísla tvoří těleso, které se dnes obvykle značí symbolem $\mathbb{Q}_p$. Zároveň tak Hensel podal příklad zcela nového tělesa, odlišného od dosud obvyklých číselných těles, popř. těles racionálních funkcí (viz např. [1]).

---

[4] Poznamenejme, že Richard Dedekind a Heinrich Weber použili v článku [2] o algebraických funkcích myšlenky původně uplatněné v teorii algebraických čísel. Hensel se vydal opačným směrem.
[5] Kniha je k dispozici na stránkách České digitální matematické knihovny DML (http://www.dml.cz/).

2.2 Vlastnosti tělesa p-adických čísel

Podívejme se nyní v krátkosti na některé zajímavé vlastnosti tělesa $\mathbb{Q}_p$, kde p je libovolné prvočíslo. Dnes se toto těleso zavádí obvykle jako zúplnění tělesa racionálních čísel vzhledem k *p-adické normě* $|\cdot|_p$ definované na $\mathbb{Q}$ následujícím způsobem.[6] Uvažujme libovolné nenulové $x \in \mathbb{Q}$. Toto číslo lze vyjádřit ve tvaru $x = p^{\beta} u/v$, kde $u, v, \beta \in \mathbb{Z}$, čísla u, v jsou nesoudělná s p. Položme

$$|x|_p = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0, \\ p^{-\beta} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Uvědomme si, že norma $|\cdot|_p$ je *nearchimedovská*, neboli pro libovolná $x, y \in \mathbb{Q}$ platí tzv. *ultrametrická nerovnost*:

$$|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p),$$

zatímco „obyčejná" absolutní hodnota je *archimedovská* (ultrametrická nerovnost pro ni neplatí). Lze dokázat, že každá netriviální norma na $\mathbb{Q}$ je ekvivalentní buď s některou p-adickou normou, anebo s „obyčejnou" absolutní hodnotou (v případě, že je rovněž archimedovská).[7] Vzhledem k tomu, že ekvivalentní normy vedou k isomorfním zúplněním, jsou až na isomorfismus jedinými úplnými uzávěry tělesa racionálních čísel těleso čísel reálných a tělesa čísel p-adických pro různá prvočísla p.

3 Další vývoj ve 20. století

Jak jsme viděli výše, prvotní Henselovou motivací byla snaha o využití metod matematické analýzy pro vytvoření uspokojivé teorie algebraických čísel. V průběhu 20. století se p-adická čísla stala důležitou součástí moderní teorie čísel a dnes se používají například ke zlomení šifrovacích algoritmů postavených na eliptických křivkách nebo k aproximaci Riemannovy zeta funkce. Postupně však p-adická čísla našla zajímavé aplikace i mimo „čistou matematiku", například v kvantové fyzice (viz [19]) či teorii pravděpodobnosti. Poznamenejme, že první teorie p-adické pravděpodobnosti byla četnostní, založená na jednoduché myšlence: relativní četnosti jsou prvky tělesa racionálních čísel. Jejich chování můžeme studovat nejen v reálné topologii na $\mathbb{Q}$, ale také v různých p-adických topologiích. Jinými slovy, limity můžeme uvažovat nejen v $\mathbb{R}$, ale i v libovolném tělese $\mathbb{Q}_p$. Později byla vytvořena abstraktní teorie nearchimedovské míry (viz [18]), na jejímž základě bylo možné vybudovat axiomatickou teorii pravděpodobnosti, analogickou s teorií Kolmogorovovou (viz [16]).

Na závěr dodejme, že p-adické metody představují také důležitý nástroj pro modelování složitých dynamických systémů s využitím mj. v biologii a společenských vědách.

Literatura

[1] Corry L.: *The Origins of the Definition of Abstract Rings*. Gazette des Mathématiciens 83(2000), 28–47.

---

[6] Podobně těleso $\mathbb{C}_p$ se zavádí jako zúplnění algebraického uzávěru tělesa $\mathbb{Q}_p$.

[7] Připomeňme, že normy $|\cdot|_1$ a $|\cdot|_2$ se nazývají ekvivalentní, jestliže existuje $\alpha > 0$, pro které $|\cdot|_1^{\alpha} = |\cdot|_2$. Dodejme, že tzv. *p-adická metrika* je pro libovolná $x, y \in \mathbb{Q}$ definována vztahem $\rho_p(x, y) = |x - y|_p$.

[2] Dedekind R., Weber H.: *Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen*. Jour. reine und angewandte Math. 92(1882), 181–290.

[3] Hensel K.: *Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen*. Jahresbericht DMV 6(1899), 83–88.

[4] Hensel K.: *Über die Entwickelung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen*. Math. Ann. 55(1901), 301–336.

[5] Hensel K.: *Über analytische Funktionen und algebraische Zahlen*. Sitzungsberichte der Berliner Math. Ges. 1(1902), 29–32.

[6] Hensel K.: *Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen*. Jour. reine und angewandte Math. 128(1905), 1–32.

[7] Hensel K.: *Über die arithmetischen Eigenschaften der Zahlen*. Jahresbericht DMV 16(1907), 299–319, 388–393, 473–496.

[8] Hensel K.: *Theorie der algebraischen Zahlen I*. B. G. Teubner, Leipzig, 1908.

[9] Hensel K.: *Über die zu einer algebraischen Gleichung gehörigen Auflösungskörper*. Jour. reine und angewandte Math. 136(1909), 183–209.

[10] Hensel K.: *Gedächtnisrede auf Ernst Eduard Kummer*. In *Festschrift zur Feier des 100. Geburtstages Eduard Kummers*. B. G. Teubner, Berlin-Leipzig, 1910, 1–37.

[11] Hensel K.: *E. E. Kummer und der grosse Fermatsche Satz,* Marburger Akademische Reden (1910), č. 23.

[12] Hensel K.: *Zahlentheorie*. G. J. Göschen, Berlin-Leipzig, 1913.

[13] Hensel K.: *Eine Neue Theorie der algebraischen Zahlen*. Math. Zeit. 2(1918), 433–452.

[14] Hensel K., Landsberg G.: *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale*. B. G. Teubner, Leipzig, 1902.

[15] Hykšová M.: *Karel Rychlík (1885–1968)*. Prometheus, Praha, 2003.

[16] Khrennikov A., van Rooij A., Yamada S.: *The measure-theoretical approach to p-adic probability theory*. Annales mathématiques Blaise Pascal 6(1999), č. 1, 21–32.

[17] Petri B.: *Perioden, Elementarteiler, Transzendenz – Kurt Hensels Weg zu den p-adischen Zahlen*. Dissertation TU Darmstadt, 2011 [online, cit. 20. 4. 2014]. http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/2785/.

[18] Van Rooij A.: *Non-archimedean Functional Analysis*. M. Dekker, New York, 1978.

[19] Vladimirov V. S., Volovich I. V.: *p-adic quantum mechanics*. Commun. Math. Phys. 123(1989), 659–676.

Adresa

RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
e-mail: *hyksova@fd.cvut.cz*

NAUCZANIE GEOMETRII ANALITYCZNEJ W KRAKOWSKICH GIMNAZJACH NA PRZEŁOMIE XIX I XX WIEKU

KATARZYNA JEDYNAK

Abstract This article is devoted to teaching analytic geometry in secondary-schools (called Gymnasium) in Kraków in the late 19th and early 20th century. The analytic geometry curriculum has been presented. The chapter with analytic geometry in the book by F. Močnik*: Geometrya dla klas wyższych szkół średnich* [3] has been discussed. The article also includes exercises solved during the Matura examination.

1 Wstęp

Na przełomie XIX i XX wieku Kraków znajdował się w Imperium Austriacko-Węgierskim, w części którą nazywano Królestwem Galicji i Lodomerii. W tym okresie od 1870 silnie rozwijało się szkolnictwo gimnazjalne w Krakowie. Władzą ustawodawczą i wykonawczą dla szkół na terenie Galicji była Rada Szkolna Krajowa z siedzibą we Lwowie. W corocznych sprawozdaniach Rady opisywany był stan szkolnictwa. W *Sprawozdaniu c. k. Rady szkolnej krajowej o stanie szkół średnich galicyjskich* [9] z roku 1875 w Krakowie zostały wymienione dwa gimnazja oraz jedna wyższa szkoła realna. W sprawozdaniu za rok szkolny 1909/1910 wymieniono już sześć gimnazjów państwowych (w tym jedno gimnazjum realne[1] i jedna filia), dwie wyższe szkoły realne, trzy prywatne gimnazja męskie oraz trzy prywatne gimnazja żeńskie.

Najstarszą szkołą w Krakowie, działającą również w XIX wieku, było Gimnazjum św. Anny. Gimnazjum to zostało utworzone w 1588 roku, jako Gimnazjum Nowodworskie, obecnie jest to I Liceum Ogólnokształcące im. B. Nowodworskiego. W 1857 roku powstało Gimnazjum św. Jacka. Do tradycji tej szkoły odwołuje się dzisiejsze VI Liceum Ogólnokształcące, które powstało w 1902 roku jako filia Gimnazjum św. Jacka. Pierwsza Wyższa Szkoła Realna została otwarta w 1871 roku, obecnie jest to V Liceum Ogólnokształcące im. A. Witkowskiego. Do roku 1910 zostały otwarte kolejne cztery państwowe gimnazja: 1883r. – im. Króla Jana Sobieskiego, 1900 r. – IV Państwowe Gimnazjum, 1906 r. – V Państwowe Gimnazjum, 1892 r. – Gimnazjum w Podgórzu oraz 1899 r. – II yższa Szkoła Realna. Ponadto w tym okresie powstawały liczne prywatne gimnazja: Prywatna Szkoła Żeńska – 1896 r., Gimnazjum Żeńskie im. Królowej Jadwigi – 1905 r., szkoła Heleny Strażyńskiej – z prawami szkoły publicznej w roku szkolnym 1905/6, Gimnazjum Realne ss. Urszulanek – 1910 r., Prywatne Gimnazjum prof. S. Jaworskiego

[1] Różnica pomiędzy gimnazjami klasycznymi, a realnymi polegała głównie na liczbie godzin przeznaczonych na naukę poszczególnych przedmiotów. W gimnazjach klasycznych więcej godzin lekcyjnych poświęcano na naukę łaciny oraz greki. W gimnazjum realnym dodatkowym przedmiotem była geometria wykreślna. Gimnazja były ośmioklasowe, zaś Wyższe Szkoły Realne były siedmioklasowe. Dodatkowymi przedmiotami w tych szkołach były rysunki geometryczne, które w starszych klas zamieniano na geometrię wykreślną, nie wykładano w nich łaciny i greki.

– 1908 r., Prywatne Gimnazjum Realne oo. Pijarów – 1909r. oraz Szkoła Heleny Kaplińskiej – 1909 r.

W rozwijających się szkołach często uczyli wybitni nauczyciele, którzy publikowali prace w sprawozdaniach oraz czasopismach pedagogicznych. Wszystkie zadania maturalne zapisywano w specjalnych protokołach. Tak obszerne materiały zachowane do dnia dzisiejszego sprawiły, iż nauczanie w gimnazjach stało się przedmiotem zainteresowań historyków. Powstało wiele prac poświęconych m.in. nauczaniu matematyki w gimnazjach galicyjskich oraz przygotowaniu nauczycieli matematyki. W poniższym artykule chciałabym przybliżyć temat nauczania geometrii analitycznej w gimnazjach krakowskich.

2 Geometria analityczna

2.1 Program nauczania

Od roku 1851 w Monarchii Austro-Węgierskiej dyrektorzy szkół byli zobowiązani do wydawania *Sprawozdań szkolnych*. W sprawozdaniach podsumowany był cały rok pracy w szkole. Sprawozdania zawierały część naukową, w której nauczyciele publikowali prace oraz część urzędową zawierającą informacje o nauczycielach, uczniach, sprawach organizacyjnych dotyczących danej placówki, a także o planie nauki (zwykle tylko schematycznym).

Geometria analityczna zarówno w gimnazjach, jak i w szkołach realnych była wymieniana w programie klasy siódmej. Na matematykę w siódmej klasie gimnazjum były przeznaczone 3 albo 4 godziny (zmieniało się to w różnych latach nauczania), w szkole realnej zaś 4 albo 5 godzin. Były to lekcje przeznaczone nie tylko na nauczanie geometrii analitycznej. W zamieszczonych poniżej fragmentach sprawozdań wymienione są również inne zagadnienia, które uczniowie realizowali w siódmej klasie. W gimnazjach program nauczania matematyki (zob.

Rysunek **1**) obejmował również zagadnienia z algebry, z rachunków praktycznych (np. procenty, renty) oraz kombinatoryki. Na-tomiast w szkołach realnych (zob.

Rysunek **2**) zagadnienia z arytmetyki oraz geometrii.

Matematyka, tyg. godz. 3. Algebra: Równania II stopnia i wyższych, równania przestępne i nieoznaczone stopnia I, postępy, rachunek procentu złożonego i rachunek rent, kombinacye, wzór Newtona. Geometrya. Trygonometrya i geometrya analityczna w płaszczyźnie. Zadanie jak w kl. V.

Rysunek 1: Plan nauki matematyki w klasie VII.
Sprawozdanie Dyrektora C. K. Gimnazyum św. Jacka w Krakowie za rok 1901.

Na przełomie XIX i XX wieku szkolnictwo w Galicji, podobnie jak teraz, poddane było wielu reformom. Nowy plan nauki gimnazjalnej został ogłoszony 23 lutego 1900 roku. Jednak znaczne zmiany w podejściu do nauczania matematyki w Polsce zostały wprowadzone dopiero wskutek realizacji postulatów *Programu Merańskiego*[2]. W Galicji w roku 1909 zostały wprowadzone nowe plany nauczania dla szkół średnich, które zostały opracowane w duchu Programu Merańskiego. Znalazły się w nich następujące zagadnienia z geometrii analitycznej:

Nawiązując do dokonanych już dotąd geograficznych (!) przedstawień poszczególnych funkcyi, stosować w dalszem następstwie metody analityczne o linii pierwszego i dru-giego stopnia, przy czem okolicznościowo wskazywać planimetryczne traktowanie tych samych utworów i stosunków.

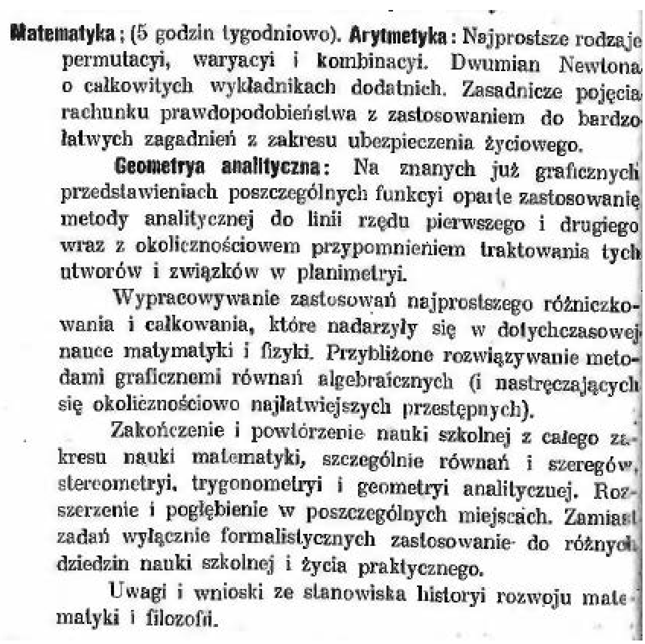
Przedstawianie za pomocą stosunku różniczkowego współczynników kierunkowych głównie linii krzywych, uwzględnianych w toku nauki. Przybliżone rozwiązywanie metodami graficznemi równań algebraicznych (i nastręczających się przy tym sposobności przestępnych). (zob. [6])

Matematyka: (4 godziny na tydzień). Arytmetyka ogólna: Zasady nauki o połączeniach. Dwumian Newtona dla wykładników całkowitych i dodatnich. Zasady nauki o prawdopodobieństwie.

Geometrya: Trygonometrya sferyczna. Najważniejsze własności trójkąta sferycznego, jego powierzchnia. Najważniejsze wzory do rozwiązywania trójkątów sferycznych prosto- i ukośnokątnych. Zastósowanie trygonometryi sferycznej do stereometryi i najprostszych zagadnień astronomicznych. Geometrya analityczna: Geometrya analityczna prostej i koła i przecięć stożkowych na płaszczyźnie na podstawie spółrzędnych prostokątnych, a w niektórych ważniejszych przypadkach także spółrzędnych biegunowych. Własności przecięć stożkowych ze względu na ognisko, styczne, normalne i średnice. Kwadratura elipsy i paraboli. — Powtórzenie całego materyału naukowego klas wyższych na przykładach odpowiednio dobieranych.

Rysunek 2: Plan nauki matematyki w klasie VII.
Sprawozdanie Dyrekcyi C. K. Wyższej Szkoły Realnej w Krakowie za rok 1901.

2 *Program Merański*, to program nauczania matematyki w szkołach średnich, który został uchwalony w roku 1905 w Meranie przez *Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte*. Jego głównym pomysłodawcą był Feliks Klein. Symbolem Programu Merańskiego stała się funkcja, która miała integrować wszystkie przedmioty matematyczne i być podstawowym narzędziem zastosowań matematyki (zob. [5]).



Matematyka; (5 godzin tygodniowo). **Arytmetyka**: Najprostsze rodzaje permutacyi, waryacyi i kombinacyi. Dwumian Newtona o całkowitych wykładnikach dodatnich. Zasadnicze pojęcia rachunku prawdopodobieństwa z zastosowaniem do bardzo łatwych zagadnień z zakresu ubezpieczenia życiowego.

Geometrya analityczna: Na znanych już graficznych przedstawieniach poszczególnych funkcyi oparte zastosowanie metody analitycznej do linii rzędu pierwszego i drugiego wraz z okolicznościowem przypomnieniem traktowania tych utworów i związków w planimetryi.

Wypracowywanie zastosowań najprostszego różniczkowania i całkowania, które nadarzyły się w dotychczasowej nauce matymatyki i fizyki. Przybliżone rozwiązywanie metodami graficznemi równań algebraicznych (i nastręczających się okolicznościowo najłatwiejszych przestępnych).

Zakończenie i powtórzenie nauki szkolnej z całego zakresu nauki matematyki, szczególnie równań i szeregów, stereometryi, trygonometryi i geometryi analitycznej. Rozszerzenie i pogłębienie w poszczególnych miejscach. Zamiast zadań wyłącznie formalistycznych zastosowanie do różnych dziedzin nauki szkolnej i życia praktycznego.

Uwagi i wnioski ze stanowiska historyi rozwoju matematyki i filozofii.

Rysunek 3: Plan nauki matematyki w klasie VII.
Sprawozdanie Dyrekcyi C. K. I. Wyższej Szkoły Realnej w Krakowie za rok 1910.

Takie same rozporządzenia dotyczące geometrii analitycznej były w planie nauki dla gimnazjum klasycznego, realnego oraz szkoły realnej. Na końcu programu nauczania matematyki znalazły się dodatkowe uwagi odnośnie do nauczania geometrii analitycznej [6]:

Geometrię analityczną należy wydatnie przygotowywać przez poprzednie graficzne unaocznienia funcyi tak, że z początku chodzić będzie głównie tylko o zestawienia. Tem większą przeto uwagę można zwrócić na przecięcia stożka tem bardziej, że już nastręczały do tego sposobności graficzne.

W zamieszczonym fragmencie sprawozdania (zob. Rysunek 3) można zauważyć, jak zostały zrealizowane zalecenia nowego planu nauczania w I Wyższej Szkoły Realnej w Krakowie.

2.2 Podręcznik

W XIX wieku korzystano z podręcznika Franca Močnika[3]: *Geometrya dla klas wyższych szkół średnich* przełożonego na język polski przez T. Staneckiego, w późniejszym okresie korzystano z przekładu G. Maryniaka [3]. Do roku 1916 był to jedyny

[3] Franc Močnik (1814−1892) był słoweńskim matematykiem. Po ukończeniu gimnazjum i liceum w Lublanie studiował do 1836 r. teologię w Gorycji (Włochy). Następnie studiował filozofię na Uniwersytecie w Grazu. W 1839 r. opublikował w Wiedniu swoją teorię równań numerycznych z jedną niewiadomą; w 1840 r. został doktorem filozofii. Od roku 1840, opublikował około 70 podręczników i tablic logarytmicznych. Uwzględniając liczne przedruki, opracowania i przekłady znamy ponad 1200 różnych wydań jego pism.

podręcznik wymieniany w *Sprawozdaniach szkolnych*, z którego uczono geometrii analitycznej. W *Sprawozdaniu Dyrekcyi C. K. I. Wyższej Szkoły Realnej w Krakowie za rok 1916* [16] po raz pierwszy zostaje podany podręcznik Antoniego Łomnickiego *Geometrja: podręcznik dla szkół średnich*, który w sprawozdaniach z gimnazjów nie był wyszczególniony.

Geometria analityczna zawarta jest w czwartej części podręcznika F. Močnika. Autor rozpoczyna tą część od podania definicji:

Geometrya analityczna (analitische Geometrie) ma za zadanie zbadać utwory przestrzenne za pomocą rachunku analizy. (zob. [3])

Po krótkim wstępie zostaje wprowadzony podział na dziewięć rozdziałów: *Punkt*, *Równania o dwóch zmiennych i miejsca geometryczne tych równań*, *Linia prosta*, *Koło*, *Elipsa*, *Hiperbola, Parabola*, *Styczne i normalne*, *Ogólne własności krzywych stopnia drugiego*. W pierwszym rozdziale autor podaje podstawowe definicje prostokątnego układu współrzędnych, ukośnokątnego układu współrzędnych oraz biegunowego układu współrzędnych. Wyprowadza wzór na odległość dwóch punktów, warunek jednoznacznie określający kiedy trzy punkty leżą na jednej prostej. Następnie przedstawia wzór na współrzędne punktu, które dzielą dany odcinek w stosunku $m : n$ oraz na pole powierzchni trójkąta, jeżeli dane są współrzędne jego wierzchołków. Kolejny paragraf dotyczy transformacji współrzędnych prostokątnego układu współrzędnych na współrzędne innego typu. Podany przykład to zastąpienie prostokątnego układu współrzędnych przez biegunowy układ współrzędnych, w przypadku, gdy biegunem jest początek układu współrzędnych, a oś biegunowa leży na osi *OX*.

Drugi rozdział autor rozpoczyna od wprowadzenia definicji *stałej* oraz *zmiennej*, w tym *zmiennej zależnej* i *zmiennej niezależnej*. Następnie, poprzez przykłady oraz zadania, w których należy wykreślić krzywe określone równaniami kwadratowymi, autor pokazuje, że miejsca geometryczne punktów wyznaczonych na płaszczyźnie przez równanie kwadratowe mogą mieć różne kształty. Pisząc o równaniach kwadratowych autor ma na myśli równanie postaci:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

gdzie A, B, C, D, E, F są liczbami rzeczywistymi. *Miejscem geometrycznym* nazywany jest zbiór wszystkich punktów płaszczyzny spełniających dane równanie. Podany jest również przykład sinusoidy, jako linii krzywej wyrażonej równaniem $y = \sin x$. Związek jaki zachodzi między x a y autor nazywa *równaniem tej linii*. Równanie między dwoma zmiennymi jest zatem *analitycznym przedstawieniem tej linii*, i na odwrót linia jest *geometrycznym przedstawieniem danego równania*.

Trzeci rozdział dotyczy linii prostej. Autor wyprowadza ogólne równanie prostej

$$y = x \ \ tang\ \alpha + b, \text{gdzie } tang\ \alpha = a.$$

a następnie przeprowadza dyskusję równania $y = ax + b$. Kolejno wymienia własności: do wyznaczenia pewnej prostej potrzebne są dwa warunki; współczynnik może być dodatni lub ujemny w zależności od kąta, jaki tworzy prosta z osią *OX*, znak stałej *b* zależy od tego, czy prosta przecina oś rzędnych powyżej, czy poniżej osi odciętych; następnie przekształca równanie prostej, tak aby było można odczytać z niego punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych; podaje równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych oraz jej położenie w przypadkach, gdy $\alpha = 0°$. Autor dowodzi również twierdzenia: *Miejscem geometrycznym równania stopnia pierwszego między dwiema zmiennymi jest linia prosta*. Następnie omawia zagadnienia: wykreślenie prostej, której równanie jest dane; równanie prostej, która przechodzi przez dany punkt (x_1, y_1), równanie prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty (x_1, y_1), (x_2, y_2), równanie normalnej prostej, odległość punktu od prostej; równanie biegunowe prostej; punkt przecięcia się dwóch prostych; położenie prostej względem drugiej prostej; równania dwusiecznej kąta, którego ramiona są dane za pomocą swoich równań; warunek pod którym trzy proste przecinają się w jednym punkcie. Ostatni paragraf to zastosowanie podanych twierdzeń do udowadniania wybranych twierdzeń o trójkątach prostokreślnych, czyli trójkątach ograniczonych prostymi. Znajdziemy tu analityczne dowody następujących twierdzeń: dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie; dwusieczna kąta zewnętrznego trójkąta i dwusieczne dwóch kątów wewnętrznych trójkąta, które nie są przyległe temu zewnętrznemu, przecinają się w jednym punkcie; dwusieczne kątów zewnętrznych trójkąta przecinają przedłużenia jego przeciwległych boków w trzech punktach, które leżą na jednej prostej; środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Czwarty rozdział zatytułowany jest *Koło*. Korzystając z własności, że wszystkie punkty *linii kołowej* są równo odległe od jej środka. Autor wyprowadza równanie okręgu zwane *równaniem ogólnym koła* $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. *Równaniem normalnym koła* nazywa równanie $(x-p)^2 + (y-q)^2 - r^2 = 0$. Następnie podaje definicję *potęgi punktu względem koła* oraz stwierdza, że lewa strona równanie normalnego koła *przedstawia potęgę punktu* (x, y) *względem tego koła. Równaniem wierzchołkowym koła* nazywa równanie $x^2 + y^2 = 2rx$ .... Autor wyróżnia także *równanie środkowe koła* postaci $x^2 + y^2 = r^2$. Kolejny paragraf poświęcony jest *dyskusji równania środkowego koła*. Następnie autor wyprowadza *równanie biegunowe koła* oraz podaje warunki, pod którymi dwa okręgi przecinają się, są styczne. W dwóch ostatnich paragrafach autor znajduje *równanie linii potęgowej dwóch kół* oraz udowadnia następujące twierdzenie:

Linie potęgowe trzech kół przecinają się w jednym punkcie. (zob. [3])

Punkt wspólny trzech linii potęgowych trzech kół nazywa *środkiem potęgowym* trzech kół.

Piąty rozdział rozpoczyna się od zdefiniowanie elipsy, jako linii krzywej na płaszczyźnie mającej tę własność, że suma odległości każdego jej punktu od dwóch danych punktów jest stała. Następnie autor wprowadza definicję *ogniska*, *promieni wodzących* oraz wyprowadza wzór na długość promieni wodzących. Kolejno wyprowadza równanie elipsy:

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Autor przeprowadza dyskusję równania $b^2x^2 + y^2a^2 = a^2b^2$, które nazywa *równaniem środkowem* elipsy, a początek układu współrzędnych nazywa *środkiem elipsy*. W kolejnych punktach wyznacza: zmienne y oraz x z równania elipsy, punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych, największe wartości, jakie osiąga elipsa. Definiuje *oś wielką* i *oś małą* elipsy oraz pokazuje, że suma promieni wodzących każdego punktu elipsy jest równa jej osi wielkiej. W dalszej części podane są definicje *linijnego mimośrodu* oraz *mimośrodu numerycznego,* autor pokazuje, że jeżeli na wielkiej osi elipsy jako średnicy zakreślimy koło, to rzędne elipsy i koła odpowiadające tej samej odciętej mają się tak do siebie, jak połowa osi małej do połowy osi wielkiej. Autor udowadnia twierdzenie:

Powierzchnia elipsy równa się iloczynowi z połowy osi wielkiej i połowy osi małej i z liczby π. (zob. [3])

Na koniec wyprowadza równania wierzchołkowe i biegunowe elipsy.

W szóstym rozdziale autor definiuje hiperbolę, jako krzywą na płaszczyźnie, której różnica odległości każdego punktu od dwóch danych punktów jest stała oraz wyprowadza równanie hiperboli:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

przeprowadza dyskusję równania $b^2x^2 - y^2a^2 = a^2b^2$, które nazywa *równaniem środkowem* hiperboli oraz podaje wzór na długość promieni wodzących. W kolejnych punktach wyznacza: zmienne y oraz x z równania hiperboli, punkty przecięcia z osią odciętych oraz pokazuje, że hiperbola nie przecina osi rzędnych w punktach rzeczywistych. Podane są definicje *ognisk* i *wierzchołków* hiperboli, *osi rzeczywistej*, *osi urojonej* (inaczej zwanej *poboczną*), *linijnego mimośrodu, mimośrodu numerycznego, parametru* oraz *asymptot* hiperboli. Hiperbolę, której równanie jest postaci: $x^2 - y^2 = a^2$ nazywa *hiperbolą równoramienną*. Na koniec podane są również wzory na równania wierzchołkowe i biegunowe hiperboli.

Siódmy rozdział dotyczy paraboli, którą definiuje jako krzywą na płaszczyźnie, której każdy punkt jest równoodległy od stałego punktu i od stałej prostej oraz wyprowadza równanie paraboli:

$$y^2 = px,$$

które w dalszej części nazywa *równaniem wierzchołkow*ym paraboli. Autor przeprowadza dyskusję równania paraboli, wyznacza: zmienne y oraz x z równania paraboli oraz punkt przecięcia z osiami układu współrzędnych. Ponadto definiuje *ognisko*, *kierownicę*, *promień wodzący* oraz *parametr* paraboli. Udowodnia również następujące twierdzenie:

Powierzchnia płaszczyzny, ograniczonej spółrzędnemi któregokolwiek punktu paraboli i jej łukiem jest równa $2/3$ *częściom iloczynu tych spółrzędnych.* (zob. [3])

Na koniec wyprowadzony jest również wzór na równania biegunowe paraboli.

Przedostatni rozdział dotyczy stycznych i normalnych. Na początku podana jest definicja *stycznej*, *podstycznej*, *normalnej* oraz *podnormalnej*. *Styczna* zdefiniowana jest jako długość linii stycznych od punktu styczności do punktu przecięcia się z osią odciętych. *Podstyczna*, to rzut stycznej na oś odciętych. *Normalną* autor definiuje jako długość prostopadłej do stycznej zawartej między punktem styczności a osią odciętych, zaś *podnormalna* jest jej rzutem na oś odciętych. W następnych paragrafach autor posługując się rachunkiem różniczkowym, podaje równanie stycznych i normalnych do omawianych we wcześniejszych rozdziałach krzywych oraz wzory na obliczanie długości stycznej, podstycznej, normalnej oraz podnormalnej.

W ostatnim rozdziale omówione są ogólne własności krzywych drugiego stopnia. Przeprowadzona jest dyskusja ogólnego równanie krzywej drugiego stopnia:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

gdzie A, B, C, D, E, F są liczbami rzeczywistymi. Charakter krzywej zależy od wartości różnicy: $B^2 - 4AC$, którą autor nazywa *dwumianem charakterystycznym*. Autor pokazuje, że w przypadku, gdy dwumian charakterystyczny jest ujemny, to krzywa wyraża elipsę, która w poszczególnych przypadkach staje się kołem lub punktem. Jeśli różnica jest dodatnia, to otrzymujemy równanie hiperboli, a w przypadku gdy jest równa zeru równanie paraboli lub dwóch prostych równoległych do osi odciętych. W kolejnym paragrafie autor prezentuje rozwiązanie problemu:

Znaleźć miejsce geometryczne wszystkich takich punktów, których odległości od danego punktu i od danej prostej pozostają do siebie w stałym stosunku.

Rozdział kończy paragraf, w którym autor pokazuje, w jaki sposób otrzymać krzywe drugiego stopnia z przecięcia powierzchni bocznej stożka płaszczyzną.

Pomimo obszernego materiału i wielu trudnych pojęć, które autor wprowadza, dział jest opracowany w sposób jasny i spójny. Dzięki zamieszczonym rysunkom i odpowiednio dobranym przykładom, uczeń może lepiej zrozumieć nowe zagadnienia. Na końcu każdego rozdziału zamieszczone są zadania o zróżnicowanym poziomie trudności, które pozwalają powtórzyć i utrwalić przyswojone wiadomości.

2.3 Zadania maturalne

Po ukończeniu gimnazjum uczniowie przystępowali do egzaminu dojrzałości. Egzamin pisemny z matematyki polegał na rozwiązywaniu zadań zawierających podstawowe zasady poszczególnych działów, rozwiązywanie pojedynczych równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą lub z wieloma niewiadomymi, drugiego stopnia z jedną niewiadomą, logarytmy i zadania z zastosowaniem głównych zasad arytmetyki, algebry oraz twierdzeń z trygonometrii, planimetrii i geometrii analitycznej. Część pisemna egzaminu to wypracowanie matematyczne, które uczniowie pisali przez 4 godziny. W *Sprawozdaniach szkolnych* znajdziemy treści zadań z pisemnego egzaminu maturalnego. Wśród licznych zadań z różnych działów matematyki bardzo często występowały zadania z geometrii analitycznej.

3) Obliczyć powierzchnię obu części koła $(x-1)^2+y^2=9$ na jakie je dzieli parabola $y^2=4x$. (Przyjąć cm. za jednostkę długości).

Rysunek 4: Zadanie z pisemnego egzaminu dojrzałości.
Gimnazjum św. Anny, 1907.

2. Do elipsy $25x^2 + 100y^2 = 2500$ wykreślić w punktach, których odcięte są 6 i — 8, styczne, napisać ich równania i równanie prostej, przechodzącej przez środek elipsy i punkt przecięcia stycznych.

Rysunek 5: Zadanie z pisemnego egzaminu dojrzałości.
Gimnazjum im. Króla Jana Sobieskiego, 1907.

Uczniowie zdawali również matematykę na egzaminie ustnym. Wszystkie zadania były zapisywane w *Protokołach z egzaminu dojrzałości* [19], które zachowały się. W protokołach odnotowane były również oceny uczniów z dwóch ostatnich semestrów nauki. Porównując zadania różnych uczniów z ich stopniami, można zauważyć, że im wyższe stopnie uczeń otrzymywał w poprzednich semestrach nauki, tym zadania były trudniejsze. W dalszej części, jako przykłady podawane są zadania z protokołów różnych szkół z roku 1910. Zadania z geometrii analitycznej bardzo często pojawiały podczas egzaminu ustnego. Można wśród nich znaleźć zarówno zadania rachunkowe, jak i teoretyczne. Proste zadania otrzymywali zwykle uczniowie z oceną dostateczną lub dobrą. Oto kilka wybranych przykładów takich zadań (został zachowany oryginalny zapis):

Związek między powierzchnią koła a elipsy, jeśli promień koła jest połowę większy.

Ułożyć równanie, której oś główna=6, kąt między asymptotami 60.

Obliczyć powierzchnię elipsy $4x^2 + 9y^2 = 36$ *i ułożyć równanie kół stykających się z nią w obu punktach przecięcia się z osiami.*

Styczna do paraboli w punktach mających tę samą odciętą przecinającą się na osi X.

Znaleźć miejsce geometryczne takich punktów, których styczne przeprowadzone do hiperboli (środkowej) tworzą z nią kąt prosty.

$y^2 = 8x$. *W punkcie* $(8, -2)$ *wykreślić do tej krzywej normalną.*

Obliczyć odległość ogniska od asymptoty paraboli.

Zadania trudniejsze pojawiały się rzadziej, otrzymywali je uczniowie, którzy w dwóch ostatnich semestrach nauki mieli wyższe stopnie z matematyki. Oto kilka przykładów takich zadań:

Powierzchnia elipsy rachunkiem całkowym.
Biegunowe równanie krzywych drugiego rzędu.
Styczne do paraboli z punktu leżącego na kierownicy są prostopadłe.
Powierzchnia między łukiem i stycznymi paraboli.

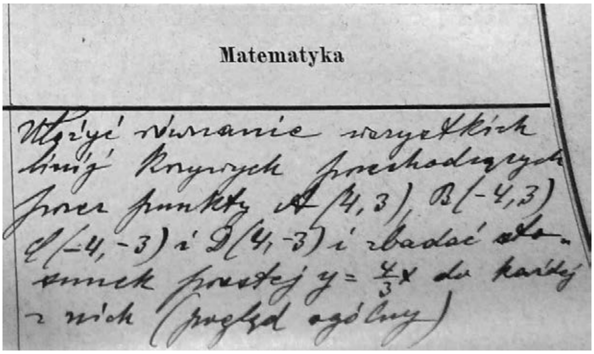
Na szczególną uwagę zasługują zadania, które otrzymywali uczniowie, którzy w dwóch ostatnich semestrach nauki otrzymali ocenę bardzo dobrą lub bardzo dobrą z odznaczeniem. Byli to uczniowie szczególnie zdolni. Jednym z takich uczniów był

Edmund Wilczkiewicz[4], który w 1910 roku ukończył I Wyższą Szkołę Realną w Krakowie. Na egzaminie ustnym z matematyki otrzymał następujące polecenie:

Dyskusja ogólnego równania stopnia drugiego $y = f(x)$, *styczna do krzywej w punkcie* $M(x, y)$.

Na egzaminie ustnym z matematyki Stefana Banacha, który w 1910 roku ukończył IV Gimnazjum w Krakowie, otrzymał następujące polecenie:

Ułożyć równania wszystkich linij krzywych przechodzących przez punkty $A(4,3), B(-4,3), C(-4,-3), D(4,-3)$ *i zbadać stosunek prostej* $y = \frac{4}{3}x$ *do każdej z nich (przegląd ogólny).*



Matematyka

Ułożyć równanie wszystkich linij krzywych przechodzących przez punkty $A(4,3)$, $B(-4,3)$ $C(-4,-3)$ i $D(4,-3)$ i zbadać stosunek prostej $y = \frac{4}{3}x$ do każdej z nich (przegląd ogólny)

Rysunek 6: Protokół ustnego egzaminu dojrzałości, IV Gimnazjum w Krakowie, 1910. Zadanie, które otrzymał na egzaminie Stefan Banach.

Zastanówmy się nad rozwiązaniem tego zadania. Zakładamy, że przez stwierdzenie *równanie wszystkich liniy krzywych* rozumiano równania dowolnych krzywych drugiego stopnia. Wstawiając współrzędne podanych punktów do równania ogólnego krzywej drugiego stopnia otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 16A + 12B + 9C + 4D + 3E + F = 0 \\ 16A - 12B + 9C - 4D + 3E + F = 0 \\ 16A - 12B + 9C + 4D - 3E + F = 0 \\ 16A + 12B + 9C - 4D - 3E + F = 0, \end{cases}$$

który ma następujące rozwiązanie:

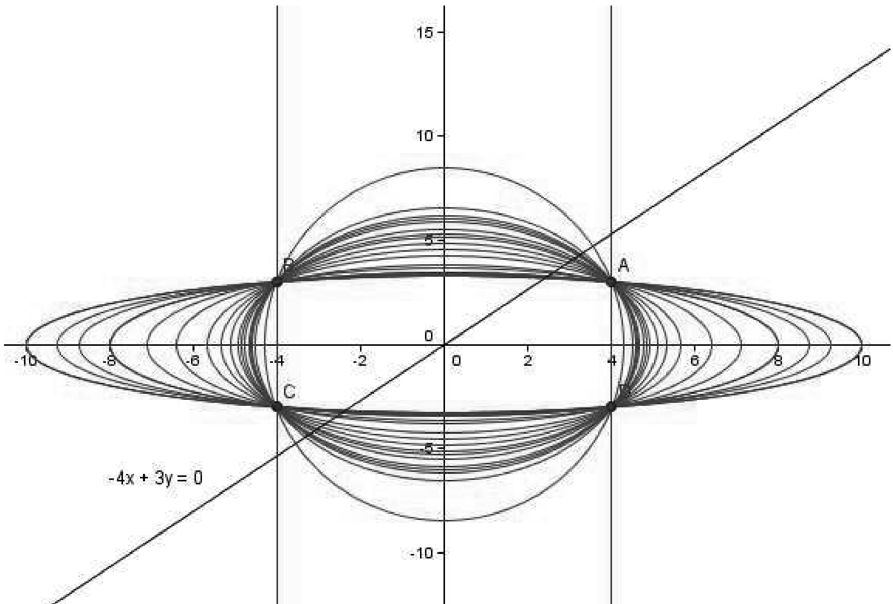
$$\begin{cases} 16A + 9C + F = 0 \\ B = D = E = 0. \end{cases}$$

4 E. Wilczkiewicz (1891−1946) – geodeta, profesor Politechniki Lwowskiej, dziekan Wydziału Inżynierii. Dziekan Wydziału Katedry Budowy Przyrządów Geodezyjnych i Fotogrametrii Lwowskiego Instytutu Politechnicznego. Wykładał na *Staatliche Fachkurse Lemberg*. Po wojnie organizował wydziały politechniczne PK, był dziekanem tworzonego Wydziału Inżynierii Odznaczony krzyżem *Virtuti Militari*.

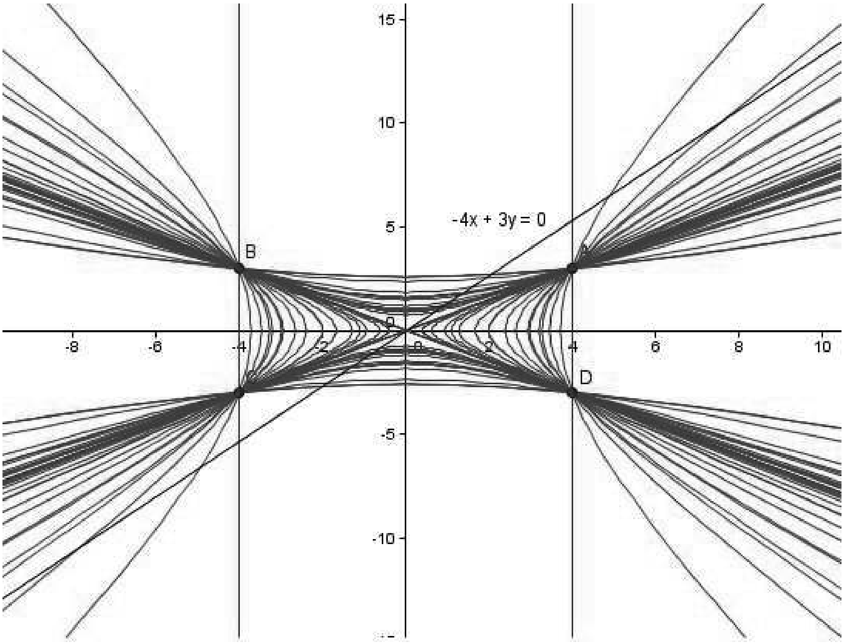
Zatem równanie krzywej przyjmuje postać:

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0 \text{, gdzie } F = -16A - 9C \text{, } A, C \in \mathbf{R} \quad (1)$$

Dwumian charakterystyczny tego równania ma postać: $-4A \cdot C$ i może zatem być zatem liczbą dodatnią, ujemną lub równą zeru. Równanie (1) wyraża rodzinę elips dla $A \cdot C > 0$ (zob.
Rysunek **7**). W szczególnym przypadku dla $A = C$ elipsa staje się okręgiem. Prosta $4x - 3y = 0$ przecina te krzywe w dwóch punktach. Gdy $A \cdot C < 0$ dane równanie wyraża rodzinę hiperbol (zob. Rysunek 8) lub parę prostych, o równaniu $9x^2 - 16y^2 = 0$ przecinających się w początku układu współrzędnych. Prosta $4x - 3y = 0$ przecina te hiperbole w dwóch punktach lub nie przecina hiperboli w żadnym punkcie, gdyż dla hiperboli o równaniu $16x^2 - 9y^2 = 175$ prosta o równaniu $4x - 3y = 0$ jest asymptotą. W przypadku gdy dwumian charakterystyczny jest równy zero, to $C = 0$ lub $A = 0$. Dla $C = 0$ równanie (1) ma postać $x^2 = 16$ i wyraża dwie proste równoległe do osi OY. Dla $A = 0$ równanie (1) ma postać $y^2 = 9$ i wyraża dwie proste równoległe do osi OX. W obu przypadkach prosta $4x - 3y = 0$ przecina każdą z prostych w jednym punkcie.



Rysunek 7: Wybrane elipsy przechodząca przez punkty
$A\ (4,3), B\ (-4,3), C(-4,-3), D(4,-3)$.



Rysunek 8: Wybrane hiperbole przechodząca przez punkty

Jak widać poziom trudności zadań na egzaminie ustnym był bardzo zróżnicowany. Dwa ostatnie zadania wymagają bardzo dobrej znajomości całości materiału z geometrii analitycznej. Niezbędne do rozwiązania tych zadań jest opanowanie ostatnich tematów z tego działu.

Na koniec dwa bardzo ciekawe zadania, w których opisana została realna sytuacja. Uczeń za pomocą pojęć matematycznych musiał zbudować modele matematyczny tych sytuacji.: *Ulica św. Jana przedstawia oś Y, ulica Szewska oś X; obliczyć pole rynku krakowskiego wiedząc, że jest czworobokiem o wierzchołkach* $A(-95\,m, 100\,m)$, $B(100, 100)$, $C(100, -120)$, $D(-95, -120)$. Oraz *Szyny tramwajowe na wylocie ulicy Siennej (XX) do rynku (YY) tworzą osie współrzędnych. Znaleźć w tym układzie równanie ulicy Starowiślnej, wiedząc, że przechodzi ona obok poczty głównej przez punkt* $(150\,m, -20\,m)$ *i przecina się z ulicą Dietlowską w punkcie* $(210\,m, -140\,m)$. *Jak Starowiślna jest do Siennej nachylona?*

Zadania te pojawiły się na egzaminie ustnym w Gimnazjum św. Anny w roku 1910, w treści zadań pojawiają się krakowskie ulice, którymi uczniowie codziennie przechodzili idąc do swojej szkoły. Warto również zwrócić uwagę na zapis, jaki stosowano w zadaniach, gdyż znacznie różni się on od współczesnej notacji.

3 Podsumowanie

Z teraźniejszego punktu widzenia, poziom nauczania geometrii analitycznej na przełomie XIX i XX wieku był bardzo wysoki. Plan nauczania geometrii analitycznej był konkretny i logicznie spójny. Nabyta wiedza oraz umiejętności były konsekwentnie sprawdzane podczas nauki oraz egzaminów dojrzałości. W podstawie programowej podpisanej przez Ministra Edukacji Narodowej 27 sierpnia 2007 roku znajduje się punkt: *geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej*, która w zakresie podstawowym obejmuje hasła: *Równanie prostej na płaszczyźnie*, *Interpretacja geometryczna układu równań liniowych*, *Odległość punktów w układzie współrzędnych*, *Równanie okręgu*. Ponadto w zakresie rozszerzonym obejmuje hasła: *Interpretacja geometryczna układu nierówności liniowych*, *Odległość punktów w układzie współrzędnych, równanie okręgu, opis koła za pomocą nierówności*, *Punkty wspólne prostych i okręgów, Wektory na płaszczyźnie kartezjańskiej*, *Dodawanie wektorów i mnożenie wektora przez liczbę*, *Interpretacja geometryczna działań na wektorach*. Program nauczania geometrii analitycznej, który realizujemy dzisiaj w szkole dzieli olbrzymia przepaść od programów nauczania geometrii analitycznej sprzed stu lat. Obecnie uczniowie poznają zaledwie podstawowe pojęcia, które na przełomie XIX i XX wieku były omawiane i znacznie poszerzone już w czasie pierwszych lekcji geometrii analitycznej. Teraźniejszy program nie obejmuje obiektów: elipsa, hiperbola, parabola, styczna oraz normalna. Mimo tak wielu różnic, można doszukać się podobieństwa w zadaniach maturalnych. Na przykład na egzamine ustnym w1910 zadano:

Przez punkt $(9,2)$ *przeprowadzić koło styczne do osi układu.*

Bardzo podobne zadanie pojawiło się w arkuszu ćwiczeniowym (zakres podstawowy) z roku 2012:

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A = (2,1)$ *i stycznego do obu osi układu współrzędnych. Rozważ wszystkie przypadki.*

Problem, przed którym postawiony jest uczeń, w obu przypadkach jest taki sam, jednak w drugim wariancie podkreślona jest konieczność rozważenia wszystkich przypadków. Różnicę można także zauważyć w zapisie, który w drugim zadaniu jest dużo bardziej formalny.

Literatura

[1] Domoradzki S.: *Programy nauczania matematyki w sprawozdaniach szkolnych gimnazjów galicyjskich*. Antiquitates Mathematicae 3(2009), 263−285.

[2] Komarzyniec G.: *Nauczanie matematyki w krakowskiej szkole Nowodworskiej w latach 1588−1914*. Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków, 2004.

[3] Močnik F.: *Geometrya dla klas wyższych szkół średnich*. Tłumaczenie G. Maryniak, Seyfarth & Czajkowski, Lwów, 1902, 271−328.

[4] Stinia M.: *Państwowe szkolnictwo gimnazjalne w Krakowie w okresie galicyjskim*. Towarzystwo Wydawnicze “Historia Iagiellonica”, Kraków, 2004.

[5] Wuczyńska K.: *Program Merański w Polsce*. Antiquitates Mathematicae 3(2009), 263−285.

[6] *Nowe plany naukowe*. Muzeum 25 dod. 2(1909), Lwów.

[7] *Nowy plan naukowy dla szkół realnych galicyjskich*. Muzeum 9(1893), Lwów.

[8] *Rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej* z dnia 23 grudnia 2008 r. *Podstawa programowa wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego*.

[9] *Sprawozdaniu c. k. Rady szkolnej krajowej o stanie szkół średnich galicyjskich w latach szkolnych 1875/1883 cz. 1*, nakładem Funduszu Znakowego, Lwów, 1884.

[10] *Sprawozdaniu c. k. Rady szkolnej krajowej o stanie szkół średnich galicyjskich w latach szkolnych 1909/1910 ,* nakładem C.K. Rady Szkolnej Krajowej, Lwów, 1911.

[11] *Sprawozdanie Dyrekcyi C. K. III Gimnazyum w Krakowie za rok szkolny 1907*, nakładem Funduszu Naukowego, Kraków, 1907.

[12] *Sprawozdanie Dyrektora C. K. Gimnazyum św. Jacka w Krakowie za rok 1901*, nakładem Funduszu Naukowego, Kraków, 1901.

[13] *Sprawozdanie Dyrektora C. K. Gimnazyum Nowodworskiego czyli Św. Anny w Krakowie za rok szkolny 1907*, nakładem Funduszu Naukowego, Kraków 1907.

[14] *Sprawozdanie Dyrekcyi C. K. Wyższej Szkoły Realnej w Krakowie za rok 1901*, nakładem Funduszu Naukowego, Kraków, 1901.

[15] *Sprawozdanie Dyrekcyi C. K. I. Wyższej Szkoły Realnej w Krakowie za rok 1910*, nakładem Funduszu Naukowego, Kraków, 1910.

[16] *Sprawozdanie Dyrekcyi C. K. I. Wyższej Szkoły Realnej w Krakowie za rok 1916*.

[17] Wikipedia (The free encyclopedia): Franc Močnik [online] [dn. 30. 4. 2014]

http://sl.wikipedia.org/wiki/Franc_Mo%C4%8Dnik_%28matematik%29.

[18] *Wilczkiewicz Edmund*, [w:] *Życiorysy profesorów i asystentów Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie (1919–1964*). Kraków, 1965, 214–216.

[19] Zbiory Archiwum Miejskiego Krakowa, *Protokoły z egzaminów dojrzałości rok 1910,* sygnatura teczek: GLJ 89, GMJ 76, GLN 197, IGZ 101, GS 27, 29/2395/74, 29/2395/74.

Adres

Mgr Katarzyna Jedynak
Instytut Matematyki
Wydział Matematyczno – Fizyczno – Techniczny
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków
e-mail: *katarzynabolek@10g.pl*

KVADRATURA CYKLOIDY DLE ROBERVALA

ANNA KALOUSOVÁ

Abstract: In the 17th century, several outstanding mathematicians were interested in studying the cycloid. They examined its properties and found out some remarkable results. In this paper, we describe Roberval's solution of cycloid's quadrature and his construction of the tangent to a cycloid.

1 Úvod

Cykloida je rovinná křivka, kterou opisuje pevně zvolený bod na obvodu kruhu kotálejícího se (bez klouzání) po přímce. Název cykloida pochází od Galilea Galilei (1564–1642), křivku ale jako první popsal již francouzský filosof, teolog a matematik Charles de Bovelles (1479–1566). V 17. století se cykloidou zabývalo hodně známých matematiků, zkoumali její vlastnosti, snažili se určit obsah plochy omezené obloukem cykloidy nebo nějakou jeho částí, objem tělesa vzniklého rotací cykloidy kolem její osy, délku jednoho oblouku cykloidy a podobně. Přitom objevili další zajímavé vlastnosti této křivky. Christiaan Huygens (1629–1695) si všiml isochronie cykloidy, tedy toho, že hmotný bod pohybující se na (obrácené) cykloidě bez tření vykonává periodický pohyb, jehož perioda je nezávislá na počáteční pozici, a zkonstruoval hodiny, jejichž kyvadlo se pohybovalo po cykloidě. Johann (1667–1748) a Jacob (1655–1705) Bernoulliovi ukázali, že cykloida je brachistochronou, tedy křivkou spojující body A a B, po které se hmotný bod dostane z bodu A do bodu B pouze působením gravitačního pole v nejkratším možném čase.

Cykloidu studoval i Gilles Personne de Roberval, který jako první určil obsah plochy omezené jedním jejím obloukem. Jeho postup zde popíšeme a ukážeme také jeho konstrukci tečny k cykloidě v libovolném jejím bodě.

2 Gilles Personne de Roberval

2.1 Život

Gilles Personne de Roberval byl synem Pierra Personne a Jeanne Le Dru, drobných zemědělců hospodařících ve vesnici Roberval v departementu Oise v Pikardii. Narodil se 9. 8. 1602 v blízkosti Noël-Saint-Martin. Bylo to v období sklizně, matka ho porodila přímo na poli. Následujícího dne byl pokřtěn jako Gilles Personne, přízvisko de Roberval připojil až v dospělosti, musel požádat o svolení pána Robervalu. Měl několik bratrů a sester, ale jemu jedinému se dostalo vzdělání, když si jeho nadprůměrné inteligence všiml farář ze sousední farnosti v Rhuis. Vzdělával ho v matematice, latině a pravděpodobně i v řečtině. Později (nejsou doklady o tom, kdy to bylo) opustil rodnou vesnici a cestoval po Francii. Na živobytí si vydělával tím, že učil matematiku. Zároveň v navštívených městech diskutoval o matematických problémech s universitními profesory. V Bordeaux se setkal s Pierrem de Fermat (asi 1601–1665), se kterým udržoval pravidelnou korespondenci i později. V roce 1627 se zúčastnil obléhání La Rochelle, střediska hugenotského odporu, a měl zde příležitost studovat konstrukci opevnění a také balistiku.

V roce 1628 přišel Roberval do Paříže, kde záhy začal navštěvovat schůzky skupiny kolem Marina Mersena (1588–1648). V roce 1632 získal katedru filosofie na *Collège de maître Gervais* a našel si bydlení nedaleko odtud; tam bydlel až do své smrti. V roce 1634 uspěl v konkurzu na Raméeho katedru matematiky na *Collège royal.* Toto místo ale nebylo trvalé, Roberval se musel v následujících letech každé 3 roky znovu účastnit konkurzů na tuto katedru. To byl možná jeden z důvodů, proč výsledky své vědecké práce málokdy publikoval. Ztratil by tak totiž výhodu, kterou měl proti svým konkurentům. Mělo to však i své nevýhody, protože se pak často dostával se svými současníky do sporů o prvenství v některém objevu. V roce 1655 získal na *Collège royal* katedru po Pierru Gassendim (1592–1655). Od té doby byl finančně zabezpečen, protože na této katedře se konkurzy nekonaly.

22. prosince 1666 se konala v Královské knihovně ustavující schůze *Académie royal des sciences.* Francouzský ministr financí Jean-Baptiste Colbert (1619–1683) na ni pozval sedm významných francouzských vědců, jedním z nich byl i Roberval. Jako jeden ze zakládajících členů se Roberval zúčastnil řady debat a četl také několik pojednání. Na zasedání 21. 8. 1669 představil akademikům svůj vynález – rovnoramenné váhy, u nichž byly misky umístěny nad vahadlem (dřívější váhy měly vždy misky pod vahadlem).

Gilles Personne de Roberval zemřel ve svém bytě 27. 9. 1675. Byl pohřben v kostele sv. Severina v Paříži. Nikdy se neoženil, své práce odkázal *Académie royal des sciences*, která jich část vydala v roce 1693 v [2].

2.2 Vědecká práce

Gilles Personne de Roberval byl vynikajícím matematikem a fyzikem. Zpřesnil definici pojmu *síla*, odvodil pravidlo pro skládání sil a opravil definici pojmu *těžiště*. Jeho matematické výsledky jsou úzce spjaty s fyzikou. Používal metodu indivisibilií, kterou vypracoval nezávisle na Cavalierim, pro výpočet ploch ohraničených křivkami a pro výpočet objemu těles vzniklých rotací těchto křivek. Vymyslel také jednoduchou a obecnou metodu nalezení rychlosti pomocí tečen ke křivce. Tato metoda je podobná Newtonově metodě fluxí.

Cykloida

2.3 Obsah plochy pod obloukem cykloidy

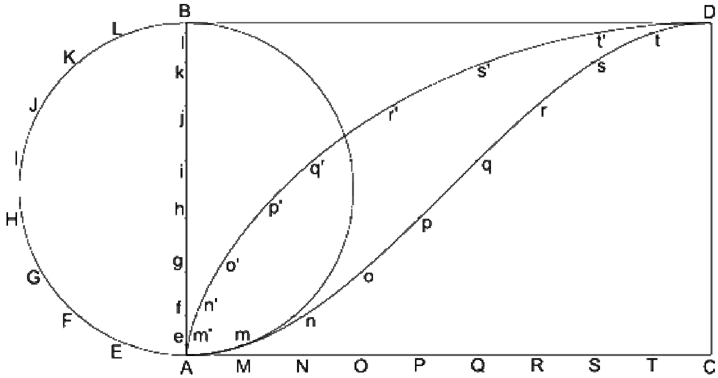
V roce 1615 vyzval Marin Mersenne vážené matematiky, aby prozkoumali vlastnosti cykloidy, zejména spočítali obsah plochy pod obloukém cykloidy a zkonstruovali tečnu v libovolném bodě cykloidy. Oba problémy vyřešil Gilles Personne de Roberval v roce 1635, řešení ale bylo publikováno až po jeho smrti v [2].

Roberval uvažuje polovinu oblouku cykloidy, tedy část, kde se bod *A* přemístí do bodu *D*. Pohyb po cykloidě rozkládá na dva pohyby. Jedním je rovnoměrný přímočarý pohyb celého kruhu ve vodorovném směru (posunutí rovnoběžně se základnou cykloidy), druhým je otáčení (rotace) generujícího kruhu kolem svého středu. Roberval píše, že se průměr *AB* pohybuje jako by byl posouván jiným tělesem, až dorazí do *CD*[1]. Zároveň se bod *A* pohybuje po oblouku *AEFGB* a dorazí do bodu *B*. Délka oblouku *AEFGB* je stejná

---

[1] *… le diamètre AB du cercle AEFGB se meut parallelement à soy-mesme, comme s'il étoit emporté par quelqu'autre corps, jusques à ce qu'il soit parvenu en CD ...*

jako délka úsečky AC (je rovna $\pi\rho$, kde ρ je poloměr generujícího kruhu). Úsečku AC lze rozdělit na nekonečně malé části stejné délky (na obrázku jsou dělicími body M, N, O, P, Q, R, S, T) a podobně lze rozdělit oblouk AGB (dělicími body jsou E, F, G, H, I, J, K, L). Na originálním obrázku nejsou popsány všechny body, některé jsou označeny čísly, přičemž čísla 1, 2, …, 7 jsou použita pro dva typy bodů, pro přehlednost použijeme obrázek, kde jsou tyto body rozlišeny.

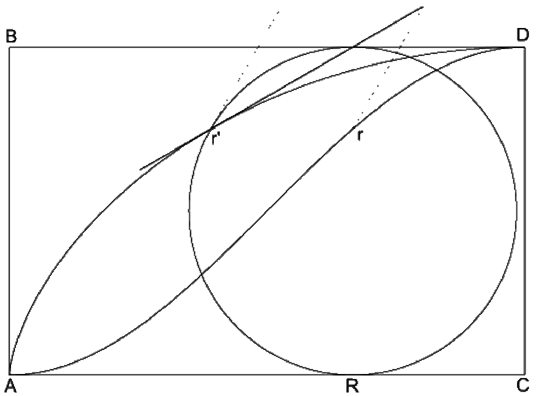


Veďme body M, N, …, T kolmice k úsečce AC a body E, F, …, L rovnoběžky s touto úsečkou. Průsečíky odpovídajících přímek označíme $m, n, \ldots, t$, průsečíky rovnoběžek s úsečkou AB označíme $e, f, \ldots, l$. Označme m' bod na úsečce Em takový, že $|mm'|=|Ee|$. Analogicky získáme body n', o', …, t'. Když se při kruhovém pohybu bod A přesune do bodu E, posune se ve vodorovném směru o vzdálenost $|Ee| = \rho \cdot \sin \alpha$ a ve svislém o vzdálenost $|Ae| = \rho \cdot (1 - \cos \alpha)$, kde ρ je poloměr generujícího kruhu a α je úhel, o který se kruh otočil. Při pohybu celého kruhu ve vodorovném směru se zároveň bod A přesune do bodu M. Pohyb po cykloidě je složením těchto dvou pohybů, bod A se zřejmě přesune do bodu m' (který tedy leží na cykloidě). Když se při kruhovém pohybu bod A přesune do bodu F, posune se ve vodorovném směru o vzdálenost $|Ff| = \rho \cdot \sin 2\alpha$ a ve svislém směru o vzdálenost $|Af| = \rho \cdot (1 - \cos 2\alpha)$. Při pohybu celého kruhu ve vodorovném směru se zároveň bod A přesune do bodu N. Složením těchto dvou pohybů dostáváme pohyb po cykloidě, zřejmě se bod A přesune do bodu n'. Podobně pro další body. Platí tedy, že křivka procházející body m', n', …, t' je cykloida. Křivka, která prochází body m, n, …, t (doprovodná křivka), zjevně dělí obdélník $ACDB$ na poloviny. Parametrické vyjádření této křivky je $x = \rho t$ a $y = \rho \cdot (1 - \cos t)$.

Plocha pod cykloidou se skládá z dvou částí. Jednou je plocha pod doprovodnou křivkou, druhou je plocha mezi doprovodnou křivkou a cykloidou. Ta první má obsah roven polovině obsahu obdélníka $ACDB$, tedy $\frac{1}{2} \cdot \pi\rho \cdot 2\rho = \pi \cdot \rho^2$, což je obsah generujícího kruhu. Obsah plochy mezi cykloidou a doprovodnou křivkou je roven obsahu poloviny generujícího kruhu. Jak je vidět na obrázku, mají oba tyto obrazce stejnou výšku, totiž 2ρ, a v libovolné výšce mají také stejnou šířku ($|Ee|=|mm'|$, $|Ff|=|nn'|$, …, $|Ll|=|tt'|$). Obsah plochy pod polovinou oblouku cykloidy je součtem obsahů těch dvou ploch, tedy $3/2 \cdot \pi\rho^2$. Obsah plochy pod celým jedním obloukem cykloidy je potom $3 \cdot \pi\rho^2$, je tedy roven trojnásobku obsahu generujícího kruhu.

2.4 Tečna k cykloidě

K nalezení tečny k cykloidě použil Roberval obecnou metodu, kterou sám vypracoval a využil také třeba ke konstrukci tečny k elipse či parabole. Využil opět toho, že pohyb po cykloidě se skládá ze dvou pohybů, jedním je posunutí (translace) ve vodorovném směru (rovnoběžně se základnou cykloidy) a druhým rotace kolem středu generujícího kruhu. Při konstrukci tečny v (libovolném) bodě r' postupoval takto: Sestrojil tečnu ke kružnici (s poloměrem ρ a procházející bodem r') v bodě r' (rotace), dále úsečku $r'r$ (translace), doplnil na kosočtverec a uvedl, že úhlopříčka v tomto kosočtverci je tečnou k cykloidě. Že toto platí, je zřejmé, když si uvědomíme, že (okamžitá) rychlost rotace je směrovým vektorem tečny ke kružnici a (okamžitá) rychlost translace je směrový vektor úsečky $r'r$. Rychlost translace a rychlost rotace jsou stejné, proto mají tyto vektory stejnou velikost. Rychlost pohybu po cykloidě, tedy směrový vektor tečny k cykloidě, je potom součtem těchto dvou vektorů.



3 Jiné konstrukce tečny

Ve stejné době jako Roberval zkonstruovali tečnu k cykloidě také Pierre de Fermat a René Descartes (1596–1650). Descartes vedl tečným bodem (např. r') rovnoběžku se základnou cykloidy a našel průsečík (ozn. třeba r^*) této přímky s generujícím kruhem umístěným až do poloviny oblouku cykloidy (kdy se bod A přesunul do bodu D a bod B do bodu C). Spojnice tohoto průsečíku s bodem C je normálou k cykloidě v bodě r', tečna je k ní kolmá. Odtud je jen krok k další konstrukci, kdy je tečna sestrojena jako rovnoběžka se spojnicí bodu r^* s bodem D. Tato konstrukce je popsána např. v [1].

Literatura

[1] La Hire P. de: *De cycloide lemma.* Paris, 1676.

[2] Roberval G. P. de: *Traité des indivisibles.* Divers ouvrages de mathématiques et de physique par Messieurs de l'Académie royale des sciences, Imprimerie royale, Paris, 1693, 190–245.

Adresa

RNDr. Anna Kalousová
Katedra matematiky
FEL ČVUT
Technická 2
166 27 Praha 6
e-mail: *kalous@math.feld.cvut.cz*

O PRZENIKANIU NOWYCH TEORII DO KSZTAŁCENIA SZKOLNEGO W TORUŃSKIEJ SZKOLE REALNEJ W XIX WIEKU

KAROLINA KARPIŃSKA

Abstract: The implementation of new scientific ideas to school education often took place very quickly. In the article this problem will be discussed as based on the content of mathematics material taught at the Real School functioning within the Torun Gymnasium.

Gimnazjum Toruńskie zostało założone w 1568 roku i do połowy XIX wieku funkcjonowało jako szkoła stricte humanistyczna. W 1855 roku zaczęto wdrażać tam reformę, na skutek której już pięć lat później obok Gimnazjum Klasycznego funkcjonowała citero-klasowa Szkoła Realna. Istotą szkół realnych był duży nacisk na nauczanie przedmiotów matematyczno-przyrodniczych, dlatego też ówczesny dyrektor szkoły toruńskiej zdecydował się zatrudnić specjalistę od nauczania przedmiotów ścisłych w klasach realnych. Został nim Eduard Fassbender[1].

Fassbender przez ponad 20 lat pracy w Gimnazjum Toruńskim opierał lekcje matematyki na podręczniku *Anfangsgründe der reinen Mathematik für der Schul- und Selbst-Unterricht* [Podstawy matematyki czystej dla studiów szkolnych i własnych] Karla Koppego, składającym się z czterech części: *Arithmetik und Algebra* [Arytmetyka i Algebra] ([7]), *Planimetrie* [Planimetria] ([8]), *Stereometrie* [Stereometria] ([9]), *Ebene Trigonometrie* [Trygonometria płaska]. Treści zawarte w dwóch z nich: *Planimetrii* oraz *Stereometrii*, były ściśle uwarunkowane przez odkrycia naukowe ówczesnego świata matematycznego. W artykule zostanie zaprezentowana analiza części planimetrycznej i stereometrycznej podręcznika *Anfangsgründe der reinen Mathematik für der Schul- und Selbst-Unterricht* Karla Koppego pod kątem wspomnianych nowości naukowych.

[1] Eduard Fassbender urodził się 18 lutego 1816 roku w miejscowości Burg an der Wupper w okręgu Lennep. Po ukończeniu Gimnazjum w Soest rozpoczął studia na uniwersytecie w Bonn. Po zdaniu egzaminów *pro facultate docendi* z matematyki i fizyki, na „św. Michała” 1839 roku rozpoczął roczny staż w Gimnazjum w Elberfeld ([12], s. 39). Pięć kolejnych lat spędził w „höheren Stadtschule“ (wyższej szkole miejskiej) w Iserlohn, a w latach 1845−1856 pracował w Szkole Realnej w Barmen ([5]). Na Wielkanoc 1856 roku otrzymał stanowisko trzeciego nauczyciela wyższego w Gimnazjum Toruńskim, a w 1860 roku awansował na profesora. W 1865 roku mianowano go pierwszym profesorem, czyli pierwszym nauczycielem wyższym, i pozostał nim aż do przejścia na emeryturę. Głównymi przedmiotami wykładanymi przez Fassbendera były: matematyka, fizyka i przyroda. Rzadziej prowadził zajęcia z historii (w roku szkolnym 1861/62), języka francuskiego (w roku szkolnym 1863/64) i chemii (w roku szkolnym 1870/71). Był doktorem filozofii. Po tym, jak 3 sierpnia 1864 roku zmarł ówczesny dyrektor Gimnazjum Toruńskiego Wilhelm Arthur Passow, Fassbender został poproszony o sprawowanie funkcji zarządcy szkoły. Pełnił ją do 22 kwietnia 1865 ([4], 1865, s. 29−31), czyli do momentu zatrudnienia nowego dyrektora. Na emeryturę odszedł 29 września 1883 roku. Zmarł 3 kwietnia 1892 roku. W programach Gimnazjum w Barmen opublikował m. in. następujące eseje o tematyce matematycznej: *Über einige Analogien des körperlichen und sphärischen Dreiecks mit dem ebenen* [O pewnych analogiach trójkątów bryłowych i sferycznych z płaskimi] (1846) ([15], s. 33) oraz *Mémoire sur les triangles inscrits maxima et les triangles circonscrits de l'ellipse* [Wspomnienie o maksymalnych trójkątach wpisanych w elipsę i trójkątach opisanych na elipsie] (1853) ([15], s. 34).

1 Analiza podręcznika Karla Koppego

1.1 *Planimetria*

1.1.1 Treści zawarte w podręczniku

Część planimetryczna podręcznika *Anfangsgründe der Reiner Mathematik für Schul- und Selbst-Unterricht* Karla Koppego ma jeden nurt przewodni – porównywanie obiektów płaskich: długości odcinków, miar kątów, czy też kształtów i pól figur płaskich. Obiektami, które najłatwiej można porównać są odcinki linii prostych i kąty, dlatego autor poświęcił im dwa pierwsze rozdziały podręcznika. Twierdzenia dotyczące kątów można ściśle powiązać z twierdzeniami o liniach równoległych, co autor uczynił w rozdziale 3. Dwa kolejne rozdziały, to dokładne omówienie wielokątów (ze szczególną uwagą poświęconą trójkątom i czworokątom). Autor analizuje w nich, kiedy wielokąty są przystające. W rozdziale szóstym rozszerza to o twierdzenia dotyczące kół.

Do tej pory autor odpowiadał na pytanie, czy dwa obiekty płaskie są sobie równe pod względem kształtu i wielkości, czy nie. W rozdziałach 8. i 9. skupia się na ich różności – omawia stosunki i proporcjonalność linii, a następnie figur płaskich. Na tym kończy się zasadnicza część podręcznika. Dalsze rozdziały (11−14) zawierają jedynie rozszerzenia i uzupełnienia poprzednich.

Zatrzymajmy się na chwilę przy zagadnieniu równoważnego przekształcania figur.

1.1.2 Równoważne przekształcanie figur

Pojęcie to autor wprowadza w rozdziale 7. Podaje, iż daną figurę przekształcimy w sposób równoważny, gdy zbudujemy figurę o innym kształcie niż wyjściowa, ale o takim samym polu powierzchni. Ta druga figura nazywa się wówczas „przekształceniem" figury pierwszej lub figurą „równoważną" figurze pierwszej. Koppe pokazuje tutaj m. in., w jaki sposób trójkąt można równoważnie przekształcić w prostokąt, czy jak dowolny wielokąt przekształcić w inny o mniejszej liczbie kątów. Te rozważania uznaje za obowiązkowe dla wszystkich uczniów.

W rozdziale 12 zgłębia temat równoważności figur o twierdzenia dotyczące porównywania ich obwodów, np.

1. *Spośród wszystkich trójkątów równoważnych o równych podstawach, trójkąt równoramienny ma najmniejszy obwód* ([8], s. 138).
2. *Spośród dwóch równoważnych wielokątów foremnych, ten o większej liczbie boków, ma mniejszy obwód* ([8], s. 142).

Analizuje też sytuację odwrotną – czy mając wielokąty o takich samych obwodach jesteśmy w stanie porównać ich pola? Okazuje się, że tak. Przykładowo:

3. *Spośród wszystkich wielokątów o takiej samej liczbie boków i jednakowych obwodach, największe pole powierzchni ma wielokąt foremny* ([8], s. 140).
4. *Spośród dwóch wielokątów foremnych o jednakowych obwodach, ten o większej liczbie boków, ma większe pole* ([8], s. 142).

Powyższe rozważania, autor oparł na artykule *Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en general* J. Steinera opublikowanym w 1842 roku w *Journal für die reine und angewandte Mathematik* ([13]). Koppe z artykułu Steinera wybrał jedynie takie rezultaty, których dowody, jego zdaniem, nie sprawiłyby trudności uczniom[2] i jednocześnie nie wykraczałyby poza ustalone przez autora ramy tematyczne podręcznika.

Zauważmy, że w tym przypadku absorpcja nowości matematycznych do nauczania szkolnego na poziomie średnim była niezwykle szybka. Dokładnie 10 lat po opublikowaniu artykułu Steinera, treści w nim zawarte, dostosowane do wiedzy i umiejętności uczniów, znalazły się w podręczniku szkolnym. Z pewnością duży wpływ na taką sytuację miało ówczesne, bardzo duże zainteresowanie świata matematycznego zagadnieniami równoważności figur. Świadczy o tym chociażby to, że w latach 1832 i 1833 dwaj matematycy Farkas Bolyai i Paul Herwin, niezależnie od siebie, udowodnili twierdzenie: *Każde dwa wielokąty o równych polach są równoważne przez rozcinanie* ([11], s. 9). Dzisiaj twierdzenie to nosi nazwę: twierdzenia Bolyai-Herwina.

1.2 *Stereometria*

1.2.1 Treści zawarte w podręczniku

Karl Koppe widział w stereometrii naukę, która ma spełniać dwa podstawowe zadania, mianowicie: ma budować twierdzenia dotyczące wzajemnego położenia linii i płaszczyzn w przestrzeni oraz mierzyć objętości brył przestrzennych. Te dwa zadania stanowią bazę dla całego podręcznika. Pierwsze cztery rozdziały, to przede wszystkim realizacja pierwszego zadania, a kolejne cztery – drugiego.

Pojęcie wielościanu autor wprowadził już w rozdziale drugim. Jednakże, zanim mógł rozpocząć dokładne omawianie wielościanów, musiał wyjaśnić: jak wykonać rysunek wielościanu? Z pomocą przyszły mu wówczas wielokąty sferyczne (rozdział III), rzuty prostokątne[3] oraz perspektywa geometryczna (rozdział IV).

W rozdziałach: piątym i szóstym, autor omawia kolejno: bryły wielościenne (w tym: wielościany foremne, graniastosłupy, ostrosłupy[4] i obeliski) oraz bryły o powierzchniach zakrzywionych (cylindry, stożki[5] i kule). Ich objętościami zajmuje się w rozdziale siódmym, a w ósmym – rozwiązuje zadania stereometryczno-algebraiczne, polegające m. in. na obliczeniu długości krawędzi, wysokości i objętości brył.

Stereometria została wzbogacona o dodatek, zawierający obliczanie pól powierzchni i objętości beczki i elipsoidy oraz objętości paraboloidy, hiperboloidy i hiperboloidy eliptycznej[6].

W opisie treści zawartych w *Stereometrii* uwagę zwracają obeliski. Koppe nazywa tak wielościany, których:

- podstawy są dwoma równoległymi wielokątami[7]
- ściany boczne są trapezami[8].

[2] Pominął np. twierdzenie: *Każdy wielokąt wypukły można przekształcić w sposób równoważny w inny wielokąt o mniejszym obwodzie i większej liczbie boków* ([13], s. 207).
[3] Omawia też tutaj rzuty ortograficzne, stereograficzne oraz rzuty Mercatora ([9], s. 39−40).
[4] W tym, ostrosłupy: proste, pochyłe i ścięte.
[5] W tym, stożki: proste, pochyłe i ścięte.
[6] Dodatek ten został napisany w oparciu o *Ein neuer Lehrsatz der Stereometrie* [Nowe twierdzenie stereometrii] K. Koppego ([10]) oraz *Anfangsgründe der beschreibenden Geometrie, der analytischen Geometrie, der Kegelschnitte und der einfachen Reihen* [Podstawy geometrii wykreślnej, geometrii analitycznej, teorii stożkowych i prostych ciągów] E. Fassbendera ([1]).
[7] Oznacza to, że znajdują się one na dwóch płaszczyznach równoległych.

Skąd się wzięła nazwa „obelisk“? Jak obliczano objętość tego wielościanu? Jak to się stało, że obliczanie objętości obelisków znalazło się w podręcznikach przeznaczonych dla szkół na poziomie średnim? Postaramy się teraz odpowiedzieć na te pytania. Okazuje się, że kluczem jest tutaj nazwisko: Karl Koppe.

1.2.2 Obeliski i stożki ścięte

Obliczaniem objętości przeróżnych brył wielościennych zajmował się już na początku XIX wieku Meier Hirsch. Swoje wyniki opublikował w 1807 roku w *Sammlung geometrischer Aufgaben* [Zbiorze zadań geometrycznych] ([2]). Opierając się na trygonometrii i teorii rzutów, udowodnił wówczas twierdzenie:

Niech dany będzie wielościan, którego podstawy A oraz B są dwoma równoległymi wielokątami o takiej samej liczbie boków (boki podstaw oznaczmy odpowiednio: $a, a_1, a_2, \ldots$ oraz $b, b_1, b_2, \ldots$), a ściany boczne – trapezami (ścian bocznych jest tyle, ile boków ma każda z podstaw). Oznaczmy wysokość tego wielościanu przez H. Wówczas jego objętość jest równa:

$$K = \frac{1}{3}H(H+B) + \frac{1}{6}H[ab_1 \sin(aa_1) + ab_2 \sin(aa_2) + ab_3 \sin(aa_3) + \cdots$$
$$\ldots + ab_{n-2} \sin(aa_{n-2}) + a_1b_2 \sin(a_1a_2) + a_1b_3 \sin(a_1a_3) + \cdots + a_1b_{n-2} \sin(a_1a_{n-2}) +$$
$$+ a_2b_3 \sin(a_2a_3) + a_2b_4 \sin(a_2a_4) + \cdots + a_2b_{n-2} \sin(a_2a_{n-2}) +$$
$$+ \cdots + a_{n-3}b_{n-2} \sin(a_{n-3}a_{n-2})],$$

gdzie $\sin(a_ia_j)$ oznacza sinus kąta zawartego między bokami a_i oraz a_j ([2], s. 204; [14], s. 283).

Hirsch w *Sammlung geometrischer Aufgaben* nie zajmował się bryłami ograniczonymi przez powierzchnie krzywe, jednakże temat ten zainteresował innych matematyków. Pojawiały się nowe odkrycia, m. in. w 1835 roku Schweins wyprowadził wzór na objętość stożka ściętego:

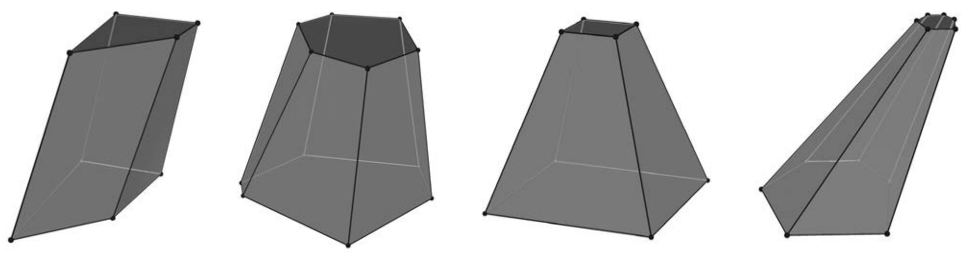
$$K = H\pi\left[\left(\frac{r+r_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{r-r_1}{2}\right)^2\right] = \frac{H\pi}{4}\left[(r+r_1)^2 + \frac{1}{3}(r-r_1)^2\right],$$

gdzie r oraz r_1 są promieniami podstaw: dolnej i górnej, a H jest wysokością bryły ([14], s. 278).

---

[8] Koppe definiuje trapez jako czworokąt, który ma parę boków równoległych ([9], s. 47). Zgodnie z tą definicją, szczególnym rodzajem trapezu jest równoległobok.

Przykładami obelisków są następujące wielościany:



Szczególnym rodzajem obelisków są ostrosłupy ścięte. W tym przypadku, podstawy są wielokątami równoległymi i jednocześnie podobnymi.

Pomiędzy odkryciami Hirscha i Schweinsa nie było widać zależności. Skoro jednak koło można traktować jako wielokąt foremny o nieskończenie wielu i nieskończenie małych bokach, którego promień mały i duży[9] są sobie równe, to powinna mieć miejsce zależność między objętościami: wielościanu rozważanego przez Hirscha i stożka ściętego. Zależności tej zaczął szukać Karl Koppe. W rezultacie, w 1838 roku, opierając się na rachunku całkowym, sformułował twierdzenie:

Objętość bryły, której podstawami są dwa równoległe wielokąty, a ścianami bocznymi są trapezy, jest równa objętości graniastosłupa, którego:

- *wysokość jest odległością równoległych podstaw wyjściowej bryły,*
- *podstawa jest wielokątem, powstałym przez poprowadzenie płaszczyzny równoległej do podstaw bryły wyjściowej przechodzącej przez środek odległości między nimi, i ograniczonym przez boki wyjściowej bryły,*

pomniejszonej o dwunastą część pola powierzchni wielokąta, którego kąty są równe odpowiednim kątom podstaw bryły wyjściowej, a każdy z boków jest różnicą odpowiadających mu boków obu podstaw.

Okazało się, że prostymi wnioskami z tego twierdzenia są wzory na objętości m. in.: stożka ściętego, ściętego stożka eliptycznego, ostrosłupa ściętego o podstawie prostokątnej. Wszystkie te rezultaty, co godne jest podkreślenia, Koppe opublikował w *Journal für die reine und angewandte Mathematik* ([6]).

Około pół roku później, wystosował prośbę do Berlina, aby wielościan, którego podstawami są dwa równoległe wielokąty, a ścianami bocznymi – trapezy, nazwać obeliskiem. Do prośby dołączył swój artykuł. Odpowiedź, którą otrzymał przekroczyła jego oczekiwania. Nazwa obelisk została zatwierdzona, a Koppe został zobowiązany do przedstawienia dowodu sformułowanego przez niego twierdzenia w sposób na tyle elementarny, aby mógł on się znaleźć w podręcznikach szkolnych.

Na skutek tego, w 1843 roku Koppe opublikował *Ein neuer Lehrsatz der Stereometrie – Eine Beilage zu allen stereometrischen Lehrbüchern* [*Nowe twierdzenie stereometrii – dodatek do wszystkich podręczników stereometrycznych*] ([10]). Dokładnie opisał tutaj własności obelisków, po czym skupił się na twierdzeniu dotyczącym ich objętości. Zgodnie z tym, co zapowiedział w przedmowie, zaprezentowany przez niego dowód był na tyle elementarny, aby bez trudu mogli go zrozumieć uczniowie gimnazjów, szkół realnych i szkół zawodowych. Od tego momentu obeliski na stałe zagościły w programach nauczania szkół na poziomie średnim, a rezultat Koppego umieszczany był we wszystkich nowo wydawanych podręcznikach stereometrycznych ([10]).

Zauważmy, że w tym przypadku decyzja o transmisji nowego twierdzenia matematycznego do nauczania szkolnego była niemalże natychmiastowa, a jej realizacja zajęła niespełna pięć lat.

Literatura

[1] Fassbender E.: *Anfangsgründe der beschreibenden Geometrie, der analytischen Geometrie, der Kegelschnitte und der einfachen Reihen.* Druck und Verlag von G. D. Bädeker, Essen, 1860.

[9] Promieniem małym wielokąta foremnego nazywano promień koła wpisanego w ten wielokąt, a promieniem dużym – promień koła na nim opisanego (spójrz: Analiza podręcznika *Die Elementar Mathematik* L. Kambly'ego w [3]).

[2] Hirsch M.: *Sammlung geometrischer Aufgaben*. Cz. II. Heinrich Frölich, Berlin, 1807.

[3] Karpińska K.: *O nauczaniu geometrii w Gimnazjum Toruńskim w II połowie XIX wieku*. W: Rozprawy z dziejów oświaty, Tom L, pod red. J. Schiller-Walickiej, Warszawa, 2013.

[4] *Königliches evangelisches Gymnasium und Realschule erster Ordnung zu Thorn*. Thorn, 1862, 1864, 1867, 1871, 1872, 1874, 1873, 1865.

[5] Kössler F.: *Personenlexikon von Lehrern des 19. Jahrhunderts Berufsbiographien aus Schul-Jahresberichten und Schulprogrammen 1825−1918 mit Veröffentlichungsverzeichnissen*, Band: Faber – Funge, Universitätsbibliothek Gießen, Giessener Elektronische Bibliothek, 2008.

[6] Koppe C.: *Ein polyedrischer Satz*, W: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. G. Reimer, Berlin, 1838.

[7] Koppe K.: *Anfangsgründe der Reiner Mathematik für Schul- und Selbst-Unterricht*. Cz. I. *Arithmetik und Algebra*. Wyd. 8. Druck und Verlag von G. D. Bädeker, Essen, 1869.

[8] Koppe K.: *Anfangsgründe der Reiner Mathematik für Schul- und Selbst-Unterricht*. Cz. II. *Planimetrie*. Wyd. 4. Druck und Verlag von G. D. Bädeker, Essen, 1852.

[9] Koppe K.: *Anfangsgründe der Reiner Mathematik für Schul- und Selbst-Unterricht*. Cz. III. *Stereometrie*. Wyd. 7. Druck und Verlag von G. D. Bädeker, Essen, 1867.

[10] Koppe K.: *Ein neuer Lehrsatz der Stereometrie – Eine Beilage zu allen stereometrischen Lehrbüchern*. Druck und Verlag von G. D. Bädeker, Essen, 1843.

[11] Mikołajczyk M.: *Geometria nożyczek*. W: Magazyn Miłośników Matematyki, nr 2., Oficyna Wydawnicza ATUT – Wrocławskie Wydawnictwo Oświatowe, Wrocław, 2004.

[12] *Statistik des Gymnasiums zu Elberfeld, Festschrift zur 24 Februar 1824 erfolgten öffentlichen Anerkennung des Gymnasiums*. Gedrukt bei Sam. Lucas, Elberfeld, 1874.

[13] Steiner J.: *Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en general*. W: Journal für die reine und angewandte Mathematik (dwie części) 1842.

[14] Steiner J.: *Ueber einige stereometrische Sätze*. W: Journal für die reine und angewandte Mathematik. G. Reimer, Berlin, 1842.

[15] Walz H.: *Katalog Lehrerbibliotek des Gymnasiums zu Barmen*. Druck von D. B. Wiemann, Barmen, 1897.

Adresa

Mgr. Karolina Karpińska
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń
e-mail: *bosman@mat.umk.pl*

HRDINOU PROTI SVÉ VŮLI? VĚNOVÁNO FRANTIŠKU ČUŘÍKOVI

JAN KOTŮLEK

Abstract: In this paper we commemorate the life story of František Čuřík (born 1876), professor of mathematics and descriptive geometry at the Mining University in Příbram, graduated mechanical engineer and ardent teacher, who took his own life 70 years ago, i.e., in 1944 – during the time of Nazi rule over the destroyed Czechoslovakia.

1 Rodinné poměry

František Čuřík se narodil do rodiny Josefa Čuříka, úředníka na okresním hejtmanství na Smíchově, a jeho ženy Aloisie, roz. Havránkové. Jelikož mu již v mládí zemřeli rodiče, vychovával jej jeho strýc Karel Havránek, farář ve Slivenci.[1]

František Čuřík byl dlouho svobodný, oženil se až v 51 letech (roku 1927), a to se Štěpánkou Kolaříkovou, roz. Kropáčovou, o sedm let mladší vdovou.[2] S ní vychovával dceru Štěpánku,[3] která se ve 30. letech provdala za profesora geotechniky na ČVUT Zdeňka J. Bažanta (1908–2001), syna profesora stavební mechaniky na ČVUT Zdeňka Bažanta (1879–1954). Ten byl Čuříkovým bývalým kolegou a pozdějším spolupracovníkem, např. na knize [2].

2 Studium a kariéra za Rakouska-Uherska

V roce 1895, po maturitě na reálném gymnáziu v Příbrami, se František Čuřík zapsal ke studiu na Českou vysokou školu technickou v Praze, a to na 3. odbor (stavba strojů).[4] Během studia absolvoval vojenskou službu[5] a před složením druhé státní zkoušky v roce 1904 již pracoval v praxi, např. u firmy Elektrotechnická akciová společnost, dříve Kolben a spol.[6]

Od roku 1903 působil na místě asistenta při ústavu matematiky na české technice v Praze, u profesora Augustina Pánka.[7] Od roku 1907/8 byl Čuřík pověřen suplováním jeho přednášek z vyšší matematiky.[8] V té době studoval matematiku a deskriptivní geo-

---

[1] Archiv hl. m. Prahy, f. Sbírka matrik, sign. SM N20, fol. 72.

[2] Čuříkova manželka Štěpánka byla úspěšná podnikatelka a majitelka firmy Mechanická továrna na hadice a řemeny, Kolaříka Antonína vdova, Zengerova ulice v Českých Budějovicích. Archiv VŠB-TU Ostrava, f. Rektorát Vysoké školy báňské (dále VŠB), inv. č. 394, Personální záležitosti zaměstnanců VŠB, sign. 1/Č, kart. 153.

[3] Adoptoval ji v září 1927. Štěpánka Čuříková-Kolaříková (narozena 4. 12. 1912) vystudovala sociologii a v roce 1936 byla dokonce promována doktorkou sociologie za dizertaci *Sociologická studie učitelstva*, viz Archiv Univerzity Karlovy, f. Matriky UK, inv. č. 9, Matrika doktorů Univerzity Karlovy IX., fol. 4350.

[4] Archiv ČVUT, f. Česká vysoká škola technická v Praze, katalogy posluchačů, protokoly o I. a II. státních zkouškách.

[5] Vojenský historický archiv Praha, f. Sbírka kmenových listů, osobní spis.

[6] Viz [8], kde je ale jméno firmy uvedeno nepřesně.

[7] Národní archiv Praha, f. Ministerstvo kultu a vyučování Vídeň MKV/R, inv. č. 88, sign. 7 Assistenten Prag, kart. 263.

[8] Archiv ČVUT, Program c. k. české vysoké školy technické v Praze na studijní rok 1907–1908, část II, s. 90.

metrii na Karlo-Ferdinandově univerzitě v Praze, prošel zkouškou učitelské způsobilosti a obhájil dizertační práci *Bernoulliho theorem o počtu pravděpodobnosti*.[9]

K 1. září 1910 byl jmenován profesorem na Státní průmyslové škole v Praze I., kde vyučoval matematiku a rýsování. Přitom si podržel přednášky na technice,[10] napsal první matematické studie pro *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky* a vydal první díl učebnice *Základy vyšší matematiky* [1].

3 Čuříkovy učebnice matematiky

Základy vyšší matematiky [1] byly první českou učebnicí psanou s ohledem na potřeby inženýrské praxe. Technici dílo vesměs chválili, ovšem Čuřík se musel vyrovnat s velmi kritickou recenzí Matyáše Lercha (1860–1922).[11] „Uvolněný sloh“ Čuříkovy prvotiny, který měl zpřístupnit náročnou látku inženýrskému pohledu, ovšem podle Lercha vedl k nepřesnostem ve formulacích, a ty byly Lerchovou nejčastější výtkou.

V tomto směru byla Lerchova kritika oprávněná, jedna volnější formulace způsobila nedorozumění ještě téměř po sto letech: Karel Lepka (viz [5], s. 290) nerozkódoval z Čuříkova zkratkovitého výkladu[12] o funkci $y = x \cdot \sin(1/x)$, že autor dodefinoval funkci tak, že

$$f:\ y = \begin{cases} x \cdot \sin\dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

čímž získal funkci, která je na celém svém definičním oboru D = R spojitá, neboť

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0 .$$

Konečně je třeba dodat, že František Čuřík se ke kritice postavil čelem a ve druhém vydání knihu velmi zevrubně přepracoval a většinu vytýkaných nepřesností opravil.[13] Stále však považuji sloh Čuříkovy knihy za velmi náročný. Možná čtenáře neodrazoval svou formálností, na druhou stranu od něj ale vyžadoval maximální soustředění a promyšlení a propočítání všech popisovaných úvah.

Jako autor učebnic a příruček se František Čuřík prezentoval až do konce kariéry: v roce 1918 následoval druhý díl *Základů vyšší matematiky* (integrální počet), za první republiky pak výklad o matematice do *Technického průvodce* (1921), učebnice *Počtu vyrovnávacího*, tedy metody nejmenších čtverců a již zmiňované druhé vydání *Základů vyšší matematiky* (1. díl 1923, 2. díl 1930). Koncem 30. let přidal do Technického průvodce *Matematické a statické tabulky* a v práci na příručkách nepřestal ani za protektorátu.

---

[9] Archiv ČVUT, f. Česká vysoká škola technická v Praze, disertace, sign. 110.

[10] Archiv hl. m. Prahy, f. Výroční zprávy, inv. č. 132, sign. 827, Průmyslová škola v Praze I (1. státní).

[11] Viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 46(1917), 52–59, srov. také [5]. Proti Lerchově negativní recenzi se ohradil např. i Lerchův kolega z brněnské techniky, profesor elektrotechniky Vladimír List (1877–1971), a to článkem *Technická mathematika*, viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 46(1917), 206–210.

[12] První vydání knihy [1], s. 55. Srov. [5], s. 289–290.

[13] Ve druhém vydání [1] je výše zmíněné místo (s. 37) formulováno mnohem obratněji a hlavně přesněji, takže k nedorozumění snad již dojít nemůže.

4 Profesorem Vysoké školy báňské v Příbrami

Po vzniku první Československé republiky byl krátce správcem průmyslové školy v Banské Bystrici. Ještě v roce 1919 se však přihlásil do konkursu na místo profesora matematiky a deskriptivní geometrie na VŠB v Příbrami. Tato škola prošla po vzniku ČSR velkou reorganizací a volné místo vzniklo rozdělením ústavu matematiky a fyziky na dva ústavy, viz [3], s. 60.

Kromě nesporné kvalifikace jak pro matematiku, tak i pro deskriptivu a vyrovnávací počet, byla nakonec rozhodující „jeho veliká praxe učitelská a jeho osvědčené působení při výchově dorostu inženýrského."[14] František Čuřík konkurs vyhrál,[15] 25. ledna 1920 byl jmenován mimořádným a 18. července 1921 řádným profesorem,[16] a rychle se zapojil do vědeckého života v Příbrami: pracoval v mnoha akademických spolcích (jako byla např. Akademická mensa, Studentský domov, Masarykův podpůrný spolek pro nemajetné posluchače VŠB; byl také čestným členem Prokopa nebo Spolku asistentů VŠB).

V červenci 1922 mu Ministerstvo školství a národní osvěty povolilo podporu 6000 Kč na studijní cestu po Německu,[17] působil také jako předseda komise pro 1. státní zkoušku, srov. [8].

Zakrátko byl navíc zvolen rektorem, poprvé již pro školní rok 1924/25. V této funkci se musel vypořádat s organizací oslav 75. výročí založení VŠB a udělení čestného doktorátu presidentu Masarykovi.[18] Snažil se této příležitosti využít k prosazení dlouhodobých požadavků profesorského sboru, zejména přestěhování školy do Prahy. Tento úkol se však nepodařilo prosadit ani dalším rektorům VŠB po celou dobu první republiky, srov. [3], s. 61.

5 Válečné osudy

Po okupaci a vzniku protektorátu se František Čuřík odhlásil z pobytu v Praze a stáhl se do ústraní. V listopadu 1939 byly nacistickými okupanty uzavřeny české vysoké školy, tedy i VŠB v Příbrami, jejich profesoři byli posláni na dovolenou s čekatelným a proti vůdcům studentských spolků začaly tvrdé represe, srov. [3], s. 62.

František Čuřík se od roku 1940 věnoval, podobně jako další profesoři na nucené dovolené, psaní knih. Ve spolupráci s Františkem Kloknerem (1861–1972) a Zdeňkem Bažantem (1879–1954) pracoval na druhém vydání Technického průvodce, a to svazku č. 1 o matematice a svazku č. 19, jímž byly matematické a statické tabulky.

---

[14] Zápis ze zasedání profesorského sboru Vysoké školy báňské z 24. 9. 1919, Archiv VŠB-TU Ostrava, f. Rektorát VŠB, inv. č. 361, Korespondence, kart. 78.

[15] Kromě Čuříka se do konkursu přihlásili Václav Hruška (1888–1954), pozdější profesor aplikované matematiky na ČVUT a František Nachtikal (1874–1939), pozdější profesor fyziky na VUT v Brně a ČVUT v Praze. Nachtikal nebyl doporučen kvůli malé vyučovací praxi v deskriptivě, Hruška byl lepší vědecky, ale pro místo profesora byl prý příliš mladý. Viz výše citovaný zápis ze zasedání prof. sboru VŠB z 24. 9. 1919.

[16] Archiv kanceláře prezidenta republiky, f. KPR – protokol P, sign. P 23/20 a P 778/21.

[17] „Za účelem návštěvy vysokých škol a opatření vědeckého materiálu pro chystanou učebnici matematiky." Šlo o druhé vydání jeho knihy *Základy vyšší matematiky* [1]. Výroční zpráva za rok 1921/22, Archiv VŠB-TU Ostrava, f. Rektorát VŠB, inv. č. 34.

[18] Archiv VŠB-TU Ostrava, f. Rektorát VŠB, Zápisy ze zasedání prof. sboru za rok 1924, inv. č. 10.

Již od roku 1938 byla profesorům postupně snižována věková hranice pro odchod do důchodu.[19] Na základě tohoto nařízení byl František Čuřík k 30. září 1940 (tedy ve svých 64 letech) dán do trvalé výslužby. Z finančního hlediska si tím ovšem polepšil, jeho penze byla (na rozdíl od čekatelného) rovna 100% původního platu.

Čuříkův život skončil tragicky. Za nevyjasněných okolností se 7. června 1944 oběsil. Podle nejčastěji tradované verze „na výzvu, aby spolupracoval na výpočtech raket V-2 ve společnosti Waffen-Union, odpověděl raději tak, že zvolil dobrovolnou smrt.“[20] Příběh vznikl asi v okruhu profesorů VŠB, kteří chtěli snad vzdát hold mrtvému kolegovi, kterého německá okupace připravila o klidný konec kariéry a nepřímo také o život, nebo se jim hodil jako krycí historka omlouvající jejich vlastní spolupráci s nacisty, srov. [4].

Literatura

[1] Čuřík F.: *Základy vyšší mathematiky*. I. díl, Česká matice technická, Praha, 1915 (2. přeprac. vyd. 1923).

[2] Čuřík F.: *Matematika*. Technický průvodce 1, Česká matice technická, Praha, 1921 (2. přeprac. vyd. 1944).

[3] Kotůlek J.: *Matematika na VŠB v příbramském období (1895–1945).* In Doležalová J. (ed.): Sborník z 21. semináře Moderní matematické metody v inženýrství (3mi), VŠB-TU v Ostravě, Ostrava, 2012, 54–64.

[4] Kotůlek J.: *Angewandte Mathematik in der Rüstungsforschung der Škoda-Werke; mit Akzent auf der Versuchsanstalt der Waffen-Union Škoda-Brünn in Příbram*. In Fothe M., Schmitz M., Skorsetz B., Tobies R. (eds.): Mathematik und Anwendungen. Thillm, Bad Berka, 2014, 50–57.

[5] Lepka K.: *Matyáš Lerch a Jednota*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 57(2012), 285–292.

[6] Lukaštík J.: *K dějinám vysokého báňského školství v našich zemích – Vysoká škola báňská v Ostravě.* In Jirkovský J. (ed.): 110 let Vysoké školy báňské v Ostravě, Vysoká škola báňská, Ostrava, 1959, 1–70.

[7] Pajer M.: *K vývoji a výrobě raketových zbraní v Příbrami v letech druhé světové války*. Podbrdsko 13(2006), 155–164.

[8] -th-: *Za profesorem Ing. Dr. techn. Františkem Čuříkem*. Uhlí 23(1944), 93–94.

Adresa

RNDr. Jan Kotůlek, Ph.D.
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
VŠB-TU v Ostravě
17. listopadu 15
708 33 Ostrava-Poruba
e-mail: *Jan.Kotulek@vsb.cz*

[19] §24 vládního nařízení ze dne 21. prosince 1938, čís. 379 Sb.
[20] Viz [6], s. 34. Podobně líčí příběh také M. Pajer ve studii [7]. Zejména poznámka o raketách V-2 je však jistě nepravdivá, srov. [4].

ROBERVALOVA REKTIFIKACE CYKLOIDY

LIBOR KOUDELA

Abstract: The first published solution to the problem of rectification of a curve appeared in Blaise Pascal's treatise on the history of the cycloid (1658). The length of its arc was found by Christopher Wren by means of the method of exhaustion; details of his calculation were described in John Wallis' *Tractatus duo* (1659). The result was allegedly known to Roberval already in 1640's; however, he did not publish his solution and his treatise on the cycloid, which contained also its rectification, appeared in print as late as 1693. Regardless of the question of priority, Roberval's solution is an interesting example of the application of the method of indivisibles and using the idea of motion in geometry.

1 Rektifikace cykloidy

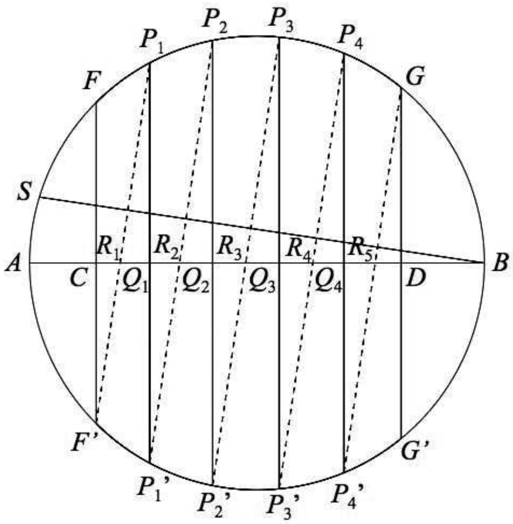
Na začátku druhé poloviny 17. století se problém rektifikace, tedy určení délky oblouku křivky, stal prestižní záležitostí a řada předních matematiků té doby na něj zaměřila svou pozornost. Historicky první rektifikovanou křivkou byla logaritmická spirála, ale první publikovaný výsledek v této oblasti se týkal délky oblouku cykloidy. Blaise Pascal se ve své *Histoire de la Roulette* (1658) zmiňuje o dopise Christophera Wrena, který obsahoval tvrzení, že délka základního oblouku cykloidy je rovna čtyřnásobku průměru tvořící kružnice. Na stejném místě Pascal uvádí, že k témuž závěru dospěl údajně ještě dříve jeho krajan Gilles Personne de Roberval (viz [4, s. 204–205]).

Robervalovo pojednání *De Trochoide* obsahující i řešení problému rektifikace cykloidy vyšlo až roku 1693 spolu s dalšími pracemi jeho samého i jiných autorů. Roberval zde píše (viz [5, s. 276]), že délku oblouku spolu s řadou dalších poznatků o cykloidě odvodil již v letech 1635–1640; svůj objev však nepublikoval, neboť považoval použitou metodu za natolik univerzální, že s její pomocí chtěl vyřešit i řadu jiných problémů – především kvadratur.

2 Robervalův postup

Rámec Robervalova řešení tvoří kinematické pojetí křivky jako dráhy pohybujícího se bodu a metoda indivisibilií. Představa skládání jednoduchých pohybů posloužila Robervalovi k určení tečny cykloidy, které je pro řešení problému rektifikace podstatné. Oblouk cykloidy nahrazuje Roberval systémem nekonečně krátkých úseků tečen. Ve svém odvození pracuje s představou vyjádření poměru systémů „všech linií“ obsažených v nějakém obrazci poměrem délek jednotlivých úseček nebo oblouků.

Roberval nejprve dokazuje pomocné tvrzení (v textu označované jako „lemma“), které nicméně má samostatný význam: Poměr součtu délek *všech* kolmic spuštěných z oblouku FG kružnice s poloměrem r na úsečku AB a součtu odpovídajícího počtu poloměrů kružnice je roven poměru délky úsečky CD a oblouku FG (obr. 1). Rozdělí oblouk FG na n stejných částí pomocí bodů $F \equiv P_0, P_1, P_2, \ldots, G \equiv P_n$ a těmito body vede kolmice k průměru AB, které protáhne až do bodů $P_0', P_1', P_2', \ldots, P_n'$. Na kružnici sestrojí



Obr. 1. K odvození pomocného tvrzení (upraveno podle [5, s. 257])

dále bod S tak, aby oblouk AS byl stejný jako oblouk P_0P_1. Spojí pak body $P_0'P_1$, $P_1'P_2$, …, $P_{n-1}'P_n$ ležící na opačných stranách úsečky AB, takže vzniknou pravoúhlé trojúhelníky $P_0'Q_0R_1$, $P_1Q_1R_1$, …, $P_nQ_nR_n$ (označujeme $C \equiv Q_0$). Tyto trojúhelníky a trojúhelník BSA jsou podobné, takže

$$\frac{|P_0'Q_0|}{|Q_0R_1|} = \frac{|P_1Q_1|}{|R_1Q_1|} = \frac{|P_1'Q_1|}{|Q_1R_2|} = \cdots = \frac{|P_nQ_n|}{|R_nQ_n|} = \frac{|BS|}{|AS|},$$

a odtud

$$\frac{|P_0'Q_0| + |P_1Q_1| + |P_1'Q_1| + \cdots + |P_nQ_n|}{|Q_0R_1| + |R_1Q_1| + |Q_1R_2| + \cdots + |R_nQ_n|} = \frac{|P_0'Q_0| + |P_1P_1'| + |P_2P_2'| + \cdots + |P_{n-1}P_{n-1}'| + |P_nQ_n|}{|CD|} = \frac{|BS|}{|AS|}.$$

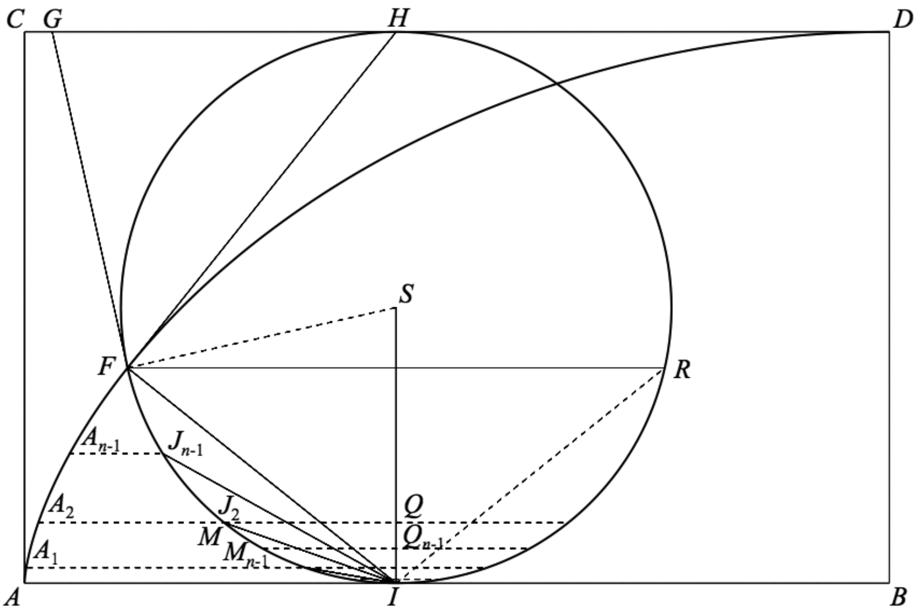
Je tedy poměr součtu délek všech tětiv P_iP_i', $i = 1, \ldots, n-1$, spolu s polovinou délek obou krajních tětiv, a délky úsečky BS roven poměru délek úseček CD a AS. Necháme-li počet tětiv růst nade všechny meze, bude se $|BS|$ blížit průměru kruhu a délku úsečky AS (která je rovna $|P_{i-1}P_i|$, $i = 1, \ldots, n$) bude možné nahradit délkou oblouku AS (oblouk značíme stejně jako úsečku jen pomocí koncových bodů; význam symbolu bude z kontextu zřejmý). Zároveň při tom můžeme zanedbat oba krajní členy $P_0'Q_0$ a P_nQ_n. Bude tedy (pro $n \to \infty$)

$$\frac{\sum |P_iQ_i|}{r} = \frac{|CD|}{|AS|}$$

a také

$$\frac{\sum |P_iQ_i|}{nr} = \frac{|CD|}{|FG|}. \tag{1}$$

Uvažujme nyní oblouk cykloidy, jejíž tvořící kružnice má poloměr r, střed S a průměr IH. Nechť F je nějaký bod cykloidy, FH tečna k cykloidě a FG tečna k tvořící kružnici (obr. 2). Bod M nechť leží uprostřed oblouku IF kružnice. Sestrojíme tětivu FR tvořící kružnice rovnoběžnou se základnou AB; tečna FH pak bude osou úhlu $\angle GFR$.



Obr. 2. K Robervalově rektifikaci cykloidy (upraveno podle [5, s. 274])

Podle tvrzení 32 knihy III Eukleidových *Základů* (viz [2, s. 120]) jsou si úhly $\angle GFR$ a $\angle FIR$ rovny. Totéž platí i o úhlech $\angle GFH$ a $\angle FIS$ a rovnoramenné trojúhelníky GFH a SFI jsou tedy podobné. Je potom $|FH| : |FG| = |IF| : |FS|$, tj. $|IF| : r$.

Rozdělíme oblouk IMF na n stejných dílů pomocí bodů $I \equiv J_0, J_1, J_2, \ldots, F \equiv J_n$ a odpovídajícím způsobem oblouk cykloidy AF pomocí bodů $A \equiv A_0, A_1, A_2, \ldots, F \equiv A_n$. Délku oblouku cykloidy i kružnice aproximujeme součtem délek úseků tečen obou křivek v dělících bodech. Bodem I vedeme tětivy ke každému z dělících bodů $J_1, J_2, \ldots, J_n$. Roberval s odvoláním na tvrzení 24 knihy V Eukleidových *Základů* (viz [3, s. 89]) uvádí, že poměr součtu délek *všech* těchto tětiv a součtu délek odpovídajích poloměrů SJ_i, $i = 1, \ldots, n$ je roven poměru součtu délek úseků tečen cykloidy mezi body A a F a úseků tečen kružnice mezi body I a F, tj. (pro $n \to \infty$)

$$\frac{\sum |IJ_i|}{nr} = \frac{\sum |A_{i-1}A_i|}{\sum |J_{i-1}J_i|} = \frac{|AF|}{|IMF|}. \tag{2}$$

Nyní rozdělíme oblouk IM opět na n stejných dílů pomocí bodů $I \equiv M_0, M_1, M_2, \ldots, M \equiv M_n$. Každým z dělících bodů M_i, $i = 1, \ldots, n$ vedeme tětivu kružnice rovnoběžnou se základnou AB, která protne úsečku IS v bodě Q_i. Protože pro každé $i = 1, \ldots, n$ je $2|M_iQ_i| = |IJ_i,|$ bude

$$\frac{\sum |M_i Q_i|}{|IM|} = \frac{\sum |IJ_i|}{|IMF|}. \tag{3}$$

Z dříve dokázaného lemmatu zároveň plyne, že

$$\frac{2\sum |M_i Q_i|}{nr} = \frac{2|IQ|}{|IM|}. \tag{4}$$

Protože $2|IQ|:|IM| = 4|IQ|:|IMF|$, dostaneme srovnáním s (2) $4|IQ|:|IMF| = |AF|:|IMF|$, a tedy $|FG| = 4|IQ|$. Délka oblouku cykloidy mezi body A a F je tedy rovna čtyřnásobku délky úsečky IQ; speciálně délka oblouku mezi body A a D je rovna čtyřnásobku poloměru tvořící kružnice.

3 Srovnání

Roberval se v komentáři ke svému odvození zmiňuje i o Wrenově rektifikaci, kterou hodnotí s uznáním. Dokazuje, že i když Wren užil zcela jinou metodu, jsou oba výsledky ekvivalentní. Wrenův závěr uvádí Roberval v tomto znění: délka oblouku cykloidy mezi body F a D je rovna dvojnásobku délky tečny k cykloidě mezi body F a H (viz [5, s. 277]). Robervalův postup založený na metodě indivisibilií spíše odpovídá Huygensovu řešení téhož problému (viz [6, s. 77–82]). Huygens se přitom opíral o limitní podobu tvrzení 22 Archimédovy knihy *O kouli a válci* (viz [1, s. 29–30]), jejíž modifikovanou verzí je lemma, na němž založil svůj důkaz Roberval.

Literatura

[1] Archimedes: *The Works of Archimedes. Edited in Modern Notation with Introductory Chapters by T. L. Heath*. Cambridge University Press, Cambridge, 1897.

[2] Eukleides: *Základy. Knihy I–IV*. OPS, Nymburk, 2008.

[3] Eukleides: *Základy. Knihy V–VI*. OPS, Nymburk, 2009.

[4] Pascal B: *Œuvres complètes, t. VIII*. Hachette, Paris, 1914.

[5] Roberval: *De Trochoide ejusque spatio*. In Divers ouvrages de mathematique et de physique, Imprimerie royale, Paris, 1693, 246–278.

[6] Yoder J. G.: *Unrolling Time: Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

Adresa

Mgr. Libor Koudela, Ph.D.
Ústav matematiky a kvantitativních metod
Fakulta ekonomicko-správní
Univerzita Pardubice
Studentská 84
532 10 Pardubice
e-mail: *libor.koudela@upce.cz*

FREGE AKO TVORCA FORMÁLNEJ LOGIKY

LADISLAV KVASZ

Abstract: The aim of the paper is to analyze the main conceptual obstacles that had to be overcome by the founders of modern mathematical logic. It focuses on George Boole and Gottlob Frege and tries to identify the basic linguistic innovations that they introduced.

1 Úvod

Logika sa ako *filozofická disciplína* zrodila v starovekom Grécku, zhruba v čase, kedy sa konštituovala matematika ako deduktívna veda, teda v treťom storočí pred naším letopočtom. Zo staroveku sa nám dochovali dva logické systémy – aristotelovská sylogistická logika a stoická výroková logika. Ich tvorcami boli Aristoteles zo Stageiry, Diodoros Kronos a Chrýsippos zo Soloi (pozri [6]). Trvalo však ďalších takmer dvetisíc rokov, kým v diele Georga Boolea, Gottloba Fregeho a Giuseppa Peana došlo k *premene logiky na matematickú disciplínu*. Prístupy Boolea, Fregeho a Peana k logike sa síce od seba značne odlišovali, ale výsledná syntéza, ktorú vytvorili Alfred North Whitehead a Bertrand Russell, priniesla skĺbenie myšlienok uvedených autorov.

Pri analýze premeny logiky na matematickú disciplínu je možné rozlíšiť dve etapy. Prvá, iniciovaná Georgom Booleom, je známa ako ***algebra logiky.*** Jej vyvrcholením boli trojzväzkové *Vorlesungen über die Algebra der Logik* Ernsta Schrödera vydané medzi rokmi 1890 a 1905. Napriek mnohým nespochybniteľným úspechom algebra logiky nevyústila v súčasnú formálnu logiku. To sa podarilo až v druhej etape, iniciovanej dielom Gottloba Fregeho, pod názvom ***predikátový počet***. Cieľom tohto príspevku je pokúsiť sa objasniť, prečo je vznik logiky ako filozofickej disciplíny oddelený od vzniku matematickej logiky takým dlhým obdobím. Logika musela na ceste k formalizácii prejsť radom zásadných zmien a oslobodiť sa od viacerých hlboko zakorenených predsudkov.

Momenty brániace formalizácii logiky rozdelíme do dvoch skupín. Prvú z nich tvoria nedostatky prekonané už Booleom, ktorý sa tak stal zakladateľom variantu formálnej logiky, nazývaného *algebra logiky*. Booleov projekt formalizácie logiky však neviedol k matematickej logike, ako ju poznáme dnes. Boolea od matematickej logiky oddeľoval rad ďalších nedostatkov, ktoré tvoria predmet tretej časti tejto state. Metóda analýzy vývinu matematiky, ktorú používame, nadväzuje na stať [8]. Našim cieľom je nevnímať matematické teórie ako súbory tvrdení, ale pokúsiť sa porozumieť im ako určitým ***vedecko-výskumným programom***, ktoré reagujú na nedostatky predchádzajúcich teórií, pričom niektoré z nich odstraňujú. Pojem nedostatku nechápeme negatívne. Považujeme ho za epistemologickú kategóriu, ktorá opisuje výzvy, motivujúce rast matematiky.

2 Nedostatky tradičnej logiky prekonané Booleom

Aj keď pokusov zblížiť logiku s matematikou bolo niekoľko (stačí spomenúť Leibniza či Eulera), zdá sa, že Boole bol prvý, komu sa podarilo vytvoriť dostatočne bohatý kalkul, na základe ktorého bolo možné vytvoriť novú matematickú disciplínu – algebru logiky. Na ceste k svojmu kalkulu, ktorý dnes nazývame *Booleova algebra* a ktorý pripúšťa tri interpretácie (výroková logika, množinová algebra, počet pravdepodobnosti)[1], musel Boole prekonať niekoľko zásadných nedostatkov tradičnej filozofickej logiky.

2.1 Oddelenosť logiky od matematiky

Aj keď teóriu sylogizmov rozpracovanú v [1] možno považovať za jednu z prvých axiomatických teórií v dejinách, a teda z moderného pohľadu je to teória matematická, aristotelovská logika sa stala súčasťou filozofie a vyvíjala sa oddelene od matematiky ako jedna zo základných filozofických disciplín (pozri [6]). Filozofi považovali aristotelovskú logiku za čosi zásadne odlišného od matematiky a podobného názoru boli aj matematici. Euklides napísal (dnes stratené) pojednanie o optike a od Archimeda sa zachoval spis o rovnováhe na páke. Nie je však známe, že by niektorý antický matematik bol napísal niečo o logike. Fyzika bola za čias antiky k matematike bližšie než logika. Hlavnou zásluhou Boolea (ako aj Fregeho, Peana a Russella) bolo prekonanie tohto predsudku, oddeľujúceho matematiku od logiky. Vytvoril určitú variantu formálnej logiky, ktorá bola míľnikom na ceste premeny logiky v štandardnú matematickú disciplínu.

2.2 Psychologizmus

Novoveká logika v období pred Fregem, Peanom a Russellom bola spravidla chápaná ako opis správneho myslenia, ako opis toho, ako by mal empirický subjekt reálne uvažovať. Takéto chápanie logiku zbližovalo z epistemológiou a psychológiou, ale súčasne ju vzďaľovalo od matematiky. Takto rozumel logike dokonca ešte aj Boole, jeden zo zakladateľov formálnej logiky.[2] Bol to až Frege, kto pochopil, že logika sa má zaoberať *vzťahmi vyplývania medzi propozíciami*, teda ***objektívnymi vzťahmi*** medzi ***abstraktnými objektmi***, nezávislými od akéhokoľvek subjektu.

2.3 Úzke chápanie predmetu logiky

Tradičná logika, pestovaná na väčšine stredovekých a ranne novovekých univerzít, predstavuje iba fragment systému formálnej logiky. Tento fragment možno označiť termínom *monadická logika* – logika pripúšťajúca jednoargumentové predikáty. Prv než mohla vzniknúť formálna logika, bolo nutné zásadne rozšíriť rámec toho, čo do logiky zahŕňame – o logiku relácií, o teóriu logických spojok a o polyadickú kvantifikáciu.

Pierce, Frege a Peano priniesli rozšírenie predmetu logiky, keď začali metódami logiky zapisovať matematické dôkazy (pozri [11]). Ukázali, že *formy usudzovania používané v matematike od Euklida prekračujú medze aristotelovskej logiky*. Pomocou sylogizmov nie je možné formalizovať takmer žiadny matematický dôkaz. Aj keď Boole svoj kalkul nepoužil priamo na analýzu matematických dôkazov, a tak nedospel ani

---

[1] Pri prvej interpretácii je $A \,.\, B$ konjunkcia výrokov A a B, $A + B$ je ich disjunkcia, 1 je pravda a 0 je nepravda. Pri druhej interpretácii je $A \,.\, B$ prienik množín A a B, $A + B$ je ich zjednotenie, 1 je univerzálna množina a 0 je prázdna množina. Pri tretej interpretácii je $A \,.\, B$ súčasné nastanie udalostí A a B, $A + B$ je nastanie jednej alebo druhej udalosti, 1 je istá udalosť a 0 je nemožná udalosť. Pri každej z týchto interpretácií platí, že $x \,.\, x = x$, čo je identita, ktorú Boole považoval za základnú identitu svojho kalkulu: konjunkcia výroku so sebou samým je ekvivalentná pôvodnému výroku, prienik množiny so sebou samou je rovný pôvodnej množine a nastanie udalosti súčasne so sebou samou má rovnakú pravdepodobnosť ako pôvodná udalosť (pozri [2]).

[2] Formálny systém, ktorý Boole vytvoril, je od psychologického chápania logiky nezávislý. Preto v praktickej rovine sa Boole od psychologizmu dokázal odpútať, aj keď verbálne sa k nemu hlásil.

k logike relácií, ani k teórii logických spojok či k polyadickej kvantifikácii, jeho kalkul je predsalen bohatší než tradičná logika, a tak ho možno považovať za jeden z prvých krokov na ceste k rozšíreniu predmetu tradičnej logiky.

3 Nedostatky tradičnej logiky prekonané až Fregem

Napriek nepopierateľnému prínosu Booleom iniciovanej algebry logiky jej program nebol dostatočne radikálny. Boole v zásade akceptoval, že predmet logiky je vymedzený rozsahom tradičnej logiky tak, ako bola vyučovaná na univerzitách v rámci filozofickej prípravy. Jeho cieľom bolo iba aristotelovské sylogizmy prepísať prostriedkami jazyka algebry. Tým priniesol logiku do kontaktu s matematikou a pri rozvíjaní svojho kalkulu sa postupne odpútaval od psychologizmu aj od príliž úzkeho pojatia logiky, neprekonal však celý rad ďalších problematických aspektov tradičnej logiky, ktoré odstránil až Frege (pozri [3] a [4]).

3.1 Naviazanosť logiky na problémy formulované filozofickou tradíciou

Úzke pojatie predmetu logiky, ktoré sme spomínali v bode 2.3, súvisí s naviazanosťou tradičnej logiky na prirodzený jazyk. Aristotelovská teória výroku a z nej vyplývajúca teória sylogizmov sú do istej miery predurčené stavbou vety v prirodzenom jazyku (jej zloženia z mennej a slovesnej frázy). Pre zrod formálnej logiky bolo rozhodujúce, že sa logika od tejto závislosti na prirodzenom jazyku oslobodila. Tento krok bol do veľkej miery zásluhou Fregeho a Peana, ktorí priniesli v chápaní vzťahu logiky a matematiky zásadnú zmenu. Kým Boole používal jazyk matematiky (algebru) ako nástroj na presné uchopenie logického usudzovania (jeho redukciu na upravovanie algebraických rovníc), ako predmet svojho záujmu, teda problémy, ktoré pomocou svojho matematického nástroja skúmal, plne akceptoval sylogizmy tradičnej aristotelovskej logiky. Inovácia, ktorú oproti Booleovi priniesli Frege a Peano, spočívala v tom, ža aj za predmet, ktorý skúmali, zvolili tvrdenia matematiky. Takže matematický bol nielen nástroj, pomocou ktorého vyjadrovali logické úsudky a argumenty, ale matematika bola aj predmetom, ktorý analyzovali. Tým logiku vymanili z područia prirodzeného jazyka.

3.2 Subjekt-predikátové chápanie propozície

Klasická logika bola v zajatí aristotelovskej tézy, podľa ktorej je súd spojenie subjektu s predikátom. Samozrejme, táto téza je iba dôsledkom všeobecnejšej Aristotelovej teórie formy a látky, kde v logike úlohu formy preberá predikát a úlohu látky subjekt. Formálna logika je vďaka Fregemu založená na omnoho širšom a všeobecnejšom chápaní súdu, podľa ktorého súd vzniká spojením funkcie a jej argumentov. Ukázalo sa, že to, čo Aristoteles považoval za elementárnu formu súdu, je z hľadiska Fregeho formalizácie zložený výrok. Veta *Každý človek je smrteľný* je z pohľadu Fregeho logiky implikácia.

3.3 Použitie prostriedkov už existujúcej matematiky

Booleove práce, z ktorých vyrástla tradícia algebraickej logiky, tvorili koncepciu bezprostredne predchádzajúcu Fregeho logiku. Boole zdieľal Fregeho cieľ matematizácie logiky. Prijal však aristotelovské chápanie logiky a na jej matematizáciu sa snažil použiť už existujúcu matematiku – algebru. Booleovým zámerom tak bolo iba prostriedkami algebry zapísať aristotelovskú logiku presnejším spôsobom. Frege na rozdiel od toho odmietol aristotelovský rámec, čím radikálne rozšíril oblasť logiky. Aby túto oblasť matematizoval, vytvoril úplne novú matematickú teóriu, predikátový počet.

4 Záver

Výkladu rôznych aspektov Fregeho diela je v literatúre venovaná značná pozornosť (pozri [5], [7] alebo [10]). Naším cieľom nebolo porovnanie technických prvkov ***logických systémov*** Aristotela, Boolea a Fregeho. Išlo nám o porovnanie ich ***projektov logiky***, chápaných ako vedecko-výskumné programy v zmysle Lakatosa (viď [9]).

Literatúra

[1] Aristoteles: *První analytiky*. Preložil A. Kříž, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1961.

[2] Boole G.: *The Mathematical Analysis of Logic*. Cambridge UP, Cambridge, 1847.

[3] Frege G. (1879): *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Georg Olms, Hildesheim, 1993.

[4] Frege G. (1893): *Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschriftlich abgeleitet*. Volume 1, Olms, Hildesheim, 1962.

[5] Gillies D.: *Frege, Dedekind and Peano on the Foundations of Arithmetic*. Van Gorcum, Assen, 1982.

[6] Kneale W., Kneale M.: *The Development of Logic*. Oxford University Press, Oxford, 1962.

[7] Kolman V.: *Logika Gottloba Frega*. Filosofia, Praha, 2002.

[8] Kvasz L.: *Táles, Pytagoras, Euklides a vznik matematiky ako deduktívnej disciplíny*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 34. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2013, 127–134.

[9] Lakatos I. (1970): *Falsification and the methodology of scientific research programmes*. In The methodology of scientific research programmes. Philosophical Papers of Imre Lakatos, Volume I, Cambridge UP, Cambridge, 1978, 8–101.

[10] Sluga H.: *Gottlob Frege*. Routledge & Kegan Paul, London, 1980.

[11] van Heijenoort J.: *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic 1879–1931*. Harvard UP, Cambridge, Massachusetts, 1967.

Poďakovanie

Príspevok je súčasťou grantovej úlohy VEGA 1/0874/12 *Historické a filozofické aspekty porozumenia jazyka matematiky*.

Adresa

Prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
FMFI Univerzity Komenského
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
e-mail: *kvasz@fmph.uniba.sk*

MAYEROVA METODA PRŮMĚRŮ A PROBLÉM ZEMĚPISNÉ DÉLKY

JAROSLAV MAREK

Abstract: The main goal of this article is to draw attention to the effect of randomness and its understanding on the development of statistics. We will explore solving of an overdetermined system of linear equations by average method of Tobias Mayer. Mayer's motivation for the problem of reconciling inconsistent equation was the longitude problem and longitude prize offered by British Queen. Several incredible random events contributed to the competition. We can find the satire of longitude problem in picture Rake progress No 8 of William Hogarth and in Gulliver's Travels of Jonathan Swift.

1 Soutěž o zeměpisné délce

1.1 Vliv finanční motivace a náhody na vědecký pokrok

Motivací Tobiase Mayera pro vytvoření metody lunárních vzdáleností je obrovská odměna přislíbená anglickou královnou za řešení problému určování zeměpisné délky. Při zpracování dat, sloužících k modelování pohybu měsíce, potřebuje Tobias Mayer řešit nekonsistentní soustavu lineárních rovnic. Přitom si uvědomuje vliv náhody na řešení získávané selekcí rovnic. Mayer se stává prvním matematikem, který hledá řešení úlohy lineární regrese a který se snaží pochopit vliv náhodných chyb měření na získané odhady.

Vypsání soutěže podnítila náhoda, když po chybě při stanovení zeměpisné délky ztroskotají v r. 1707 čtyři anglické válečné lodě. Přes obrovské úsilí vědců se nepodaří řešení založené na časomíře vesmíru předložit. Vítězem soutěže se stane hodinář John Harrison. V průběhu soutěže dojde k mnoha nečekaným událostem způsobených náhodou a finanční motivací účastníků soutěže. Soutěž má své dozvuky v literatuře a výtvarném umění. Řešení úlohy má být skryto v obraze Williama Hogartha.

Mayerova metoda průměrů se spolu s Boškovićovou, Lambertovou a Laplaceovou metodou řadí k prvními statistickým pokusům o řešení úlohy lineární regrese, viz [1], [2], [4] dnes obvykle řešené jen metodou nejmenších čtverců. Mayerova metoda může být vhodně využita při výuce lineární regrese a programování.

1.2 Edikt o zeměpisné délce

Osud Johna Harrisona, vynálezce chronografu a vítěze soutěže, byl zfilmován ve filmu Longitude. Okolnosti, které vedly anglickou královnu Annu I. k vypsání soutěže, průběh soutěže popisuje D. Sobelová v knize [3].

Soutěž byla vypsána poté, co anglická flotila se Sirem Clowdisleym na lodi Association mylně stanovila zeměpisnou délku a ztroskotala u ostrovů Scilly cca dvacet mil od jihozápadního cípu Anglie. Oné mlhavé noci 22. října 1707 se tyto ostrůvky staly náhrobním kamenem bez nápisů pro dva tisíce mužů z vojska Sira Shovella Clowdisleyho. Jen dva muži se dostali na břeh živí. Jedním z nich byl sám Sir Clowdisley. Jakmile však omdlel vyčerpáním na pobřežním písku, údajně našla jeho tělo jakási místní žena, která prohledávala pláž. Zalíbil se jí smaragdový prsten na jeho ruce. Její chtíč a jeho vyčerpání byly pomocníky, díky nimž admirála bez obtíží zavraždila. Pláž se dnes nazývá Land's End. Viz [3], str. 17 a 18 (zkráceno a upraveno).

Ztráta flotily jen korunovala dlouhou ságu mořeplaveckých strastí, které námořníky doprovázely předtím, než dokázali stanovit polohu podle zeměpisné délky. Tato ztráta, k níž došlo v bezprostřední blízkosti námořních center Anglie, katapultovala problém stanovení zeměpisné délky na čelné místo žebříčku státního zájmu. Stín duší námořníků Sira Clowdisleyho uspíšil vydání slavného Ediktu o zeměpisné délce z roku 1714, v němž byla přislíbena odměna 20 000 liber sterlingů za vyřešení problému zeměpisné délky s přesností na půl stupně hlavní kružnice, 15 000 liber sterlingů za metodu s přesností na dvě třetiny stupně a 10 000 liber za metodu s přesností na jeden stupeň. Viz [3], str. 21 a 50 (zkráceno a upraveno).

8. července 1714 ve Westminsterském paláci na zasedání vytvořené parlamentní komise čte Edmond Halley expertní posudek Sira Isaaca Newtona. Viz [3], str. 49. V referátu Newton shrnul existující prostředky pro měření zeměpisné délky a prohlásil o nich, že veškeré jsou teoreticky správné ale obtížně proveditelné. *Jedním (postupem) je přesné měření času hodinami, avšak z důvodu pohybu lodi, teplotních odchylek, změn vlhkosti a rozdílu v zemské přitažlivosti na rozdílných zeměpisných šířkách nebyly dosud takové hodiny vyrobeny a ani s největší pravděpodobností nebudou.*

Podle tehdejších znalostí a přesvědčení mohla odpověď přijít pouze z oblohy, tedy z časomíry vesmíru, a nikoliv z obyčejných kyvadlových hodin. Aby si jejich strůjce zasloužil cenu 20 000 liber, nemohli by se od přesného času odchýlit o více než 3 sekundy za 24 hodin. Byla ustanovena Rada pro zeměpisnou délku. V té se sešli vědci, námořní důstojníci a vládní úředníci – jejich úkolem bylo dohlížet na udílení ceny. Členem Rady se stává i člen profesorského sboru Cambridge Isaac Newton (4. 1. 1643 – 31. 3. 1727). Tato rada podle Ediktu mohla udílet odměny pro financování nadějných nápadů vedoucích k řešení. Viz [3], str. 50 až 53.

Díky Newtonem formulovanému univerzálnímu zákonu gravitace byly pohyby Měsíce lépe pochopeny a snáze se daly předvídat. Nakonec se astronomům podařilo vytvořit pilíře metody lunárních vzdáleností: stanovili pozice hvězd a studovali pohyb Měsíce. Složitost oběžné dráhy Měsíce mařila pokrok v určování vzdáleností mezi Měsícem a Sluncem, rovněž mezi Měsícem a hvězdami. Německý kartograf Tobias Mayer (17. 2. 1723 – 20. 2. 1762) vytvořil soustavu lunárních tabulek pro umístění Měsíce ve dvanáctihodinových intervalech. Neocenitelnou pomoc mu poskytla spolupráce s Leonardem Eulerem (15. 4. 1707 – 18. 9. 1783), který zjednodušil vzájemné pohyby Slunce, Země a Měsíce do soustavy rovnic. Mayer se nikdy nezmýlil v úhlové vzdálenosti více než o 1,5 minuty. Mayer se ocenění nedožil, jeho žena obdržela odměnu ve výši 3000 liber. Dalších 300 liber obdržel Euler za své základní teorémy. Těžkopádná metoda lunárních vzdáleností vyžadovala příliš mnoho astronomických pozorování, konzultací s efemeridami a opravných výpočtů, což představovalo příliš mnoho kroků, během nichž mohlo dojít k pochybení. Viz [3], str. 83.

1.3 Skandály v průběhu soutěže

Průběh celé soutěže je poznamenán několika skandály a dlouhé snažení vědců je zesměšňováno.

Dne 10. 12. 1713 v listu Englishman publikují dva profesoři matematiky v Cambridge William Whiston a Humphrey Ditton tzv. „Novou metoda určování zeměpisné délky na moři i na souši.” Metoda spočívala na výstřelech – viditelných na vzdálenost 100 mil – z děl na lodích strategicky zakotvených na signálních stanovištích. Polohu lze určit ze zpoždění mezi spatřením ohnivého zábelsku a zvukem výbuchu. Viz [3], str. 45.

Jednou z metod (r. 1687) je „Prášek souznění” Sira Kenelma Digbyho. Viz [3], str. 41: *Vše spočívalo v nalodění zraněného psa na palubu lodi, na břehu musela zůstat o úspěšnosti metody přesvědčená osoba, která denně v poledne namáčela obvaz ze psí* *rány do roztoku prášku. Pes v reakci na tento úkon měl štěkat a tak poskytnout kapitánovi klíč k určování času. Kapitán mohl porovnat čas na lodi s časem v Londýně a stanovit zeměpisnou délku.*

Mapováním oblohy se zabývá Královská observatoř v čele s Johnem Flamsteedem (19. 8. 1646 – 31. 12. 1719), který výsledky čtyřicetiletého měření stále neuvádí. Newton a Halley tajně získávají Flamsteedovy záznamy a pirátsky je zveřejňují jako hvězdný katalog v r. 1712. Flamsteed shromažďuje 300 ze 400 výtisků a tyto pálí. Viz [3], str. 54.

Před vydáním Maskelynova almanachu noviny sarkasticky uvádí, že problém zeměpisné délky je již vyřešen a jeho autor, známý malíř William Hogarth (1697–1764), ho znázornil v obraze Proměna zhýralce na stěnu své cely č. 55 ústavu pro duševně choré Bedlam Asylum (dnes Bethlem Royal Hospital v Londýně). Viz [3], str. 75 a viz obr. 1, náčrtek na stěně.

Obrázek 1.: Obraz Rake’s progress No. 8 od W. Hogartha, viz [6].

Je otištěna báseň Hvězdný závod, viz [3], str. 94, která komentuje průběh soutěže:

Dva měsíce minuly, čas plyne
a deset mužů vrhlo se hrdinně
do zkoušky svého umění i sil,
by Flamsteedův se vrchol přiblížil
Však opatrně, pane Maskelyne,
vy prohnaný své vědy harlekýne,
nemyslete, že zvítězíte klamem ...
Vždyť velkým soudcem, jehož zatím cena,
je spravedlivá příroda vznešená.

Odkaz na soutěž lze vidět i v Gulliverových cestách (viz [4], str. 299, překlad A. Skoumal), kde kapitán Lemuel Gulliver říká: *Dožil bych se objevu zeměpisné délky, perpetua mobile, univerzálního léku a mnoha jiných vynálezů, zdokonalených v nejvyšší možné míře.*

Nyní se seznámíme s výsledky soutěže uvedené v [3].

Stane se ale to, co Newton považoval za nemožné. John Harrison komisi předkládá chronograf s požadovanou přesností. Vítězství nakonec nepatří hvězdám, ale času. A to přestože členové komise měnili pravidla soutěže, kdykoli to uznali za vhodné, aby tak upřednostnili astronomy před mechaniky.

Po smrti Newtona se stává předsedou Rady pro zeměpisnou délku Nevil Maskelyne, pátý královský astronom. Ten neváhá učinit cokoliv, aby prosadil svého chráněnce Tobiase Mayera a zabránil vítězství Johna Harrisona. Člen Rady královský astronom James Bradley uvedl: *Kdyby nebylo toho zpropadeného mechanika a zatracených hodinek, už dávno jsme si mohli s panem Mayerem rozdělit hlavní cenu.* Viz [3], str. 99. Při testovacích plavbách byly hodiny úmyslně poškozovány (uplacení nosiči je upustili z prudkého schodiště u budovy admirality, na loď byly přepraveny po neodpružené káře po hrbolatých ulicích Londýna, na lodi byly umístěny na slunci, došlo k poškození hodin při natahování). *Někteří tvrdili, že přístroj uhranula Maskelynova zlá vůle, nebo že jej poškodil Maskelyne sám hrubým zacházením při natahování.* Viz [3], str. 116.

Nejvyšší odměnu v soutěži nakonec přece jen získává John Harrison. Jeho chronometry H-1, H-2, H-3 a H-4 byly schopny dosáhnout velké přesnosti měření času. Harrison uspěl přes všechny překážky s použitím čtvrtého rozměru – časového – ke spojení bodů na trojrozměrném glóbu. Vyrval tajemství orientace hvězdám a uzamkl jej do hodin. Model H-4 dokázal určit zeměpisnou délku s přesností na deset mil – třikrát přesněji než požadovaly stanovy Ediktu. Po jedenaosmdesáti dnech na moři se zpozdil o pouhých pět sekund. Harrison získal od Rady 8 750 liber teprve v červnu 1773 po přímluvě krále Jiřího III., který osobně prováděl kontrolu funkce modelu H-5. Po deseti týdnech pozorování mohl konstatovat, že H-5 se ukázal být schopným měřit s odchylkou jedné třetiny sekundy za den. Zajímavá je i historie chronometrů Harrisonova následovníka Kendalla. Jeho model K-1 měl s sebou na své třetí výpravě Cook. Podle pověsti ve stejném okamžiku, kdy byl kapitán Cook v roce 1779 na Havajských ostrovech zavražděn, se model K-1 zastavil. Model K-2 se dostal na palubu lodi Bounty a po vzpouře zůstává na ostrově Pitcairn. Viz [3], str. 121–124.

V r. 1791 Východoindická společnost vydává pro své kapitány nový formulář palubního deníku, kde byly speciálně předtištěny stránky s kolonkou „zeměpisná délka podle chronometru." V roce 1828 je Výnos o zeměpisné délce odvolán. Paradoxně se členové rozpuštěné Rady stávají členy komise pro testování a schvalování chronometrů pro lodě královského veličenstva. Viz [3], str. 133 a 134.

Pravomoc k disponování s finančním fondem udělala z Rady pro zeměpisnou délku snad první oficiální agenturu pro výzkum a rozvoj. Radu pro zeměpisnou délku je možno považovat za první grantovou agenturu v historii (se všemi současnými nešvary). Ačkoliv to nikdo při jejím vzniku nemohl předvídat, Rada ve své základní podobě vydržela přes sto let. Do definitivního rozpuštění v roce 1828 rozdělila prostředky ve výši přes 100 000 liber. Paradoxně všichni členové Rady pro zeměpisnou délku – zarytí odpůrci určování zeměpisné délky pomocí měření času – se stávají rozhodnutím parlamentu členy Komise pro testování a vývoj chronografů pro lodi Jeho veličenstva. Viz [3], str. 51, 134.

V článku [5] je popsána metoda, kterou se snaží využít pro navigaci speciální složky Armády ČR. Autor popisuje metodiku pro určení odhadu polohy topocentra a uvádí na str. 80: *Zanedbáme-li rušivé gravitační vlivy Slunce a planet, pohybuje se Měsíc po elipse (v jednom ohnisku se nachází barycentrum soustavy Země – Měsíc, barycentrum leží 4671 km od těžiště Země) s hlavní poloosou 384 400 km, výstředností e = 0,0549005. Sklon roviny dráhy Měsíce vzhledem k rovině ekliptiky je i = 5 o08'43,4". Důsledkem libračních pohybů se mění obrys Měsíce, což ovlivňuje přesnost měření. Librace v délce je způsobena tím, že úhlová rychlost Měsíce není konstantní vlivem výstřednosti dráhy. Librace v šířce je dána rovinou měsíčního rovníku, která je skloněna vzhledem k ekliptice o úhel 1,5 stupně. Denní (paralaktická) librace je důsledkem rotace Země. Fyzická librace (cca 2' až 3') je dána gravitací Země a nehomogenností Měsíce.*

2 Mayerova metoda řešení nekonsistentní soustavy lineárnich rovnic

2.1 Pozorování kráteru Manilius a soustava lineárních rovnic

Tobias Mayer se při vývoji metody lunárních vzdáleností potýká s problémem řešení soustav rovnic, když má k dispozici větší počet rovnic než je počet neznámých. V [2] je uvedeno 27 Mayerových rovnic sestavených z pozorování kráteru Manilius na Měsíci:

číslo	Rovnice	skupina	číslo	rovnice	Skupina
1	$\beta - 13^o10' = 0{,}8836\ \alpha\ - 0{,}4682\ \alpha \sin\theta$	I	15	$\beta - 13^o58' = 0{,}3608\ \alpha + 0{,}9326\ \alpha \sin\theta$	III
2	$\beta - 13^o8' = 0{,}9996\ \alpha\ - 0{,}0282\ \alpha \sin\theta$	I	16	$\beta - 14^o14' = 0{,}1302\ \alpha + 0{,}9915\ \alpha \sin\theta$	III
3	$\beta - 13^o12' = 0{,}9899\ \alpha\ + 0{,}1421\ \alpha \sin\theta$	I	17	$\beta - 14^o56' = -0{,}1068\ \alpha + 0{,}9943\ \alpha \sin\theta$	III
4	$\beta - 14^o15' = 0{,}2221\ \alpha\ + 0{,}9750\ \alpha \sin\theta$	III	18	$\beta - 14^o47' = -0{,}3363\ \alpha + 0{,}9418\ \alpha \sin\theta$	II
5	$\beta - 14^o42' = 0{,}0006\ \alpha\ + 1{,}0000\ \alpha \sin\theta$	III	19	$\beta - 15^o56' = -0{,}8560\ \alpha + 0{,}5170\ \alpha \sin\theta$	II
6	$\beta - 13^o1' = 0{,}9308\ \alpha\ - 0{,}3654\ \alpha \sin\theta$	I	20	$\beta - 13^o29' = 0{,}8002\ \alpha + 0{,}5997\ \alpha \sin\theta$	III
7	$\beta - 14^o31' = 0{,}0602\ \alpha\ + 0{,}9982\ \alpha \sin\theta$	III	21	$\beta - 15^o55' = -0{,}9952\ \alpha - 0{,}0982\ \alpha \sin\theta$	II
8	$\beta - 14^o57' = -0{,}1570\ \alpha + 0{,}9876\ \alpha \sin\theta$	II	22	$\beta - 15^o39' = -0{,}8409\ \alpha + 0{,}5412\ \alpha \sin\theta$	II
9	$\beta - 13^o5' = 0{,}9097\ \alpha\ - 0{,}4152\ \alpha \sin\theta$	I	23	$\beta - 16^o9' = -0{,}9429\ \alpha + 0{,}3330\ \alpha \sin\theta$	II
10	$\beta - 13^o2' = 1{,}0000\ \alpha\ + 0{,}0055\ \alpha \sin\theta$	I	24	$\beta - 16^o22' = -0{,}9768\ \alpha + 0{,}2141\ \alpha \sin\theta$	II
11	$\beta - 13^o12' = 0{,}9689\ \alpha\ + 0{,}2476\ \alpha \sin\theta$	I	25	$\beta - 15^o38' = -0{,}6262\ \alpha - 0{,}7797\ \alpha \sin\theta$	II
12	$\beta - 13^o11' = 0{,}8878\ \alpha\ + 0{,}4602\ \alpha \sin\theta$	I	26	$\beta - 14^o54' = -0{,}4091\ \alpha - 0{,}9125\ \alpha \sin\theta$	II
13	$\beta - 13^o34' = 0{,}7549\ \alpha\ + 0{,}6558\ \alpha \sin\theta$	III	27	$\beta - 13^o7' = 0{,}9284\ \alpha\ - 0{,}3716\ \alpha \sin\theta$	I
14	$\beta - 13^o53' = 0{,}5755\ \alpha\ + 0{,}8178\ \alpha \sin\theta$	III			

Tabulka 1.: Soustava Mayerových rovnic, viz [2].

2.2 Mayerova metoda průměrů

Pro řešení soustavy nejprve Mayer užil metodu selekce bodů. Vybral 3 rovnice z 27 rovnic a to takovým způsobem, aby se hodnoty koeficientů lišily co nejvíce. To mělo zajistit dobré výsledky neznámých. Volbou rovnic číslo 9, 16, 19 dostal soustavu rovnic:

$$\beta - 13^o5' = 0{,}9097\ \alpha - 0{,}4152\ \alpha \sin\theta,$$
$$\beta - 14^o14' = 0{,}1302\ \alpha + 0{,}9915\ \alpha \sin\theta,$$
$$\beta - 15^o56' = -\ 0{,}8560\ \alpha + 0{,}5170\ \alpha \sin\theta,$$

s výsledkem $\beta = 14^o34'$, $\alpha = 1^o40'$, $\theta = 3^o43'$.

Mayer ovšem vnímá chyby měření a vliv náhody na získaný odhad a dospěje k názoru, že tato metoda je nevyhovující, protože výběr jiných tří rovnic vede k jiným odhadům. Ideální by bylo použít všechny kombinace těchto trojic rovnic a zprůměrovat výsledky; nicméně k tomu by bylo zapotřebí vyřešit $\binom{27}{3} = 2925$ systémů rovnic. Není tedy divu, že Mayer vzdává tento postup díky jeho přílišné pracnosti. Aritmetický průměr všech 2925 řešení je $\beta = 14^o30'$, $\alpha = 1^o35'$, $\theta = 5^o46'$.

Namísto toho rozdělil 27 rovnic do tří skupin po devíti (rozdělení rovnic do skupin je uvedeno v tabulce 1). V každé ze skupin pak rovnice sečetl a vyřešil vzniklé tři rovnice:

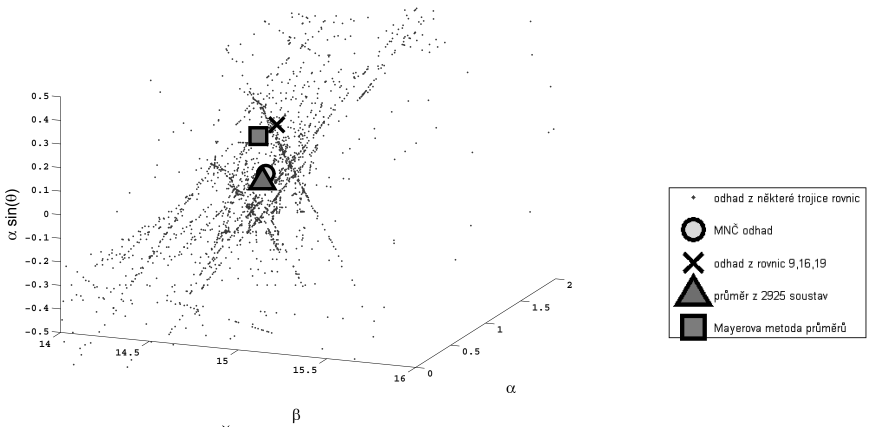
I $\quad \beta - 118^o8' = 8{,}4987\ \alpha - 0{,}7932\ \alpha \sin\theta,$

II $\quad \beta - 140^o7' = -6{,}1404\ \alpha + 1{,}7443\ \alpha \sin\theta,$

III $\quad \beta - 127^o32' = 2{,}7977\ \alpha + 7{,}9149\ \alpha \sin\theta.$

Vyřešením soustavy dospěl k $\beta = 14^o33'$, $\alpha = 1^o\ 30'$, $\theta = -3^o51'$.

Řešení získané metodou nejmenších čtverců je $\beta = 14^o34'$, $\alpha = 1^o\ 30'$, $\theta = -2^o43'$.



Obrázek 2.: Řešení všech 2925 trojic rovnic. Zdroj: vlastní.

3 Závěr

Na studované úloze lze demonstrovat smysl lineární regrese a poukázat na skutečnost, že metoda nejmenších čtverců není jedinou metodou pro hledání přibližného řešení soustavy rovnic. Historická úloha je velmi vhodná při výuce statistiky v informatických oborech. Metoda průměru pro odhadování parametrů se stala velmi populární a používanou až do té doby, než byla nahrazena metodou nejmenších čtverců. Důvod, proč byla tato metoda tak úspěšná, je bezesporu její koncepční i numerická jednoduchost.

Literatura

[1] Hald A.: *A History of Mathematical Statistic (from 1750 to 1930)*. A Wiley interscience Publication, New York, 2000.

[2] Stigler S. M.: *History of Statistic – The Measurement of Uncertainty before 1900*. The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, London, 1986.

[3] Sobelová, D.: *Osamělý genius. Pravdivý příběh J. Harrisona*. Alpress, 1997.

[4] Swift, J.: *Gulliverovy cesty*. Státní nakladatelství krásné literatury, hudby a umění, Praha, 1958.

[5] Fixel, J.: *Možnosti rozšíření astronomické orientace*. In Profesor Josef Vykutil – 90. Sborník příspěvků spolupracovníků a žáků k devadesátinám pana profesora. Hlavní úřad vojenské geografie Praha, Praha, 2002, 79–87.

[6] Wikipedia (The free encyclopedia): *William Hogarth, A Rake's Progress* [online]. Poslední revize provedena 11. 4. 2014 [cit. 30. 4. 2014]. http://en.wikipedia.org/wiki/A_Rake%27s_Progress.

Adresa

Mgr. Jaroslav Marek, Ph.D.
Katedra matematiky a fyziky
Fakulta elektrotechniky a informatiky, Univerzita Pardubice
Studentská 5, 532 10 Pardubice
e-mail: *jaroslav.marek@upce.cz*

ZROZENÍ KOMBINATORIKY V DÍLE JANA CARAMUELA Z LOBKOVIC

MIROSLAVA OTAVOVÁ

Abstract: The most important contribution of Juan Caramuel Lobkowitz (1606–1682) to the development of mathematics is taken the introduction of all fundamental concepts of modern combinatorics in his thesis *Mathesis biceps*. Caramuel, inspired by Cabbala, assesses experiences with steganography and speculative grammar and uses apparatus that he set up in his research into numeration systems.

1 Caramuelovy dispozice a východiska

Ve zpětném pohledu se vybudování kombinatoriky u Jana Caramuela z Lobkovic (1606 Madrid až 1682 Vigevano) jeví jako logické završení jeho celoživotního úsilí. Její výklad publikoval ve věku 63 let ve druhém svazku encyklopedického díla *Mathesis biceps* [4]. Caramuelova motivace však nevyplývala pouze z potřeb rozvoje matematiky, ale vycházela z obecnějších otázek filosofických, které tehdy zaměstnávaly i ostatní velké evropské myslitele. Velice naléhavě byla pociťována nutnost hledat nové paradigma vědeckého poznání v situaci, kdy metafyzické principy selhávaly při řešení problémů, vyvstávajících v novověké společnosti 17. století. Ideálem tehdejší barokní doby bylo vytvoření universálního nástroje zkoumání, jenž bude nejen v souladu s přísnými požadavky racionality, ale přímo ze své podstaty adekvátní struktuře světa.

Pro naplnění této ambice měl Caramuel dobré předpoklady. Jeho otec Vavřinec byl před synovým narozením matematikem na pražském dvoře Rudolfa II. a kromě genetického fondu poskytl Janovi již od útlého dětství příznivé podmínky pro intelektuální rozvoj. Dalším významným vkladem bylo Caramuelovo studium v rodném Španělsku, kde v té době koexistovaly tři kultury – oficiální křesťanská, podprahově přetrvávající arabská a navíc respektovaná židovská minorita. Díky tomu již při studiu filosofie na universitě v Alcale přišel do styku s kabalou, středověkou odnoží hebrejského mysticismu. Byť se poté stal cisterciáckým mnichem a vystudoval teologii na universitě v Salamance, kabala byla od té doby stálou inspirací jeho vlastního myšlení.

Čím mladého matematika kabala přitahovala? Součástí židovské víry je přesvědčení, že svět byl stvořen slovem Božím. Kabala tuto skutečnost dále vykládá a interpretuje ji jako jazykový jev. Jedním z důsledků je, že dokonalý jazyk by byl potenciálně schopen odrážet strukturu celého universa. A protože slova jsou složena z písmen (hebrejská abeceda má 22 souhlásek, které současně slouží k označení číslic), pro studium struktury takového jazyka může být vhodným nástrojem matematika.

Otázka dokonalého jazyka vzbuzovala zájem nezávisle na kabale i v křesťanském prostředí. Na universitách se již od 13. století rozvíjela spekulativní gramatika. Cílem bylo vytvořit ideální mluvnici, jež by postihla logickou strukturu jednotlivých přirozených jazyků. Caramuelovým příspěvkem na tomto poli je *Theologia rationalis* [2], rozsáhlé dílo napsané během jeho pražského pobytu (1646–1656). Vzhledem k našemu tématu je zajímavá jeho část *Grammatica audax* (Odvážná mluvnice), kde již autor implicitně užívá prostředky kombinatoriky při zkoumání počtu všech slabik, které lze v latině vytvořit z písmen abecedy.

Ještě dříve, na samém začátku vědecké dráhy na fakultě v nizozemské Lovani (roku 1638 zde obhájil doktorát teologie) na sebe Caramuel upozornil riskantním krokem. Pod novým názvem *Steganographiae facilis dilucidatio, declaratio etc.* [1] vydal komentovanou edici kontroverzního renesančního spisu benediktina Jana Trithemia z indexu zakázaných knih. Odborné veřejnosti tím legitimně zpřístupnil příručku o teorii šifrování, což v době třicetileté války vzbudilo v Evropě pozornost politických i církevních špiček. Caramuel však především objevil další oblast, kde mohl s úspěchem rozvíjet metody kombinatoriky (viz [5]).

V rušných 40. letech i během již zmíněného pražského pobytu se Caramuel angažoval v politice a duchovní správě, aktivně se účastnil intelektuálního života v Čechách a věnoval se především logické analýze jazyka a možnostem tvorby jazyka umělého, tzv. Metafyzického dialektu. Jeho souborné matematické dílo *Mathesis biceps vetus et nova* [3] a *Mathesis nova* [4] vzniklo až poté, co opustil české země, když byl roku 1657 jmenován biskupem Satrijsko-Campagneské diecéze v jižní Itálii (viz [6]).

2 Kombinatorika v Mathesis biceps

Mathesis biceps je svým rozsahem (přes 1700 stran) i šíří záběru dílo encyklopedické. Z hlediska pozdějšího vývoje je nejcennější částí prvního svazku [3] autorovo originální pojetí aritmetiky a algebry (viz [6] a [7]). Druhý svazek pod příznačným názvem *Mathesis nova* [4] přináší kromě dalších témat systematický výklad kombinatoriky.

*a*MOR	M*a*OR	MO*a*R	MOR*a*
*a*MRO	M*a*RO	MR*a*O	MRO*a*
*a*OMR	O*a*MR	OM*a*R	OMR*a*
*a*ORM	O*a*AM	OR*a*M	ORM*a*
*a*RMO	R*a*MO	RM*a*O	RMO*a*
*a*ROM	R*a*OM	RO*a*M	ROM*a*

Obr. 1: Ukázka anagramu v *Mathesis biceps*

Kombinatoriku Caramuel chápe jako speciální případ aritmetiky. Za zmínku stojí úvodní poznámka věnovaná etymologii pojmu. Kombinatorika sensu stricto (*Combinatoria*) studuje kombinace, v latině spojování do dvojic, tj. zabývá se problémem, kolik dvojic (*binario*) lze určitým přesně definovaným způsobem vytvořit z daného počtu prvků (autor v originále místo o prvcích mluví o věcech). V případě trojic (*ternario*), čtveřic (*quaternario*) atd. by tedy adekvátním pojmem měla být *Contrinatoria, Conquaternatoria* atd. S ohledem na záměr vybudovat obecnou teorii pro libovolnou délku k vytvářené skupiny však autor nadále používá slovo *Combinatoria* v dnešním smyslu.

Důležitou otázkou je definice různých způsobů kombinací, tj. vytváření k-tic z daného počtu prvků. Klasifikace vychází ze scholastické terminologie a uvádí základní tři možnosti: rozlišení podle substance (zohledňuje různost přítomných prvků), podle pozice (zohledňuje jejich uspořádání) a podle opakování. Caramuelova terminologie tedy sice neodpovídá současné, ale uplatněním jedné nebo více uvedených diferencí z dnešního pohledu postupně studuje kombinace, variace i permutace jak bez opakování, tak s opakováním.

TABVLA II.

Definiens, quot sint Binarii, Ternarii, Quaternarii, &c. in quocumque numero rerum possibiles, si considerentur penès solam differentiam Substantiæ.

Rerum Num.	Binarii.	Ternarii.	Quaternarii.	Quinarii.	Senarii.	Septenarii.	Octonarii.	Novenarii.	Denarii.
1	0	0	0	0					
2	1	0	0	0					
3	3	1	0	0					
4	6	4	1	0					
5	10	10	5	1					
6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	33758
19	171	969	3876	11628	27132	50388	75572	92378	82378
20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125950	167950	174756

Obr. 2: Tabulka s počty kombinací

Materiál, na kterém Caramuel ilustruje svůj výklad, známe již z jeho předchozího zkoumání jazyka. Projevuje se nepochybná inspirace kabalou (např. permutace je pouhou matematickou formalizací a zobecněním anagramu – viz obr. 1) a zkušenost steganografie. Největší pozornost je samozřejmě věnována určování počtu *k*-tic v závislosti na uplatněných diferencích. Autor vždy provádí podrobné odvození, v zásadě na principu indukce. Pro pohodlí čtenáře jsou výsledky uspořádány v tabulce (viz obr. 2) a podobně jako v případě tabulky *Scala Pythagorae* (viz [6]) v prvním svazku *Mathesis biceps* Caramuel formuluje jednoduchá pravidla, jak hodnoty v jednotlivých polích spolu souvisí a jak lze tabulku dále konstruovat. V této podobě potkáme i princip Pascalova trojúhelníka.

V knize najdeme očekávané souvislosti s teorií šifrování, spekulativní gramatikou a studiem umělých jazyků. Caramuel např. přesně vyčíslil počet všech různých, maximálně dvacetipísmenných slov, která lze vytvořit z 23 znaků latinské abecedy (je vyjádřen číslem v desítkové soustavě o 28 cifrách). Kombinatorika je dále aplikována v geometrii, kde umožňuje mj. přehledné řešení úvah o vztazích vnitřních úhlů trojúhelníka, a možná trochu překvapivě i v etice, metafyzice a teologii.

3 Caramuelova odpověď na klíčovou otázku doby

Široká škála uplatnění, v níž Caramuel prezentoval svoji novou nauku, dosvědčuje, že pro něj kombinatorika nebyla pouze dalším odvětvím matematiky. Podle Caramuela měla matematiku lépe disponovat, aby se stala univerzálním nástrojem poznání, jazykem, jenž je schopen v duchu kabaly plně zrcadlit strukturu stvoření. Snaha nalézt jednotící princip a sjednotit roztříštěné lidské poznání byla v té době společná více myslitelům. Připomeňme zde Caramuelova vrstevníka Jana Ámose Komenského (1592–1670), jenž svým konceptem nové vědy, již nazývá pansofií, sledoval stejný cíl, postižení veškerenstva a nápravu lidských věcí. Jakkoli se plány obou mužů ukázaly být utopií, Komenského pansofické projekty dnes historikové považují za významný vývojový stupeň raně novověkého encyklopedismu (srv. [8]) a Caramuelovo pojetí matematiky jako dokonalého jazyka bylo spolu s principem kompozicionality nosným programem celé novověké přírodovědy.

Literatura

[1] Caramuel z Lobkovic J.: *Steganographiae facilis dilucidatio, declaratio etc*. Coloniae Aggripinae, 1635.

[2] Caramuel z Lobkovic J.: *Theologia rationalis sive in auream angelici doctoris summam meditationes, notae et observationes etc*. Francofurti, 1654.

[3] Caramuel z Lobkovic J.: *Mathesis biceps vetus et nova*. Campaniae, 1667.

[4] Caramuel z Lobkovic J.: *Mathesis nova*. Campaniae, 1669.

[5] Otavová M.: *Barokní matematika u Jana Caramuela z Lobkovic*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 32. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2011, 227–230.

[6] Otavová M.: *Jan Caramuel z Lobkovic a jeho Mathesis biceps*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 33. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2012, 233–236.

[7] Otavová M.: *Pojetí aritmetiky a algebry u Jana Caramuela z Lobkovic*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 34. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2014, 149–152.

[8] Sousedík S.: *O co šlo?: Články a studie z let 1965–2011*. Vyšehrad, Praha, 2012.

Poděkování

Za laskavé pořízení fotokopií z díla Jana Caramuela z Lobkovic v majetku Královské kanonie premonstrátů na Strahově děkuji pracovnici klášterní knihovny Mgr. Hedvice Kuchařové, Ph.D., z oddělení starých tisků a Fr. Zikmundu Davidu Šromovi, O.Praem.

Adresa

Miroslava Otavová, prom. mat.
Katedra matematiky VŠE
Ekonomická 957
148 00 Praha 4
e-mail: *otavova@vse.cz*

MEZI MATEMATIKOU A FILOZOFIÍ: POZNÁMKY K DOPISU GERBERTA Z REMEŠE KONSTANTINOVI Z FLEURY

MAREK OTISK

Abstract: This paper deals with the letter of Gerbert of Rheims addressed to his friend, co-operator and perhaps pupil Constantine of Fleury. This letter is reaction to the period debate on conversion of three-membered numerical sequences arranged according to a certain ratio in the three same numbers. Gerbert, following Boethius's *Introduction to arithmetic*, vigorously delimits the non-systematic method that was probably commonly used, however without respecting the nature of numbers, metaphysical hierarchy of relationships between the numerical ratios and ignoring the Boethius's rules of conversions.

1 Gerbertův dopis Konstantinovi – *Komentář k Boethiovu Úvodu do aritmetiky* II, 1

1.1 Gerbert (Silvestr II.)

Osobnosti Gerberta z Remeše (narozen před polovinou 10. stol., zemřel 12. 5. 1003; zvaného také z Aurillacu, z Bobbia či z Ravenny, známý rovněž pod svým papežským jménem Silvestr II., papežem byl v letech 999–1003) se věnuje ve světovém měřítku stále větší pozornost. Tento nevšední vzdělanec, politik, arcibiskup i papež udivoval již své současníky dobově nezvyklou akribií ve svobodných uměních, zvláště pak v oblasti *mathésis*, tj. umění *quadrivia*, čili matematických disciplín, pod něž byly již od antiky zařazovány aritmetika, geometrie, hudba a astronomie. Mnoho okolností pak způsobilo, že ještě během svého života a ve větší míře pak po své smrti začal být spojován s temnými ďábelskými silami, které mu měly otevřít brány k porozumění nejen obtížné a pro mnohé tehdejší učence nesrozumitelné látce, ale také k strmé cestě církevními úřady až na nejvyšší post katolické církve.

Dnes je Gerbertovi věnována pozornost především v historických kruzích, neboť kupř. jeho pečlivě shromažďovaná korespondence skýtá ilustrativní doklad složitých politických vztahů, vazeb, pletich a intrik, které v poslední čtvrtině 10. století rámovaly mocensko-politické dění (především nástup Kapetovců na francouzský trůn či potíže i úspěchy ottonské císařské dynastie). Stranou pozornosti současných badatelů na poli dějin vědy však nezůstává ani Gerbertův takřka všude patrný vliv na změnu způsobu pěstování svobodných umění (především pak matematických disciplín) na sklonku 10. století – z nejznámějších zde stačí zmínit prvotní uvedení západoarabských číslic do latinského křesťanského světa, patrně také z arabských kořenů rostoucí proměnu provádění matematických početních operací s využitím sloupcového deskového abaku, principiální proměnu zájmu o astronomickou látku, včetně důrazu na aktivní pozorování astronomických jevů na nebi (rovněž velmi pravděpodobně inspirováno Gerbertovým seznámením se s arabským způsobem provozování astronomie), konstrukce několika časoměrných přístrojů či varhan a v neposlední řadě (spíše sporný) podíl na užívání astrolábu v latinském západním světě před rokem 1000.

1.2 *Saltus Gerberti*

Z Gerbertovy poměrně rozsáhlé tvorby se zde pozornost zaměří na jeden z jeho tzv. vědeckých listů, který napsal svému příteli Konstantinovi z Fleury, patrně žáku či spolupracovníkovi z Remeše. Jedná se o dopis (editorem textu N. Bubnovem) nazvaný *Scholium ad Boethii Arithmeticam Institutionem l. II., c. 1* (*Komentář k Boethiovu Úvodu do arithmetiky II, 1*), jehož doba vzniku se odhaduje na konec 70. let 10. století, a v němž Gerbert podrobně popisuje způsoby převodů tříčlenných posloupností uspořádaných podle určitých poměrů na tři stejné hodnoty. Tento postup byl již v průběhu středověku pojmenován jako *saltus Gerberti*, tedy *Gerbertovy přeskoky*, neboť prezentovaná cesta od pětičtvrtinového násobku (tříčlenná posloupnost daná superpartikulárním poměrem 5 : 4, tzn. např. hodnoty 16, 20, 25) k rovnosti čili stejnosti (tj. k nejzákladnějšímu a prvotnímu poměru 1 : 1, který je dán v tříčlenné posloupnosti třemi stejnými hodnotami, zde 1, 1, 1) je provedena pomocí čtrnácti kroků, během nichž se Gerbert nezřídka vrací k dřívějšímu stadiu, aby mohl postupovat dále (blíže viz kap. 2.1 tohoto textu).

Pro tuto studii je ale zajímavá ještě další skutečnost – hned na čtyřech místech svého dopisu (viz [16], 31–35) Gerbert upozorňuje čtenáře, že pouze tímto postupným sledem jednotlivých kroků, návratů, odboček a následných přesunů lze postupovat řádně a nikoli zmateně (*confuse*). Ostatně Gerbert není v tomto ohledu sám – velmi podobně se v totožné době vyjadřuje i Abbo z Fleury ve svém komentáři k dílu *Calculus* od Viktorína Akvitánského (viz [1], 86). Z toho se zdá být zřejmé, že v poslední čtvrtině 10. století byl rozšířen i odlišný způsob transformace tříčlenných číselných posloupností, který patrně může reprezentovat krátké pojednání zvané *De superparticularibus* (viz [16], 297–299), jež je nejčastěji autorsky připisováno Notkerovi z Lutychu.[1]

1.3 Aritmetika v raném středověku

Celá uvedená problematika má svůj původ ve vlastním rozumění aritmetice v raném středověku, které plně odpovídalo pozdně antickému novopýthagorejskému vnímání aritmetické látky, jež u některých matematiků sloužila především jako propedeutika k vyššímu způsobu poznávání reality – tj. k filozofii. Za všechny řecky píšící novopýthagorejce lze jmenovat Níkomacha z Gerasy a Theóna ze Smyrny, jehož dílo (*Matematické znalosti užitečné k četbě Platóna*) už svým názvem dává jasně na vědomí, k čemu má probíraná látka sloužit, byť to není vždy na první pohled patrné.[2]

Pozdně antičtí křesťanští (či patrističtí) myslitelé byli v mnoha případech absolventy římských vzdělávacích institucí, kde se v rámci výuky svobodných umění seznámili zejména s níkomachovským proudem aritmetických studií. Jejich záměrem pak nebylo aktivně rozvíjet matematické problémy *sui generis*, nýbrž předávat aritmetiku jako teorii čísla a nauku o číslech a jejich vlastnostech formou klasifikačních, přehledových a pedagogicky snadno osvojitelných výčtů. Tato problematika byla poté aplikována v jiných oborech, což u křesťanských vzdělanců mnohdy znamenalo především snahu ukázat, jak dokáží čísla a znalost jejich vlastností napomoci k lepšímu porozumění biblické zvěsti či

[1] Srov. např. [11], 118, resp. 125 nebo [15], 264–265.

[2] Úryvky z obou děl jsou v češtině k dispozici v [29], 438–481. Na zařazení této tradice do kontextu antického pěstování aritmetiky srov. také [29], 46–49.

přímo k snadnější a zřetelnější cestě k poznání nejvyšší moudrosti, tj. samotného Boha, resp. jak člověku usnadnit cestu ke spáse.

Názorně to ve svém díle dokládá Aurelius Augustinus, který např. ve spise *O Boží obci* na několika místech vysvětluje číselné údaje z Písma svatého. Pro ilustraci lze zmínit vysvětlení počtu dní, v nichž Bůh stvořil svět, tato hodnota je dána dokonalostí čísla 6. Charakteristiku dokonalého čísla přebírá z aritmetických vlastností čísel, která jsou mimo jiné rozlišována na čísla nadměrná, podměrná a dokonalá, přičemž kritériem pro jejich členění je vztah mezi součtem dělitelů daného čísla a samotným číslem. Za dělitele je vždy nutno považovat pouze takové číslo, které poskytne výsledný podíl v podobě přirozeného čísla a do součtu takových dělitelů se zahrnuje i jednička, avšak samotné dělené číslo nikoli. Pokud je součet takto vymezených dělitelů větší než dělenec, pak se jedná o nadměrné čísla, neboť části (tj. dělitelé) dávají v souhrnu větší hodnotu než je celek děleného čísla (např. číslo 18, které lze dělit čísly 1, 2, 3, 6 a 9, takže součet dělitelů je větší než dělenec). Podměrné číslo vykazuje opačný rys, tedy součet dělitelů dělence, poskytující výsledek v podobě přirozeného čísla, je menší než samotný dělenec (např. číslo 8, které lze dělit čísly 1, 2 a 4). Dokonalých čísel je velmi málo. Jejich dokonalost je dána tím, že součet částí takového čísla (tj. dělitelů) se přesně rovná celku (tj. dělenci). Nejmenším z nich je právě číslo 6, jelikož je dělitelné čísly 1, 2 a 3. Bůh tedy při tvorbě veškerenstva zohlednil tuto aritmetickou dokonalost čísla 6 a stvořil vše právě v šesti dnech.[3]

Podobným způsobem pak Augustin vysvětluje ve spise *De doctrina christiana* důležitost čísla 40, které je v Bibli přítomno na mnoha místech (např. postní doba, počet dní deště u potopy či počet let putování židovských kmenů pouští atd.). Dané číslo vyjadřuje mnohost a vzájemné propojení Stvořitele a stvořeného. Hodnota 40 je totiž součinem sudě sudé čtyřky s desítkou jakožto součtem trojky a sedmičky, tzn. 40 = 4 x (3 + 7). Čtyřka symbolizuje mj. čtyři prvky, z nichž je stvořen tento svět a jímž je také dána dokonalost uspořádání (světové strany) i pravidelnost dění v něm (roční období), trojka je symbolem Boha a jeho trojjediné povahy, sedmička pak vytváří spojení mezi Bohem a světem, tedy samotný stvořitelský akt (6 dní stvoření + sedmý den odpočinku).[4]

---

[3] Viz [2], 10, 30; česky 589: „Numerus quippe senarius primus completur suis partibus, id est sexta sui parte et tertia et dimidia, quae sunt unum et duo et tria, quae in summam ducta sex fiunt. Partes autem in hac consideratione numerorum illae intellegendae sunt, quae quotae sint dici potest; sicut dimidia, tertia, quarta et deinceps ab aliquo numero denominatae. Neque enim exempli gratia quia in nouenario numero quattuor pars aliqua eius est, ideo dici potest quota eius sit; unum autem potest, nam nona eius est; et tria potest, nam tertia eius est. Coniunctae uero istae duae partes eius, nona scilicet atque tertia, id est unum et tria, longe sunt a tota summa eius, quod est nouem. Item que in denario quaternarius est aliqua pars eius; sed quota sit dici non potest; unum autem potest; nam decima pars eius est. Habet et quintam, quod sunt duo; habet et dimidiam, quod sunt quinque. Sed hae tres partes eius, decima et quinta et dimidia, id est unum et duo et quinque, simul ductae non complent decem; sunt enim octo. Duodenarii uero numeri partes in summam ductae transeunt eum; habet enim duodecimam, quod est unum; habet sextam, quae sunt duo; habet quartam, quae sunt tria; habet tertiam, quae sunt quattuor; habet et dimidiam, quae sunt sex; unum autem et duo et tria et quattuor et sex non duodecim, sed amplius, id est sedecim, fiunt. Hoc breuiter commemorandum putaui ad commendandam senarii numeri perfectionem, qui primus, ut dixi, partibus suis in summam redactis ipse perficitur; in quo perfecit deus opera sua." Na uvedenou klasifikaci čísel viz také např. [23], 36–44; [29], 447–451; [21], 265; [18], 288–293 či [12], 135.

[4] Viz [3], 2, 16, česky 99–100: „Numerorum etiam imperitia multa facit non intellegi translate ac mystice posita in scripturis. Ingenium quippe, ut ita dixerim, ingenuum non potest nisi mouere quid sibi uelit quod et Moyses et Helias et ipse Dominus quadraginta diebus ieiunauerunt. Cuius actionis figuratus quidam nodus nisi huius numeri cognitione et consideratione non soluitur. Habet enim denarium quater tamquam cognitionem omnium

Aritmetika je takto v raném křesťanství chápána jako umění, jež poskytuje lepší pochopení reality na základě zjevené pravdy Boží. Augustin to v díle *De libero arbitrio* vyjádřil naprosto explicitně:

Pohleď na nebe, zemi i moře a na vše, co je v nich, ať už to září shora nebo se hemží po zemi, ať to létá nebo plave; všechno má své tvary, protože má své části v číslech; odejmi jim to a nebudou ničím. Od koho tedy pocházejí, ne-li od toho, od koho je číslo? Vždyť přece jejich bytí trvá jen natolik, nakolik jsou tyto existence vyjádřitelné číslem.[5]

Právě v tomto duchu je patrně nutno rozumět i kontextu Gerbertova dopisu Konstantinovi. Jelikož tento svět je uspořádán podle číselných poměrů, jak o tom hovořili již pýthagorejci[6] a Platón,[7] vše bylo původně v Boží mysli jako číselné vztahy,[8] které se stvořitelským aktem realizují v hmotné realitě, musí být cestou k pochopení tohoto světa pochopení číselných poměrů a vzájemných vztahů mezi nimi.

Středověku zprostředkoval přehledný vhled do této problematiky především Boethius, jehož volný překlad Níkomachova *Úvodu do aritmetiky* mj. popisuje vztahy mezi číselnými posloupnostmi. Čísla v relaci k jiným číslům mohou zastávat buď vztah rovnosti či stejnosti (např. 12 a 12) nebo vztah nerovnosti, nestejnosti (např. 6 a 12). U nerovnosti je pak rozlišeno celkem 5 možných vztahů mezi čísly:

1. násobky (tj. např. čísla 6, 12, 24, kde se jedná o dvojnásobky, tj. poměr 2 : 1),
2. superpartikulární čísla (např. čísla 8, 12, 18, tj. půldruhanásobky, poměr 3 : 2),
3. superparcientní čísla (např. čísla 9, 15, 25, tj. pětitřetinový násobek, poměr 5 : 3),
4. superpartikulární násobky (např. 4, 10, 25, tj. dvouapůlnásobek, poměr 5 : 2),
5. superparcientní násobky (např. čísla 9, 24, 64, tj. osmitřetinový násobek, poměr 8 : 3).[9]

Tyto nerovné vztahy mezi čísly tvoří základní schéma uspořádání tohoto světa a lze z nich odvodit celou řadu dalších tezí o vlastnostech čísel (např. o vztahu k různým figurálním číslům či k nauce o harmoniích)[10] i o důležitosti transformace nerovnosti na

---

rerum intextam temporibus. Quaternario namque numero et diurna et annua curricula peraguntur, diurna matutinis, meridianis, uespertinis nocturnis que horarum spatiis, annua uernis, aestiuis, autumnalibus hiemalibus que mensibus. A temporum autem delectatione, dum in temporibus uiuimus, propter aeternitatem in qua uiuere uolumus, abstinendum et ieiunandum est, quamuis temporum cursibus ipsa nobis insinuetur doctrina contemnendorum temporum et appetendorum aeternorum. Porro autem denarius numerus creatoris atque creaturae significat scientiam; nam trinitas creatoris est, septenarius autem numerus creaturam indicat propter uitam et corpus. Nam in illa tria sunt, unde etiam toto corde, tota anima, tota mente diligendus est deus; in corpore autem manifestissima quattuor apparent, quibus constat, elementa. In hoc ergo denario dum temporaliter nobis insinuatur, id est quater ducitur caste et continenter a temporum delectatione uiuere, hoc est quadraginta diebus ieiunare, hoc lex, cuius persona est in Moyse, hoc prophetia, cuius personam gerit Helias, hoc ipse Dominus monet, qui tamquam testimonium habens ex lege et prophetis medius inter illos in monte tribus discipulis uidentibus atque stupentibus claruit."

[5] [4], 2, 16, česky 185: „Intuere caelum et terram et mare et quaecumque in eis uel desuper fulgent uel deorsum repunt uel uolant uel natant. Formas habent quia numeros habent; adime illis haec, nihil erunt. A quo ergo sunt nisi a quo numerus? Quandoquidem in tantum illis est esse in quantum numerosa esse."

[6] V českém jazyce viz blíže např. [6] nebo [28], 71–125.

[7] Samozřejmě jde především (ale ne výhradně) o dialog *Timaios* – viz [25].

[8] Srov. např. [9], 14.

[9] Blíže viz [23], 44–64; [9], 55–79; [21], 279–282; [18], 290–295; [12], 136–138, ale také např. [1], 116–121.

[10] Viz např. [23], 112–147 nebo [9], 153–224. V češtině srov. např. [20].

rovnost, což je jinými slovy cesta od stvořeného k Stvořiteli, jak tomu rozuměl již Augustin nebo Boethius a v návaznost na jejich odkaz i myslitelé konce 10. století, včetně Gerberta z Remeše.[11]

2 Non confuse, sed ordinate

2.1 Gerbert z Remeše a Abbo z Fleury

Gerbert v dopise Konstantinovi (*Scholium ad Boethii Arithmeticam Institutionem l. II., c. 1*) třikrát připomíná, že chce-li být člověk úspěšný při provádění převodů číselných posloupností, musí následovat pravidla, která zformuloval ve svém aritmetickém díle Boethius. V poslední kapitole první knihy tohoto spisu Boethius uvedl tři pravidla, podle nichž vznikají z prvotní rovnosti všechny typy nerovností (tj. nejprve násobné poměry, pak superpartikulární poměry, následně superparcientní poměry, po nichž lze pokračovat k násobným superpartikulárním a násobným superparcientním poměrům). Tato pravidla mají poměrně jednoduchou podobu; převádíme-li posloupnost tří čísel, pak stačí vědět, že:

[P1] první člen druhé posloupnosti se rovná prvnímu členu výchozí posloupnosti;
[P2] druhý člen druhé posloupnosti je součtem prvního a druhého členu výchozí posloupnosti;
[P3] třetí člen druhé posloupnosti odpovídá součtu prvního, dvakrát druhého a třetího členu první posloupnosti.[12]

Hned v další kapitole Boethius uvádí další trojici pravidel, která slouží k obrácenému postupu, tedy k redukci nestejných tříčlenných posloupností na dřívější nestejný poměr, v případě násobků pak na rovnost. Tato pravidla zní:

[R1] první člen hledané posloupnosti se rovná prvnímu členu výchozí posloupnosti;
[R2] druhý člen hledané posloupnosti je rozdílem druhého a prvního členu výchozí posloupnosti;
[R3] třetí člen hledané posloupnosti odpovídá rozdílu třetího členu výchozí posloupnosti a součtu dvakrát druhého s prvním členem výchozí posloupnosti.[13]

Hlavní příčina kontroverzí mezi učenci konce 10. století patrně souvisí s Boethiovým výrokem z *Úvodu do aritmetiky* II, 1, v němž se píše, že pomocí pravidel **[R1–3]** lze převádět jakýkoli násobný nebo superpartikulární poměr na bezprostředně předcházející ná-sobný či superpartikulární poměr – tj. např. trojnásobky na dvojnásobky nebo pětičtvrtinový poměr na čtyřtřetinový poměr ([9], 94). Když k tomu Boethius doplnil jediný návodný příklad, v němž převádí čtyřnásobky na trojnásobky, ty na dvojnásobky a tyto nakonec na tři stejná čísla ([9], 95–96), celé věci asi příliš nepomohl, neboť tím čtenáři

[11] Na bližší informace o Gerbertových matematických pracích, jejich aplikaci či zasazení do kontextu raně středověké matematiky viz např. [5]; [7]; [10]; [14]; [15]; [17]; [19]; [22]; [24]; [26] nbeo [27] a mnoho dalších.
[12] [9], 81: „Praecepta autem tria haec sunt, ut primum numerum primo facias parem, secundum uero primo et secundo, tertium primo, secundis duobus et tertio."
[13] [9], 94: „Propositis enim tribus, ut dictum est, terminis aequis proportionibus ordinatis ultimum semper medio detrahamus et ipsum quidem ultimum primum terminum collocemus, quod de medio relinquitur, secundum. De tertia uero propositorum terminorum summa auferemus unum primum et duos secundos – eos qui de medietate relicti sunt – et id quod ex tertia summa relinquitur, tertium terminum constituemus." Srov. také [23], 74–75.

nabídl možnost, že rovněž u superpartikulárních čísel se pozdější poměr (např. 5 : 4) bezprostředně převádí na dřívější poměr (v tomto případě tedy 4 : 3).

Třebaže obě sady Boethiových pravidel jsou k sobě navzájem evidentně v reverzním vztahu, právě kvůli zmíněné pasáži z Boethiova textu o bezprostředním převodu posloupností v rámci téže nerovnosti lze celou problematiku převodů vykládat různými způsoby, neboť zatímco superpartikulární čísla vznikají z násobků, tak při převodu superpartikulárních čísel na dřívější nerovnost lze Boethiovým slovům rozumět tak, že není doporučován návrat podle pořadí vzniku, nýbrž přímý přechod od jednoho superpartikulárního poměru k dřívějšímu. Gerbert z Remeše i Abbo z Fleury však s tímto nesouhlasili a ve svých textech se pokusili ukázat, že takové čtení Boethiova *Úvodu do aritmetiky* neodpovídá záměru autora.

Gerbert se drží obou představených sad pravidel a detailně popisuje, jakým způsobem lze od tříčlenné posloupnosti čísel 16, 20, 25, která je uspořádána podle poměru 5 : 4, dospět ke třem stejným hodnotám (1, 1, 1; tj. poměr 1 : 1), přičemž postupně budou explicitně vyčísleny rovněž posloupnosti dané každým bezprostředně předcházejícím superpartikulárním poměrem, tzn. 4 : 3 a 3 : 2. V zadání Gerbertova příkladu je poměr 5 : 4, u něhož je nutno nejprve nalézt dřívější nerovnost, tedy využít Boethiova pravidla **[R1–3]**, a získat tříčlennou posloupnost danou čtvrtinovým poměrem, tento lze snadno transformovat na čtyřnásobný poměr, který lze s využitím týchž pravidel převést na trojnásobky. Trojnásobky jsou převedeny na třetinový poměr, který je příčinou vzniku poměru 4 : 3, tudíž je nyní nutno použít pravidla **[P1–3]**. Od něj vede přímá cesta pomocí pravidel **[R1–3]** zpět ke třetinovému poměr, resp. trojnásobku. Ten lze redukovat (regule **[R1–3]**) na dvojnásobek, resp. polovinu, odkud pravidla **[P1–3]** umožní získat půldruhanásobek (poměr 3 : 2). Od něj se lze vrátit k polovině a dvojnásobku a redukční regule **[R1–3]** poskytnou rovnost. Celý tento postup (tj. *saltus Gerberti*) zachycuje tab. 1:

1.	pětičtvrtinový násobek	poměr 5 : 4	16 – 20 – 25	aplikace pravidel **[R1–3]**	↓
2.	čtvrtina	poměr 1 : 4	16 – 4 – 1	reverze posloupností	↓
3.	čtyřnásobek	poměr 4 : 1	1 – 4 – 16	aplikace pravidel **[R1–3]**	↓
4.	trojnásobek	poměr 3 : 1	1 – 3 – 9	reverze posloupností	↓
5.	třetina	poměr 1 : 3	9 – 3 – 1	aplikace pravidel **[P1–3]**	↓
6.	čtyřtřetinový násobek	poměr 4 : 3	9 – 12 – 16	aplikace pravidel **[R1–3]**	↓
7.	třetina	poměr 1 : 3	9 – 3 – 1	reverze posloupností	↓
8.	trojnásobek	poměr 3 : 1	1 – 3 – 9	aplikace pravidel **[R1–3]**	↓
9.	dvojnásobek	poměr 2 : 1	1 – 2 – 4	reverze posloupností	↓
10.	polovina	poměr 1 : 2	4 – 2 – 1	aplikace pravidel **[P1–3]**	↓
11.	půldruhanásobek	poměr 3 : 2	4 – 6 – 9	aplikace pravidel **[R1–3]**	↓
12.	polovina	poměr 1 : 2	4 – 2 – 1	reverze posloupností	↓
13.	dvojnásobek	poměr 2 : 1	1 – 2 – 4	aplikace pravidel **[R1–3]**	↓
14.	stejnost	poměr 1 : 1	1 – 1 – 1		

Tab. 1 – Tzv. „*saltus Gerberti*“, tj. přechody mezi superpartikulárními poměry a násobky

Také Abbo z Fleury navrhuje v zásadě totožný proces převodů a rovněž neopomíná zmínit konfúzní charakter jiných postupů. V komentáři k dílu *Calculus* nejprve zdůrazňuje, že Boethiovým slovům z *Úvodu do aritmetiky* II, 1 není správné rozumět tak, že by se superpartikulární poměry měly bezprostředně převádět na předchozí superpartikulární poměry (např. poměr 5 : 4 přímo na poměr 4 : 3), nýbrž tím způsobem, že sledujeme-li superpartikulární poměry, pak při cestě od poměru 5 : 4 k rovnosti (poměr 1 : 1) nelze vynechat poměr 4 : 3 (viz [1], 87). Ovšem superpartikulární poměry mají svůj původ v násobcích, nelze tedy jinak, než postupovat přes násobky. Aby bylo vše jasnější, představuje Abbo dvě tabulky, v nichž ukazuje, jak nerovné poměry čísel vznikly z rovnosti (a tudíž obrácený postup by odpovídal zpětnému postupu ke stejnosti) – při omezení na supepartikulární čísla, uvedené tabulky vypadají takto – viz tab. 2 (viz [1], 88):

<table>
<tr><td>1.</td><td>rovnost</td><td>1 : 1</td><td>2 – 2 – 2</td><td>1.</td><td>rovnost</td><td>1 : 1</td><td>2 – 2 – 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.</td><td rowspan="4">násobky</td><td rowspan="2">2 : 1</td><td rowspan="2">2 – 4 – 8</td><td>2.</td><td rowspan="4">násobky</td><td>2 : 1</td><td>2 – 4 – 8</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3.</td><td rowspan="2">3 : 1</td><td rowspan="2">2 – 6 – 18</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3.</td><td rowspan="2">3 : 1</td><td rowspan="2">2 – 6 – 18</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>4 : 1</td><td>2 – 8 – 32</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>superpartikulární poměry</td><td>4 : 3</td><td>18 – 24 – 32</td><td>5.</td><td>superpartikulární poměry</td><td>5 : 4</td><td>32 – 40 – 50</td></tr>
</table>

Tab. 2 – Vznik superpartikulárních poměrů podle Abbona z Fleury

2.2 Notker z Lutychu

Krátký text *De superparticularibus* nazvaný a editovaný N. Bubnovem je autorsky tradičně připisován Notkerovi z Lutychu. Svým obsahem se toto pojednání zdá být tím, proti němuž Gerbert a Abbo vystoupili. Notker se totiž domníval, že Boethiovým slovům z *Úvodu do aritmetiky* II, 1 o převodech superpartikulárních poměrů mezi sebou (tj. např. poměr 5 : 4 na poměr 4 : 3) je zapotřebí rozumět tak, že násobné poměry je možno vynechat, neboť podle matematických pravidel lze zrekonstruovat každou tříčlennou posloupnost danou bezprostředně předcházejícím superpartikulárním poměrem z poměru bezprostředně následujícího, aniž bychom k tomu museli využívat násobné poměry. Je ovšem zřejmé, že v takovém případě nelze využít Boethiem navrhovaná redukční pravidla **[R1–3]**, která proto Notker nahlíží jako pouhá možná doporučení, nikoli jako závazné direktivy ([16], 297).

Sám následně zformuloval jiné převodní regule, které umožňují přechody mezi superpartikulárními poměry. V zásadě lze říci, že svým celkovým vyzněním jsou Notkerova pravidla jednodušší než níkomachovsko-boethiovské postupy zastávané Gerbertem a Abbonem, ovšem na úkor přehlednosti, kterou v Notkerově systému znesnadňuje nutnost vytvořit samostatná pravidla pro každý jednotlivý příklad redukčního převodu mezi superpartikulárními čísly. Tak např. pro převod mezi tříčlennou posloupností danou poměrem 5 : 4 na tříčlennou posloupnost danou poměrem 4 : 3 užívá Notker tohoto postupu (viz [16], 298):

[Q1] první člen hledané posloupnosti se rovná prvnímu členu výchozí posloupnosti (tj. stejně jako u Boethia);
[Q2] druhý člen hledané posloupnosti je rozdílem druhého a poloviny prvního členu výchozí posloupnosti;
[Q3] třetí člen hledané posloupností odpovídá rozdílu třetího a prvního členu výchozí posloupnosti.

Pokud je následně nutno tříčlennou posloupnost danou poměrem 4 : 3 převést na tříčlennou posloupnost danou poměrem 3 : 2, pak se použijí zase tato pravidla (viz [16], 298):

[T1] první člen hledané posloupnosti se rovná prvnímu členu výchozí posloupnosti (tj. stejně jako u Boethia);
[T2] druhý člen hledané posloupnosti odpovídá polovině druhého členu výchozí posloupnosti;
[T3] třetí člen hledané posloupností je rozdílem třetího a druhého členu výchozí posloupnosti.

Když je takto získán půldruhanásobek (poměr 3 : 2), který už není možné dále převádět na jiný superpartikulární poměr, pak se aplikují Boethiova pravidla **[R1–3]**, jež umožní získat dvojnásobek a následně i rovnost. Notkerovy převody zachycuje tab. 3:

1.	pětičtvrtinový násobek	poměr 5 : 4	16 – 20 – 25	aplikace pravidel **[Q1–3]**	↓
2.	tři čtvrtiny	poměr 3 : 4	16 – 12 – 9	reverze posloupnosti	↓
3.	čtyřtřetinový násobek	poměr 4 : 3	9 – 12 – 16	aplikace pravidel **[T1–3]**	↓
4.	dvě třetiny	poměr 2 : 3	9 – 6 – 4	reverze posloupnosti	↓
5.	půldruhanásobek	poměr 3 : 2	4 – 6 – 9	aplikace pravidel **[R1–3]**	↓
6.	polovina	poměr 1 : 2	4 – 2 – 1	reverze posloupnosti	↓
7.	dvojnásobek	poměr 2 : 1	1 – 2 – 4	aplikace pravidel **[R1–3]**	↓
8.	stejnost	poměr 1 : 1	1 – 1 – 1		

Tab. 3 – Notkerův převod pětičtvrtinového násobku na stejnost

2.3 Důvody zmatení

Už na první pohled je patrné, že Notkerův postup vykazuje znatelně méně kroků, než je tomu v případě Gerberta, takže se přirozeně zdá být efektivnější, intuitivnější a snad by měl být preferovanější. Samovolně se proto nabízí otázka po příčinách Gerbertova (a Abbnonova) odmítání Notkerova postupu. Gerbert příčiny zamítavého postoje vyjmenovává ve svém dopise Konstantinovi, když vysvětluje výhody jeho vlastního sledu kroků. Nejprve po převodu poměru 5 : 4 na poměr 4 : 3 píše, že jeho vlastní:

… postup při převodu superpartikulárního čísla v poměru 5 : 4 nejprve na číslo v poměru 4 : 3, za použití pečlivě propracovaných pravidel, o nichž píše Boethius, není chaotický, ale systematický a odpovídá postupnému vzniku čísel.[14]

A na samotný závěr svého dopisu rekapituluje celý postup slovy:

Vidíš, jak byla veškerá kvantita vyjádřená čísly v poměru 5 : 4 změněna na tři stejná čísla, tj. jednotky: 1, 1, 1, a to nikoli chaoticky, nýbrž systematicky takovým způsobem, jakým vznikla. Právě taková je totiž skutečná povaha čísel.[15]

[14] [16], 34: „ … facta est resolutio superparticularis sesquiquarti primo in sesquitertium, ut Boetius docet, non confuse, sed ordinate, sicut a principio numeri fuerant procreati, subtiliter adhibitis praeceptis.“
[15] [16], 35: „Vides igitur, quemadmodum tota quantitas sesquiquarti redacta est ad tres aequales terminos, id est unitates: I, I, I, non confuse, sed ordinatim, sicut fuerat a principio procreata. Haec est igitur vera natura numerorum.“

Gerbertovy důvody jsou tedy v zásadě tři:

1. autoritativní následování Boethiem zformulovaných pravidel;
2. reverzní sled kroků, který kopíruje proces vzniku nerovných číselných poměrů z prvotní rovnosti;
3. samotná povaha čísel.

První dva důvody již zde určitým způsobem byly zmíněny. Lze je shrnout, že (ad 1.) Abbo i Gerbert doporučovali, aby se soudobí aritmetikové drželi Boethiových reverzních pravidel pro převody trojčlenných posloupností a v duchu tradice dokázali bezpečně najít správné výsledky. Inovativní přístup je v mnoha ohledech vítaný, ale zde vede ke zřejmým potížím: Notker musí vytvářet pro převody mezi jednotlivými bezprostředně sousedícími superpartikulátními poměry vždy nová a nová pravidla, takže nakonec může jít pouze o zdánlivou jednoduchost jeho postupu, neboť dvě sady obecných pravidel musí být nahrazeny množstvím speciálních regulí. Nenásledování Boethia samozřejmě nic nemění na matematické správnosti Notkerova postupu, avšak i samotný Notker cítí potřebu vysvětlit, proč si dovoluje překračovat *Úvodem do aritmetiky* doporučovaná pravidla, jak bylo zmíněno výše v této studii.

Druhý důvod (ad 2.; tzn. nerespektování zpětného sledu kroků vzhledem ke vzniku nestejností) už nechává Notker bez komentáře, čímž je fakticky blíže Boethiovu aritmetickému textu z úvodní kapitoly druhé knihy o bezprostředním přechodu mezi jednotlivými superpartikulárními čísly (viz kapitola 2.1), než je tomu kupř. u Gerberta a Abbona, jak bylo uvedeno výše.

Třetí důvod chaotičnosti (ad 3.) kritizovaného sledu kroků z textu *De superparticularibus* se ovšem zdá být tím nejdůležitějším. Přes nepochybnou úctu k autoritám i vlastní matematickou správnost je, zdá se, (nejen) pro raně středověké intelektuály podstatný jiný aspekt praktikovaných aritmetických výkladů (viz kapitola 1.3). Deuterokanonická biblická kniha Moudrosti navíc uvádí, že vše ve stvořeném bylo Bohem uspořádáno podle míry, čísla a váhy,[16] přičemž již Augustin z toho vyvodil, že číslo (a aritmetika, která o vlastnostech čísla pojednává) je nejen výrazem Boží moudrosti, ale samotné číslo je přímo soupodstatné s Bohem (viz [4], 2, 11, česky 178) – tj. má podobný vztah k Bohu, jaký mezi sebou mají osoby trojjediného Boha.

Boethius k tomu dodal, že každý filozof, který už z povahy oboru svého zájmu má dbát o věci lidské i božské, musí začínat svou cestu k poznání moudrosti u aritmetiky, neboť právě tato je první z disciplín, jež má bytostnou vazbu k Bohu i člověku. Aritmetiku však nelze podle Boethia chápat „pouze“ jako první z věd *quadrivia*, ale zároveň či především (v duchu pýthagorejské tradice) jako výraz metafyzického uspořádání veškerenstva. Poznávat aritmetické vlastnosti čísel je takto metafyzickým výkonem, neboť podstata všech věcí spočívá v číslech, metafyzická struktura reality je dána číselnými poměry a posloupnostmi (jak to říkal již dříve např. Platón), a toto vše je výrazem Božích myšlenek, skrze něž tvořil tento svět (viz [9], 14).

[16] [8] *Sap.* 11, 20: „Sed omnia in mensura et numero et pondere disposuisti.“ ([13] *Mdr.* 11, 20: „Ale ty jsi všechno uspořádal s mírou, počtem a váhou.“)

Matematické dílo Abbona z Fleury (a také další dobově dochovaný text[17]) je pak dokladem, že na sklonku 10. století byla tato zdůvodnění zájmu o aritmetiku brána velmi vážně. Abbonův komentář ve své úvodní části hlásá, že filozofie je láskou k moudrosti, tedy zároveň láskou k Bohu, neboť moudrost a Bůh jsou vzájemně neodmyslitelně propojeni (sedm sloupů biblického chrámu Moudrosti odpovídá sedmi svobodným uměním, která se v karolinských a ottonských školách pěstovala). V souladu s tím, že Bůh je jeden, počíná rovněž aritmetika své úvahy od zdroje všeho, tj. od jednotky, která se postupně ze stejnosti mění v různé druhy nestejných poměrů (a posloupností, jež jsou dány těmito poměry), tedy ve shodě s Platónem je aritmetika a učení o nestejných vlastnostech čísel, o poměrech atp. přímou cestou k poznání Božího stvořitelského aktu (blíže viz [1], 65–72).

Z toho je zřejmé, že Gerbertem a Abbonem prezentované postupy nejsou zmatené a chaotické především proto, že ctí metafyzickou strukturu reality, následují postup, jímž byly jednotlivé druhy nestejností stvořeny samotným Bohem, tedy kopírují skutečnou povahu čísel a jejich vztahů. Notkerova úvaha může být matematicky správná, dokonce může snadněji či elegantněji vést k cíli, ovšem jejím základním nedostatkem je, že podle soudobých interprettačních rámců důležitosti aritmetického umění nectí Boží řád. Je to tedy znalost pouze lidská, nikoli božská. A jelikož Bůh je věčný, neměnný a stálý, kdežto člověk je pomíjivý, proměnlivý a vrtkavý, nese také Notkerův postup v očích matematiků konce 10. století rysy zmatečnosti a nespolehlivosti.

3 Závěr

Byť se tedy v Gerbertově dopisu Konstantinovi, na který se zaměřila tato studie, řeší výhradně matematická (aritmetická) problematika, není důvodem odmítání odlišného (Notkerova) řešení stejné otázky matematická nesprávnost konkurenčního schématu, nýbrž metafyzický řád, který vévodí samotné podstatě čísel či matematice. Boethia by bylo možné korigovat, také není nutné vždy nutně vracet se k počátku stejnou cestou, jakou jsme došli k danému stavu, ovšem pokud se snažíme nalézt skutečnou povahu číselných vztahů, pak teologicko-filozofický rámec určující metafyzickou základnu neumožňuje následovat Notkerovy direktivy.

Velmi úzké sepjetí mezi matematickou (aritmetickou) a metafyzickou látkou je typickým příkladem antického dědictví, jež bylo ve středověku pěstováno v obdobném duchu, jak to činili pozdně antičtí pohanští intelektuálové – aritmetika je tu k tomu, aby byl člověk lepším filozofem. Výraznějším rozdílem je pouze snaha středověkých učenců ukázat, že tento filozof je zároveň křesťanem.

.

Literatura

[1] Abbo of Fleury and Ramsey: *Commentary on the Calculus of Victorius of Aquitaine*. Ed. A. M. Peden. Auctores Britannici Medii Aevi 15, Oxford University Press, The British Academy, Oxford, New York, 2003.

[2] Augustinus Hipponensis: *De ciuitate dei*. Ed. B. Dombart, A. Kalb. Corpus Christianorum Series Latina 47–48, Brepols, Turnhout 1955; česky Aurelius Augustinus: *O Boží obci knih XXII*. Přel. J. Nováková. 2 sv. Vyšehrad, Praha, 1950.

[17] Viz např. [11].

[3] Augustinus Hipponensis: *De doctrina christiana*. Ed. J. Martin. Corpus Christianorum Series Latina 32, Brepols, Turnhout, 1962; česky Aurelius Augustinus: *Křesťanská vzdělanost*. Přel. J. Nechutová. Vyšehrad, Praha, 2004.

[4] Augustinus Hipponensis: *De libero arbitrio*. Ed. W. M. Green. Corpus Christianorum Series Latina 29, Brepols, Turnhout, 1970; česky Aurelius Augustinus: *O svobodném rozhodování*. Přel. R. Hošek. In Hošek R.: *Aurelius Augustinus. Říman – člověk – světec*. Vyšehrad, Praha, 2000, 124–251.

[5] Beaujouan G.: *Les Apocryphes mathématiques de Gerbert*. Archivum Bobiense – Studia 2(1985), 645–658.

[6] Bečvář J.: *Hrdinský věk řecké matematiky*. In Bečvář J., Fuchs E. (eds.): *Historie matematiky I.* Dějiny matematiky 1, Jednota českých matematiků a fyziků, Brno, 1993, 20–107.

[7] Bečvář J.: *Gerbert z Aurillacu – Silvestr II.* In Bečvář J. (ed.): *Matematika ve středověké Evropě*. Dějiny matematiky 19, Prometheus, Praha, 2001, 184–229.

[8] *Biblia Sacra. Nova Vulgata. Liber Sapientiae* [online]. [cit. 24. 4. 2014] http://www.vatican.va/archive/bible/nova_vulgata/documents/nova-vulgata_vt_sapientiae_lt.html#11

[9] Boethius A. M. T. S.: *De institutione arithmetica*. Ed. H. Oosthout, J. Schilling. Corpus Christianorum Series Latina 94A, Brepols, Turnhout, 1999.

[10] Brown N. M.: *The Abacus and the Cross: The Story of the Pope Who Brought the Light of Science to the Dark Ages*. Basic Books, New York, 2010.

[11] Caiazzo I.: *Un commento altomedievale al De arithmetica di Boezio*. Archivum Latinitatis Medii Aevi 58(2000), 661–676.

[12] Cassiodorus F. M. A.: *Institutiones divinarum et humanarum litterarum*. Ed. R. A. B. Mynors. Fontes Christiani 39/1, Clarendon Press, Oxford, 1937.

[13] Česká biblická společnost. *Biblenetcz* [online]. [cit. 24. 4. 2014] http://www.biblenet.cz/app/b/Wis/chapter/11.

[14] Evans G. R.: *Introductions to Boethius's „Arithmetica" of the Tenth to the Fourteenth Century*. History of Science 16(1978), 22–41.

[15] Evans G. R.: *The Saltus Gerberti: The Problem of the 'Leap'*. Janus 67/4(1980), 261–268.

[16] *Gerberti postea Silvestri II papae Opera mathematica*. Ed. N. Bubnov. R. Friedländer & Sohn, Berlin, 1899; reprint Georg Olms, Hildesheim, 1963.

[17] Huglo M.: *Gerbert, théoricien de la musique, vu de l'an 2000*. Cahiers de civilisation médiévale 43/170(2000), 143–160.

[18] Isidor ze Sevilly: *Etymologiae I–III / Etymologie I–III*. Přel. D. Korte. Knihovna středověké tradice 3, OIKOYMENH, Praha, 2000.

[19] Lindgren U.: *Gerbert von Aurillac und das Quadrivium. Untersuchungen zur Bildung im Zeitalter der Ottonen*. Franz Steiner Verlag, Wiesbaden, 1976.

[20] Mačák K.: *Komentář ke čtyřem obrázkům z Boethiovy „Aritmetiky"*. In Bečvář J. (ed.): *Matematika ve středověké Evropě*. Dějiny matematiky 19, Prometheus, Praha, 2001, 102–119.

[21] Martianus Capella F.: *De nuptiis Philologiae et Mercurii*. Ed. J. Willis. Bibliotheca Scriptorum Graecorum Et Romanorum Teubneriana, Teubner, Leipzig, 1983.

[22] *Matematické listy Gerberta z Remeše*. Přel. M. Otisk, R. Psík. Dějiny matematiky 57, Matfyzpress, Praha, 2014.

[23] *Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis Arithmeticae libri II*. Ed. R. Hoche. Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana, Teubner, Leipzig, 1866.

[24] Nuvolone F. G.: *Numeri, Croce e Vita: Gerberto e la Parola. A proposito della rilegatura di Echternach: un programma Gerbertiano?* GERBERTVS. Academic Publication on History of Medieval Science 1(2010), 110–169.

[25] *Platonis Opera*. IV: *Clitopho. Respubica. Timaeus. Critias*. Ed. J. Burnet. Oxford Classical Texts: Scriptorum Classicorum Bibliotheca Oxoniensis, E Typographeo Clarendoniano, Oxford 1900 až 1907, 17–105; česky *Platónovy spisy*. 4: *Kleitofón. Ústava*. *Timaios. Kritias*. Přel. F. Novotný. OIKOYMENH, Praha, 2003, 379–454.

[26] Rossi P.: *Algoritmi matematici nelle lettere di Gerbert*. GERBERTVS. Academic Publication on History of Medieval Science 1(2010), 16–23.

[27] Sachs K. J.: *Gerbertus cognomento musicus. Zur musikgeschichtlichen Stellung des Gerbert von Reims (nachmaligen Papstes Silvester II).* Archiv für Musikwissenschaft 29/4(1972), 257–274.

[28] Šíma A.: *Svět vymezený a neomezený. Principy přírody ve filosofii Filoláa z Krotónu a u raných pythagorejců*. Pavel Mervart, Praha, 2012.

[29] Šír Z. (ed.): *Řecké matematické texty*. Přel. R. Mašek, A. Šmíd. Knihovna antické tradice 8, OIKOYMENH, Praha, 2011.

Tento příspěvek vznikl v rámci činnosti *Centra pro studium středověké kultury a společnosti – VIVARIUM* při Filozofické fakultě Ostravské univerzity v Ostravě.

Adresa

doc. Mgr. Marek Otisk, Ph.D.
Katedra filozofie
Filozofická fakulta, Ostravská univerzita v Ostravě
Reální 5
701 03 Ostrava
e-mail: *marek.otisk@osu.cz*

SOME REMARKS ON HISTORY OF POINCARÉ CONJECTURE

ZDZISŁAW POGODA

Abstract: Poincaré conjecture was one of the most important hypotheses in mathematics in the twentieth century. However, from the moment of its putting until the first important publication about it passed almost 30 years. Could mathematicians initially did not appreciate its importance? The proposed lecture will attempt to answer this question.

W latach 2012–2013 Grisha Perelman umiescił w sieci trzy artykuły, w których udowodnił hipotezę geometryzacyjną dotyczącą klasyfikacji rozmaitości trójwymiarowych, a tym samym przy okazji wykazał hipotezę Poincarégo zaliczaną do siedmiu problemów milenijnych (por. [3], [12], [14]). Hipoteza Poincarégo dotycząca charakteryzacji sfery trójwymiarowej stała się w drugiej połowie XX wieku jednym z głównych problemów nie tylko topologii lecz całej matematyki. Tę pozycję zdobyła sobie dopiero jakieś pięćdziesiąt lat po jej sformułowaniu, gdy było już kilka nieudanych prób jej udowodnienia. Uświadomiono sobie też jej ogromne znaczenie przy próbach klasyfikacji rozmaitości trójwymiarowych. Przypomnijmy współczesne sformułowanie samej hipotezy: trójwymiarowa rozmaitość bez brzegu, zwarta, spójna i jednospójna jest homeomorficzna ze sferą trójwymiarową.

Henri Poincaré (29.04.1854 – 17.07.1912)

Henri Poincaré sformułował swoją hipotezę w wersji zbliżonej do ostatecznej w 1904 roku w piątym dodatku [9] do głównej pracy *Analysis Situs* [7]. Jednak przygotowanie do sformułowania hipotezy rozpoczęło się już w pierwszej fundamentalnej pracy [7] rozpoczynającej cykl publikacji poświęconych topologii nazywanej wówczas właśnie „analysis situs". W [7] Poincaré po zdefiniowaniu na różne sposoby pojęcia rozmaitości i podaniu ważnych przykładów rozmaitości trójwymiarowych, rozwinął idee dające podstawy do nowej dziedziny – topologii algebraicznej. Zdefiniował pojęcie homologii, za jego pomocą opisał liczby Bettiego charakteryzujące typ spójności rozmaitości oraz pozwalające rozróżniać rozmaitości z dokładnością do homeomorfizmu. Zresztą sam termin „homeomorfizm" też został wprowadzony przez Poincarégo w tej pracy. Relacje homologii stały się podstawą do konstrukcji niezwykle ważnych nie tylko w topologii grup homologii. Jednak samo pojęcie grupy homologii zostało opisane dopiero w latach 1925–1928 przez Emmy Noether, Leopolda Vietorisa i Walthera Mayera (por. [16]). Poincaré z początku był przekonany, że liczby Bettiego jednoznacznie opisują, w szczególności, rozmaitości trójwymiarowe. Tym samym uważał, że sfera trójwymiarowa jest jednoznacznie opisana przez homologie. W dzisiejszej terminologii: grupy homologii jednoznacznie wyznaczają sferę trójwymiarową. Przypuszczenie to zostało sformułowane w sposób jawny w drugim dodatku do *Analysis situs* (por.[8]), naturalnie w terminach liczb Bettiego i współczynników skręcenia (torsji). Praca [8] kończy się stwierdzeniem.

> „W celu uniknięcia zbytniego rozbudowania niniejszej pracy ograniczę się do sformułowania następującego twierdzenia, którego dowód będzie wymagał dalszych badań.
>
> Każdy wielościan, który ma wszystkie liczby Bettiego równe 1 oraz wszystkie tablice T_q orientowalne jest jednospójny, to znaczy jest homeomorficzny z hipersferą."

Poincaré stawia tezę, że może scharakteryzować sferę w dowolnym wymiarze wykorzystując skonstruowane przez siebie algebraiczne niezmienniki. Zaznaczmy, że w tej pracy i wcześniej rozmaitość jednospójna jest synonimem sfery, a termin „tablice T_q" związany jest z współczynnikami torsji wprowadzonymi przez Poincarégo w pierwszym uzupełnieniu do *Analysis Situs* po krytyce Poula Heegaarda.

Poul Heegaard (02.11.1871 – 07.02.1948)

Heegaard był duńskim matematykiem, który w swojej rozprawie doktorskiej (por. [5]) dokonał krytycznej analizy *Analysis Situs* i zauważył, że, w szczególności tak zwane twierdzenie o dualności Poincarégo nie zawsze jest prawdziwe. Podając kontrprzykład zaproponował również pewną ogólną konstrukcję rozmaitości nazwaną diagramem Heegaarda. W przypadku rozmaitości trójwymiarowych polega ona na sklejaniu brzegiem dwóch kul z uchami (wielokrotnych torusów) w taki sposób, żeby pewne krzywe na sklejanych powierzchniach przechodziły odpowiednio na siebie. Układ takich krzywych na powierzchni nazwano właśnie diagramem Heegaarda. Diagram pozwala na jednoznaczne odtworzenie rozmaitości. Można udowodnić, że każda rozmaitość trójwymiarowa ma taki diagram. Niestety jednej rozmaitości odpowiada nieskończenie wiele diagrammów, co jest poważną przeszkodą, gdy chcemy wykorzystać diagramy Heegaarda do klasyfikacji rozmaitości. Pod wpływem pracy Heegarda Poincaré napisał kolejne uzupełnienia do *Analysis Situs* wprowadzając współczynniki skręcenia (torsji) i poprawiając swoje twierdzenie o dualności. Być może dzięki krytyce Heegaarda powstały kolejne prace Poincarégo z topologii i została w końcu sformułowana jego hipoteza.

W podstawowej pracy (por. [7]) Poincaré definiuje pojęcie grupy fundamentalnej nazywanej później także grupą podstawową albo pierwszą grupą homotopii. Wyznacza grupy dla podanych przez siebie przykładów i stawia kilka pytań.

„Byłoby interesujące poznać odpowiedzi na następujące pytania.

1. Czy grupa G zadana przez generatory i relacje może być grupą fundamentalną n-wymiarowej rozmaitości?
2. Jak skonstruować taką rozmaitość?
3. Czy dwie rozmaitości tego samego wymiaru z tą samą grupą fundamentalną są homeomorficzne?

Pytania te wymagają trudnych studiów i długich badań. Nie będę tu pisał o tym."

Z tych rozważań wynika, że Poincaré jeszcze nie czuł pojęcia grupy fundamentalnej. Pytanie trzecie można by uznać za przyszłą zapowiedź hipotezy. Dziwnym się może wydawać, że Poincaré nie znał odpowiedzi na to pytanie, gdyż pojęcie sfery czterowymiarowej i iloczynu kartezjańskiego dwóch sfer $\boldsymbol{S}^2$ nie były mu obce. Obie rozmaitości mają trywialne grupy fundamentalne. Być może Poincaré miał na myśli przede wszystkim rozmaitości trójwymiarowe, spełniające dodatkowe warunki (a nie np. $\boldsymbol{S}^3$ i $\boldsymbol{R}^3$). Teoria dopiero się rodziła i trudno było przewidzieć wszystkie sytuacje.

Do pojęcia grupy fundamentalnej i rozmaitości trójwymiarowych Poincaré powraca w piątym dodatku do *Analysis Situs* (por.[9]). Przyznaje, że hipoteza postawiona na końcu drugiego dodatku jest nieprawdziwa i konstruuje odpowiedni kontrprzykład. Jest to słynna sfera homologiczna Poincarégo – rozmaitość o takich samych homologiach jak standardowa sfera trójwymiarowa lecz niehomeomorficzna z nią. Do konstrukcji Poincaré wykorzystuje technikę diagramów Heegaarda i jest to pierwsze tak niebanalne ich wykorzystanie. Rozmaitość Poincarégo powstaje przez sklejenie dwóch podwójnych torusów według specjalnego diagramu zaproponowanego przez autora (Fig.1). Okazuje się, że grupa fundamentalna tej rozmaitości jest grupą skończoną rzędu 120, co dowodzi, że skonstruowany objekt nie jest homeomorficzny ze sferą trójwymiarową.

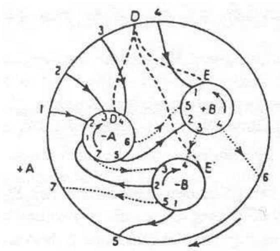
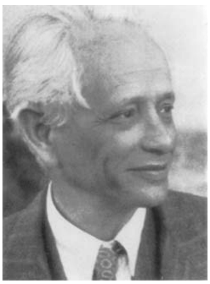
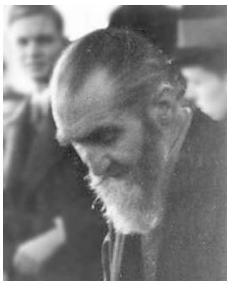


Fig.1

Kończąc rozważania Poincaré stawia pytanie: „Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe?“ (Czy może być tak, że grupa fundamentalna V redukuje się do trywialnej a mimo to V nie jest jednospójna?). Tak wygląda słynna hipoteza w sformułowaniu autora. Powtórzmy: tu przez rozmaitość jednospójną Poincaré rozumie sferę trójwymiarową. Nie zatrzymuje się jednak nad tym pytaniem dodając: „Mais cette question nous entraînerait trop loin.“ (Lecz to pytanie zaprowadziłoby nas za daleko.). I więcej już do tematu nie powraca.

Przykładem Poincarégo zainteresował się wspomniany Poul Heegaard wraz młodszym kolegą Maxem Dehnem. Dehn stał się znany, gdy zaraz po ogłoszeniu słynnych problemów Hilberta podał rozwiązanie trzeciego problemu dotyczącego równoważności wielościanów przez podział. Heegaard zaproponował Dehnowi napisanie wspólnego artykułu do Encyklopedii Matematycznej (por.[2]). W artykule badana jest między innymi sfera homologiczna. Dehn sformułował pierwszą propozycję dowodu hipotezy Poincarégo i przygotował artykuł do *Mathematische Annalen*. Jednak po rozmowie z Heinrichem Tietze w 1908 roku na kongresie w Rzymie artykuł wycofał uznając jego wadliwość. Tietze jest autorem ważnej rozprawy (por. [15]), w której przedstawia konstrukcję przestrzeni soczewkowych i przypuszcza, że wśród nich są rozmaitości o identycznych grupach fundamentalnych lecz niehomeomorficzne. Kilkanaście lat później zostaje to potwierdzone przez Jamesa W. Alexandera dla przestrzeni L(5,1) i L(5,2).





Max Dehn (13.11.1878 – 27.06.1952) Heinrich Tietze (31.08.1880 –17.02.1964)

Poza Tietzem, Heegardem i Dehnem (por.[1]) do początków lat dwudziestych praktycznie nikt nie podejmował prac nad hipotezą Poincarégo. Prawdopodobnie po raz pierwszy termin „hipoteza Poincarégo” pojawia się w książce Beli Kerékjárto *Vorlesung über Topologie* z 1923 roku. O znaczeniu hipotezy wspomina Hellmuth Kneser w 1925 i 1929 roku, Karl Seifert i William Threllfal w książce *Lehrbuch der Topologie* z 1934 roku. W tymże 1934 roku ukazuje się pierwsza praca z próbą dowodu hipotezy Poincarégo (por. [17]) . Autor John Henry Constantine Whitehead dostrzegł błąd i szybko przesłał do redakcji sprostowanie (por. [18]) . Pomysł dowodu opierał się na fakcie, że otwarta trójwymiarowa rozmaitość spójna i ściągalna jest homeomorficzna z $\boldsymbol{R}^3$. Whitehead zauważył jednak, że ten „oczywisty" fakt nie musi być prawdziwy. Jego przypadek pokazał, że z hipotezą Poincarégo mogą być poważne kłopoty oraz, że jej rozstrzygnięcie jest bardzo ważne dla zrozumienia natury rozmaitości trójwymiarowych oraz dla ich klasyfikacji. Pojawiło się wiele twierdzeń z zastrzeżeniem „przy założeniu hipotezy Poincarégo" (por. [10], [11], [12]).

John Henry Constantine Whitehead (11.11.1904 – 08.05.1960)

Mniej więcej od połowy lat pięćdziesiątych XX wieku rozpoczął się zmasowany atak na hipotezę Poincarégo. Na rozstrzygnięcie trzeba było czekać do początków XXI wieku i prac Perelmana stymulowanych przez program Richarda Hamiltona (por. [4], [6], [12], [13], [14], [16]). Sam autor nie przypuszczał chyba, że jego „niewinne" zapytanie zrobi tak ogromną karierę i przez pierwsze trzydzieści lat od postawienia hipotezy nic tego nie zapowiadało.

Literatura

[1] Dehn M.: *Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes*. Math. Ann. 69(1910), 137–168.

[2] Dehn M., Heegaard P.: *Analysis Situs*. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Vol. III AB3 Teubner, Leipzig, 1907, 153–220.

[3] Duda R.: *Trzeci problem milenijny: hipoteza Poincarégo*. Wiadomości Matematyczne 38(2002), 63–90.

[4] Gordon C. McA.: *3-Dimensional Topology up to 1960*. History of Topology ed. I. M. James, Elsevier Science, B. V, 1999. Chap. 15, 449–489.

[5] Heegaard P.: *Forstudier til en topologisk Teori for de algebraiske Fladers sammenhoeng*. Dissertation, Copenhagen, 1898.

[6] O’Shea D.: *The Poincaré Conjecture. In Search of the Shape of the Universe*. Walker & Company, New York, 2007.

[7] Poincaré H.: *Analysis Situs*. J. École Polytech. 2 I (1895), 1–121.

[8] Poincaré H.: *Second complément á l’Analysis Situs*. Proc. London Math. Soc. 32(1900), 277–308.

[9] Poincaré H.: *Cinquiemme complemént a l’Analysis Situs*. Rend. Circ. Mat. Palermo 18(1904), 45–110.

[10] Pogoda Z.: *Problemy z 3-rozmaitościami*. Zeszyty OKM nr. 40 (I 2008), 3−8.

[11] Pogoda Z.: *O chirurgiach konkretnie i abstrakcyjnie*. Zeszyty OKM nr. 42, (I 2009), 13−22.

[12] Pogoda Z.: *Hipoteza Poincarégo i problemy klasyfikacji rozmaitości* (in print in Zeszyty OKM).

[13] Stillwell J.: *Poincaré and the early history of 3-manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc. Vol.40, no. 4 (October 2012), 555–576.

[14] Szpiro G. G.: *Poincaré’s Prize. The Hundred-Year Quest to Solve One of Math’s Greatest Puzzles*. Dutton, 2007.

[15] Tietze H.: *Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten*. Monatshefte für Mathematik und Physik 19(1908), 1−118.

[16] Volkert K.: *Das Homöomorphismus problem insbesondere der 3-Mannigfaltigkeiten in der Topologie 1892–1935*. Philosophia Scientice, Cahier spécial 4, Éditons Kimé, 2002.

[17] Whitehead J. H. C.: *Certain theorems about 3-dimensional manifolds (1)*. Quart. J. Math. Oxford 15(1934), 308–320.

[18] Whitehead J. H. C.: *3-dimensional manifolds (corrigendum)*. Quart. J. Math. Oxford 16(1935), 80.

Adres
Zdzisław Pogoda Ph.D.
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński
Ul. Prof. St. Łojasiewicza 6
30-348 Kraków
e-mail: *zdzislaw.pogoda@uj.edu.pl*

K ZÁKLADOM MODERNEJ SLOVENSKEJ MATEMATIKY

BELOSLAV RIEČAN

Abstract: Slovak mathematics as a scientific discipline can be filed in the second half of 20th century. Its qualitative discontinuity was realized in 50th years in a problematic social and political situation. Of course, it has a prologue in the 40th years. The first part of the contribution is dedicated to the ascent, the second part to three factors of the positive development: best wishes to young people, kindness and cheer to work.

1 Štyridsiate roky

Slovenská vzdelanosť vôbec mala v 20. storočí dva medzníky. Prvým bol vznik Československej republiky v r. 1918. Podľa všetkého sme mali vtedy 7 stredoškolských profesorov schopných vyučovať po slovensky. Z nich jeden bol matematik – Jur Hronec (1881–1959). (Korešponduje to so stavom v rímsko-katolíckej cirkvi, v ktorej zo 6 biskupov len jeden vedel po slovensky). Riešením bolo pôsobenie českých stredoškolských profesorov.

V matematike bol druhým medzníkom vznik Slovenskej vysokej školy technickej (dnešnej Slovenskej technickej univerzity). Bola ustanovená zákonom z roku 1937, na príprave ktorého sa podieľalo celé politické spektrum pod záštitou Milana Hodžu a slovenskí intelektuáli pod predsedníctvom Jura Hronca, v tom čase profesora na brnianskej technike. Pravda, medzinárodná a vnútroštátna situácia viedli k tomu, že SVŠT začala pôsobiť v Bratislave (namiesto Košíc), a to až v r. 1939.

Ako vyzeralo vyučovanie matematiky? Vyučovala sa spoločne pre technikov aj prírodovedcov. Po ročníkoch sa striedali dvaja profesori: okrem Jura Hronca ešte z Brna dochádzajúci Josef Kaucký (1895–1982) a dvaja asistenti, absolventi Univerzity Karlovej Štefan Schwarz (1914–1986) a Anton Huťa (1915–2001).

Jur Hronec bol prvým rektorom SVŠT, ale čoskoro sa začal strániť spoločenského života. Napr. študentom, ktorí ho požiadali o napísanie príspevku do svojho časopisu odmietol s dodatkom: „Príde ešte čas, keď vám budem písať“. V odbojových kruhoch mal takú autoritu, že ho obe zložky ilegálnej Slovenskej národnej rady (socialistická i občianska) boli ochotné v roku 1944 akceptovať za predsedu. Svoju aktivitu v rokoch 1939–1944 zameral na pedagogickú a odbornú činnosť. Tak napr. dal si záležať na vytvorení a publikovaní prvej slovenskej vysokoškolskej učebnice matematiky. Stalo sa tak v Matici slovenskej pod vedením jej tajomníka Jána Martáka, ktorý sa neskôr aktívne zapojil do Slovenského národného povstania. (V r. 1945 sa stal Ján Marták správcom a Jur Hronec jedným z predsedov Matice.)

Podobnú úlohu hrali v odboji národohospodári Imrich Karvaš a Peter Zaťko. Obaja sa zaslúžili o to, že slovenské hospodárstvo malo v rokoch 1939–1944 dobrú úroveň, ale obaja boli pre svoju odbojovú činnosť odsúdení na smrť.

Štefan Schwarz bol prvým slovenským matematikom, ktorý v 2. storočí prenikol do sveta. Svojou teóriou pologrúp. Bol však občanom židovského pôvodu. Mal síce výnimku, takže mohol učiť, ale v r. 1944 všetky výnimky prestali platiť a Schwarz skončil v koncentráku. Prežil, čo bolo šťastím pre slovenskú i svetovú vedu.

Iným slovenským matematikom zakladateľského významu bol Tibor Neubrunn (1929–1990). Ako dieťa židovského pôvodu mohol absolvovať len 5 tried základnej školy. Vďaka statočným spoluobčanom Veľkej Hradnej však prežil a mohol uplatniť svoje nadanie.

Nositeľ zlatej medaily Vysokej školy technickej v Zurichu Ján Fischer zas mohol kvôli svojmu židovskému pôvodu vyučovať len na 1. stupni. Len vďaka zásahu Bystričanov sa stal profesorom na banskobystrickej obchodnej akadémii. Po vojne pôsobil ako vedúci katedry fyziky na Univerzite Komenského.

Po zavretí českých vysokých škôl niektorí bulharskí vysokoškoláci prešli študovať do Bratislavy. V protifašistickom smerovaní zohrali pozitívnu úlohu zapojením sa do Povstania.

Z predošlého vidno, že obdobie rokov 1939–1945 znamenalo nielen holokaust a excesy vtedajšieho režimu, ale aj problémy v matematickej obci. Teda budúci rozvoj slovenskej matematickej vedy sa udial nie vďaka, ale napriek vládnucej spoločenskej a politickej situácii.

2 Päťdesiate roky

Matematická veda na Slovensku sa rozvinula najmä pod vplyvom dvoch centier: na bratislavskej technike pod vedením Štefana Schwarza a na Univerzite Komenského pod vedením Jura Hronca.

Prírodovedecká fakulte sa totiž osamostatnila a odbor matematika sa študoval osobitne na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského. Asi v súvislosti s medzivojnovým pôsobením prof. Hronca v Brne prešli do Bratislavy brnianski profesori Jan Srb (1898–1964) a Milič Sypták (1907–1983). Sprevádzaní boli nastupujúcou generáciou asistentov ako boli Milan Kolibiar (1922–1993), Tibor Šalát (1923–2005), Michal Greguš (1926–2002), Valter Šeda (1931–2002), či Tibor Neubrunn (1929–1990). Pravda, kľúčovú úlohu v rozvoji vedy a výchovy budúcich matematikov na Slovensku zohral Otakar Borůvka (1899–1995).

Okrem toho, že Borůvkovo vyučovanie bolo ukážkou láskavého, trpezlivého a povzbudzujúceho prístupu vo výchove budúcich matematikov, a to tak učiteľov ako odborníkov, s Borůvkovým menom je spojených niekoľko vedeckých škôl, ktorými sa Slovensko uplatnilo vo svete.

Tak Borůvka je autorom, a to vo svetovom meradle, prvej vedeckej práce, od ktorej možno odvodiť teóriu grafov a následnú slovenskú školu tejto teórie. Borůvka orientoval mladých asistentov Milana Kolibiara (1922–1993) a Jána Jakubíka (nar. 1923) na teóriu zväzov, ktorá bola v tom čase nová a s ktorou sa Slovensko uplatnilo vo svete. Konečne Borůvka vytvoril v teórii diferenciálnych rovníc osobitný smer, na ktorý nadviazali Michal Greguš, Valter Šeda a ďalší.

Pokiaľ ide o druhé vedecké centrum, sústredené na SVŠT, už sme spomínali Schwarzovu teóriu pologrúp. Okrem toho Schwarz bol neprekonateľný pedagóg, čo nechalo stopu na výchove tisícov slovenských inžinierov všetkých smerov. Určitý obraz poskytuje legendárna vysokoškolská učebnica I. Kluvánek, L. Mišík, M. Švec, Matematika I, II, ktorá sa používala v celom Československu a ktorá vznikla na konci 50. rokov.

Čo spôsobilo pozitívny zlom vo vývine slovenskej matematiky ako vednej disciplíny? Predovšetkým vznik vedeckých seminárov a následných vedeckých škôl. Takými boli Schwarzov seminár z teórie pologrúp, Mišíkov seminár z teórie miery a integrálu, Kolibiarov seminár z teórie zväzov, Kotzigov seminár z teórie grafov, Švecov seminár z dynamických systémov, či Šalátov seminár z teórie reálnych funkcií.

Pravdaže, tieto vedecké semináre mali svoje podhubie vo výchove vedeckých pracovníkov. A naopak.

Prvým krokom bol vznik Matematickej olympiády, ktorú založil prof. Hronec, a to v československom meradle. Nie je bez zaujímavosti, že prvým víťazom sa stal Juraj Bosák (1933–1987), neskôr popredná osobnosť v teórii grafov. S potešením môžeme konštatovať, že Slovensko hrá v medzinárodnej matematickej olympiáde dôstojnú úlohu dodnes. Iste k tomu prispeli aj špecializované triedy na základných a stredných školách.

Druhým krokom je študentská vedecká a odborná činnosť na vysokých školách. Aj po rozdelení Československa sme zachovali česko – slovenské kolo, ktoré tiež vedie k udržaniu úrovne tejto súťaže na našich vysokých školách. Ideálnou je účasť vysokoškolákov na vedeckých seminároch, čo začalo už v päťdesiatich rokoch.

Pravdaže, tak ako v 40. rokoch aj tu treba upozorniť na viaceré okolnosti politického charakteru, ktoré na spomínaný pozitívny trend pôsobili negatívne. Predovšetkým to bolo kádrovanie. Študenti i vedeckí pracovníci boli hodnotení aj podľa toho z akej rodiny pochádzajú. Tak samotný Bosák bol síce v r. 1957 prijatý na Hroncovu katedru, ale v r. 1959 z nej musel byť prepustený. Našťastie v tom roku vznikol pod vedením Antona Kotziga (1919–1991) Matematický ústav SAV, kde sa Bosák mohol uchýliť.

Milošovi Franekovi dovolili zmaturovať, ale zabránili mu vstúpiť na vysokú školu, musel najprv do výroby. Pavla Brunovského, ktorý neskôr preslávil Slovensko vo svetovom meradle, najprv nepripustili k štátnici a potom musel čakať pol roka na diplom. Najhoršie z nášho ročníka (1953–1958) dopadol Pavol Pavla, ktorého pred ukončením vysokej školy vylúčili (dokončil ju až po mnohých rokoch), pretože odmietol spolupracovať so ŠtB.

A potom tu bolo prenasledovanie kvôli náboženskému presvedčeniu. Tak Igor Kluvánek (1931–1991), matematik medzinárodného formátu, mohol až po roku obhajovať svoje CSc., aj to len vďaka zásahu Štefana Schwarza. Ladislav Mišík (1921–2001) musel opustiť vysokú školu, našťastie sa mohol uchýliť do Matematického ústavu SAV. Pravdaže, to nie je nič pri porovnaní s Vladimírom Juklom (1925–2012), ktorý strávil 13 rokov vo väzení.

Dnes sa vo verejnosti sem – tam objaví nostalgia za režimom, v ktorom nebolo nezamestnanosti. Ale koľko bolo takých, ktorí sa nemohli uplatniť vo svojej profesii, čo bolo na škodu nielen ich, ale celej spoločnosti.

Azda aj z predošlého textu vidno, že prudký a aj z dnešného pohľadu radostný rozvoj slovenskej matematiky v 50. rokoch sa udial nie vďaka, ale napriek panujúcej spoločenskej a politickej situácii.

3 Tri zdroje a tri súčasti

Slovenská matematika zaznamenala radikálny vzostup v druhej polovici 20. storočia, čo malo pozitívne dôsledky tak v oblasti vyučovania ako aj v oblasti aplikácií. Videli sme, že najväčší skok urobila slovenská matematika v päťdesiatych rokoch. Pravda, začiatok modernej slovenskej matematiky mi splýva so začiatkom 20. storočia. Nedá sa mi obísť postava Jura Hronca. Najmä preto, že patril medzi vzdelaných predprevratových Slovákov. A takých intelektuálov bolo v tom roku 1919 tak málo, že sa nielen navzájom vyhľadávali, ale vyhľadávali aj mladých, nadaných ľudí a osobitne sa im venovali. A práve táto vlastnosť – **prajnosť** stála aj v päťdesiatych rokoch pri základoch modernej slovenskej matematiky.

Určitá symbolika je v tom, že aj založenie československej matematickej olympiády je spojené s menom prof. Hronca. Časovo táto udalosť súvisí s prelomom v organizácii slovenských vysokoškolských matematických pracovísk. Zatiaľ čo dovtedy sa matematika ako odbor i učiteľský smer vyučovala na slovenskej technike, teraz vznikli dve osobitné katedry, jedna na technike (pod vedením Schwarza), druhá na univerzite (pod vedením Hronca).

Hronec pôsobil medzi vojnami ako profesor matematiky na brnenskej technike. Preto na bratislavskú katedru matematiky pozval svojich brnenských kolegov. Ale azda najväčší vplyv na vývin slovenskej matematiky mal z jeho brnenských priateľov prof. Otakar Borůvka. Iste ako medzinárodne uznávaný vedec. Ale pôsobil aj spoločensky. Bol vzorom **láskavosti** a to bola popri prajnosti v matematických kruhoch druhá najvýraznejšia vlastnosť vedúcich matematikov 50. rokov, ktorá viedla k terajšiemu stavu slovenskej matematickej vedy. Aj v Borůvkovi bol ešte kus predprevratového národovectva. Spomínal ako ho táta priviedol na moravskú hranicu a ukázal mu krajinu, v ktorej žijú bratia Slováci, ktorých život je veľmi ťažký.

Matematika na bratislavskej technike mala v päťdesiatych rokoch nádejnú úroveň. Predovšetkým Štefan Schwarz už uznávaný vedec a mimoriadne schopný pedagóg. Úplne originálne myšlienky prinášal Igor Kluvánek, ktosi ich neskôr priradil medzi najvýznamnejšie matematické výsledky druhej polovice 20. storočia na svete. A predsa hlavný smer vo vývine slovenskej matematiky sa dial na Univerzite Komenského. Prečo?

Na Univerzite Komenského bola vychovávaná nová generácia slovenských matematikov. Svoje výsledky začala prinášať Matematická olympiáda. A nečakané pozitívum priniesla jedna z bežných, unáhlených reforiem: zrušenie gymnázií. V tom čase bola na univerzite zrušená výchova učiteľov. Výsledkom bolo do 30 poslucháčov odboru matematika na Univerzite Komenského. Isteže, neboli to len takí študenti akými boli Pavol Brunovský, Miloš Franek, či Jozef Gruska. Ale vznikla tam fantastická pracovná atmosféra umocnená už spomínanou prajnosťou a láskavosťou. Možno to znie paradoxne, ale to bola aj optimálna cesta k dosahovaniu nových vedeckých výsledkov.

Táto atmosféra korešpondovala aj s atmosférou na katedre matematiky. Vo výchove sa výnimočne vynímal Milan Kolibiar. Na jednej strane na prednáškach dokázal otvoriť svoje vlastné matematické myslenie. Na druhej strane výnimočným spôsobom **povzbudzoval** svojich študentov. Bol aj vedúcim nepovinného odborného študentského krúžku, z ktorého sa prirodzeným spôsobom vyvinul vedecký seminár z teórie zväzov. V tej istej dobe vznikli aj ďalšie vedecké semináre, z ktorých vznikli vedecké školy: teória grúp, dynamické systémy, teória integrálu, teória reálnych funkcií, či teória grafov. V tej istej dobe vznikli aj ústavy SAV, v ktorých našli útočisko mnohí nadaní výskumníci. Vznikli aj matematické centrá vo viacerých slovenských mestách, najmä v Košiciach. Ale kľúčovým bodom bol onen kolibiarovský svet nezištnosti a prajnosti.

4 Kvalita versus kvantita

Celými dejinami nášho učiteľstva sa tiahne zápas o kvalitu. Nie kvantita, kvalita je rozhodujúca tak v oblasti vedeckej ako pedagogickej. Pravdaže, v najzreteľnejšej forme sa porušenie tejto zásady prejavuje na viacerých vysokých školách. Tam sa vyžadujú čísla, napr. počty publikácií, či citácií, nie ich kvalita. A tak sa na viacerých vysokých školách tvoria skriptá nie kvôli študentom, ale kvôli autorovým číslam. Do roku 1989 rozhodoval o každej vysokoškolskej profesúre Ústredný výbor KSČ. Ale veľké doktoráty, teda hodnosť Doctor scientiarum, boli v rukách vedeckých grémií. Dnes akoby namiesto ústredného výboru rozhodovali počítače, pred čím už pred 80 rokmi vystríhal Karel Čapek. A tak hodnosť DrSc. sme prakticky zlikvidovali, pretože o nej skôr ako kvalita mimoriadnych vedeckých výsledkov rozhodujú dosiahnuté čísla, značne prehnané.

Je prirodzené, že táto atmosféra sa prenáša aj na základné a stredné školy. Napr. nadhodnotením významu formálnych testov. Pritom je známe, že napr. praktický lekár až 80% informácie pri posudzovaní choroby svojho pacienta berie z dialógu s pacientom. Nie inak je to s učiteľom.

Jednou z príčin preceňovania testov je nedôvera k učiteľom. Nedôveruje sa tak učiteľovi základnej či strednej školy ako aj špičkovým vedeckým pracovníkom.

Literatúra

[1] Hlaváč A.: *Matematici, fyzici a astronómia na Slovensku 2*. JSMF, Bratislava, 1999.

[2] Hronec O., Suláček J., Riečan B.: *Starý pán: Kniha o Jurovi Hroncovi*. VEDA, Bratislava, 1999.

[3] Kolibiar M.: *O matematikoch vážne i úsmevne*. JSMF, Bratislava, 1996.

[4] Nemoga K., Riečan B.: *Matematika v b mol: Štefan Schwarz – matematik a pedagóg*. VEDA, Bratislava, 1999.

[5] Znám, Š. a kol.: *Pohľad do dejín matematiky*. Alfa, Bratislava, 1986.

Adresa

Prof. RNDr. Beloslav Riečan, DrSc.
FPV UMB Tajovského 40
97401 Banská Bystrica
e-mail: *Beloslav.Riecan@umb.sk*

मष्टौ निखिलनवमभागाश्चालिनी भृङ्गमेकं। निशि
परिमललुब्धं पद्ममध्ये निबद्धं प्रतिरणति रणन्तं
ब्रूहि कान्तेऽलिसङ्ख्यां ॥ १२१ ऽऽ ॥

अत्रालिकुलप्रमाणं याव २ एतदर्द्धमूलं या १
निखिलनवमभागा अष्टौ याव १६/९ मूलभागैक्यं
द्वष्टालियुगलयुतं राशिसममिति पक्षौ समच्छेदी
कृत्य छेदगमे

न्यासः याव १८ या ० रू ०
याव १६ या ९ रू १८

शोधने कृते जातौ पक्षौ

याव २ या ९ रू ०
याव ० या ० रू १८

एतावष्टभिः सङ्गुण्य तयोरेकाशीतिरूपाणि
प्रक्षिप्य मूले गृहीत्वा तयो साम्यकरणार्थं

न्यासः या ४ रू ९
या ० रू १५

प्राग्वल्लब्धं यावत्तावन्मानं ६ अस्य वर्गेणोत्थापि
ता जातालिकुलसङ्ख्या ७२

उदाहरणं। पार्थः कर्णवधाय मार्गणगणं क्रुद्धो

Bījaganita (Bhāskara II)

Převzato z D. E. Smith: *History of Mathematics*,
Vol. 2, *Special Topics of Elemetary Mathematics*,
Dover Publications, New York, 1958.

POČÁTKY ALGEBRY VE STARÉ INDII

IRENA SÝKOROVÁ

Abstract: This paper aims to present some of the tasks that medieval Indian algebra dealt with. Indian scholars were the first who systematically denoted unknown by letters, introduced abbreviations to express the powers of unknowns and the product of those powers. The most important results achieved by Indian mathematicians were in the field of indeterminate equations.

1 Úvod

Hlavním tématem středověké indické algebry bylo řešení úloh, které dnes můžeme vyjádřit jak rovnicí s jednou neznámou, tak rovnicemi s více neznámými. Indičtí učenci formulovali pravidla pro řešení lineárních a kvadratických rovnic i jejich soustav. Zabývali se rovněž některými rovnicemi vyšších stupňů a zejména neurčitými rovnicemi. Indická algebra zahrnovala i operace se zápornými čísly a velmi obratné počítání s iracionalitami.

Ze středověkých indických algebraických prací je nejdůležitější *Bījaganita,* jejímž autorem je jeden z nejvýznamnějších středověkých indických matematiků Bhāskara II. (1114–1185). Zčásti se algebrou zabývají rovněž práce *Brāhma-sphuta-siddhānta*, kterou napsal Brahmagupta (asi 598 až 670), *Ganita-sāra-samgraha,* jejímž autorem je Mahāvīra (asi 800 až 870) a *Āryabhatīya*, převážně astronomická práce Āryabhaty I. (asi 476 až 550).

2 Terminologie a symbolika

Staří Indové algebře říkali *bījaganita, avykta-ganita* nebo *kuttaka-ganita*[1]. Algebře se ve staré Indii přikládal větší význam než aritmetice. Bhāskara II. považoval algebru, tj. vědu o počítání s neznámými, za zdroj pro aritmetiku, tj. vědu o počítání se známými. Charakteristickým rysem indické algebry je obecná formulace pravidel a pokusy o důkazy, které byly většinou geometrické. Bhāskara II. svá tvrzení nedokazoval systematicky, tyto snahy jsou ojedinělé a svou formou připomínají některé důkazy z řecké matematiky.

Neznámá byla nazývána *yāvat-tāvat* (tolik-kolik) a označována zkratkou *yā*. Pokud bylo potřeba pojmenovat více neznámých, termín *yāvat-tāvat* označoval první z nich a pro ostatní se užívaly zpravidla zkratky barev, například *kālaka* (černá, zkráceně *kā*), *nīlaka* (modrá, *nī*), *pītaka* (žlutá, *pī*), *lohitaka* (červená, *lo*), nebo písmena abecedy (viz [3]).

Druhá mocnina se nazývala *varga* (čtverec), třetí mocnina *ghana* (krychle, těleso). Výrazy pro další mocniny byly tvořeny pomocí těchto slov multiplikativním způsobem,

[1] Termín *kuttaka* původně označoval tu část algebry, která se zabývá řešením neurčitých rovnic prvního stupně, g*anita* byla věda o počítání.

tj. *varga-varga* byla čtvrtá mocnina, *varga-ghana* značilo šestou mocninu, *ghana-ghana* devátou mocninu, *ghana-varga-varga* byl výraz pro dvanáctou mocninu atd. Mocniny, jejichž exponent není násobkem dvou nebo tří, se vyjadřovaly pomocí termínu *ghāta*, který označoval sčítání exponentů. Tedy například pátá mocnina byla vyjádřena *varga-ghana-ghāta*, sedmá jako *varga-varga-ghana-ghāta.* Například *yā va* (*yāvat varga*) znamenalo x^2. V případě, kdy bylo potřeba vyjádřit součin mocnin více neznámých, následovala za celým výrazem ještě zkratka *bhā* (*bhāvita*, tj. součin), například x^3y^2 bylo zapsáno jako *yā gha kā va bhā* (*yāvat ghana kālaka varga bhāvita*).

Pro čísla představující koeficienty u neznámých se používaly různé termíny, které můžeme přeložit jako *číslo* nebo *násobitel.* Absolutní člen v rovnici se nazýval *rūpa*, tj. viditelný.

3 Rovnice

Podstatnou část středověké indické algebry představovalo řešení rovnic. Nejprve se sestavovala rovnice, která měla dvě strany. Rovnost byla někdy vyjádřena zkratkou *pha* (*phalah*, tj. rovný), někdy však nebyl uveden žádný symbol. Strany rovnice se zapisovaly pod sebe; v prvním řádku byla levá strana, ve druhém pravá, v každém řádku mocniny neznámých klesaly zleva doprava, odpovídající členy byly pod sebou, chybějící členy označeny nulovým koeficientem. Například zápis (viz [6]):

याव २ या ९̇ रू ०	v přepisu	*yā va* 2 *yā* $\dot{9}$ *rū* ○
याव ० या ० रू १८		*yā va* ○ *yā* ○ *rū* 18

znamenal $2x^2 - 9x = 18$.

Rovnice se rozdělovaly do několika tříd. Tato klasifikace se u jednotlivých učenců mírně lišila, uvedeme rozdělení podle Bhāskary II. (viz [2]):

1. rovnice s jednou neznámou:
   a) lineární,
   b) kvadratické a vyšších stupňů;
2. rovnice s více neznámými:
   a) lineární,
   b) kvadratické a vyšších stupňů,
   c) rovnice obsahující smíšený součin neznámých.

Při řešení lineárních rovnic se někdy užívala metoda chybného předpokladu, která původně pomáhala překonat nedostatek vhodné symboliky, kdy ještě neexistoval symbol pro neznámou. V pozdějších indických algebraických dílech se už tato metoda nevyskytuje.

Dvě pravidla pro řešení obecné kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ s kladným koeficientem u kvadratického členu ($a \in Q^+$; $b, c \in Q$) uvedl Brahmagupta (viz [2]). Tím se lišil od dřívějších matematiků, kteří uvažovali pouze rovnice s kladnými koeficienty. Brahmagupta postup řešení kvadratické rovnice nazýval *odstranění středního členu*; patrně proto, že neznámá v první mocnině byla zapsána uprostřed každé strany rovnice. Postup odpovídá doplnění levé strany na čtverec a odmocnění, v současné symbolice můžeme pravidla vyjádřit vzorci $x = \dfrac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$, resp. $x = \dfrac{\sqrt{ac + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2} - \dfrac{b}{2}}{a}$. Existenci dvou kořenů však nijak nezmiňoval. Se dvěma (kladnými) kořeny kvadratické rovnice počítal Mahāvīra a Bhāskara II. (viz [5], [2]). Řešením rovnic vyšších stupňů se indičtí učenci příliš nezabývali. Bhāskara II. se pokusil aplikovat pravidlo pro eliminaci středního členu i na kubické a bikvadratické rovnice.

Pro řešení jednoduchých soustav lineárních rovnic o dvou neznámých se používala metoda *sankramana*. Řešení soustavy $(a, b \in Q^+)$

$$\begin{aligned} x + y &= a, \\ x - y &= b \end{aligned} \quad \text{bylo ve tvaru} \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(a+b), \\ y &= \frac{1}{2}(a-b). \end{aligned}$$

Indičtí matematikové neznali obecnou metodu řešení soustav lineárních rovnic s více neznámými, postup řešení vždy závisel na typu soustavy.

U jednoduchých soustav nelineárních rovnic o dvou neznámých se často pomocí známých identit vyjádřil součet a rozdíl neznámých, a pak se řešilo podle metody *sankramana*. Například Brahmagupta využil identitu $(x-y)^2 = 2(x^2 + y^2) - (x+y)^2$ při řešení soustavy

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a, \\ x + y &= b. \end{aligned}$$

Nejprve si vyjádřil rozdíl $x - y = \sqrt{2(x^2 + y^2) - (x+y)^2} = \sqrt{2a - b^2}$, a protože součet neznámých byl znám, mohl podle metody *sankramana* vypočítat $x = \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{2a - b^2}\right)$, $y = \frac{1}{2}\left(b - \sqrt{2a - b^2}\right)$.

Patrně k nejvýznamnějším výsledkům dospěli indičtí matematici při studiu neurčitých rovnic. Neurčitou lineární rovnici $ax + c = by$ se zabývali Āryabhata I., Brahmagupta, Mahāvīra i Bhāskara II. (viz [1], [2], [5], [4]). Metodu nazývali *kuttaka* a považovali ji za důležitou. Indický postup připomíná metodu využívající řetězové zlomky (viz [7]).

Dalších pozoruhodných výsledků dosáhli staří Indové při řešení tzv. Pellovy rovnice, tj. rovnice $ax^2 + 1 = y^2$, kde a je přirozené číslo, které není druhou mocninou. Důležitá pravidla vedoucí k nalezení nejmenší dvojice přirozených čísel (x,y), která jsou řešením Pellovy rovnice, uvedli především Brahmagupta a Bhāskara II. (viz [2], [4], [8]).

Poměrně často se v indické matematice vyskytují i úlohy, které dnes můžeme vyjádřit tzv. dvojitými rovnicemi, například soustava $(a, b, c, d \in Q; u, v \in N)$

$$\begin{aligned} ax + b &= u^2, \\ cx + d &= v^2. \end{aligned}$$

Bhāskara II. zformuloval dosti složité pravidlo, jak je možné vhodnou substitucí soustavu převést na Pellovu rovnici (viz [2]). Rovněž počítal i několik úloh, které vyžadovaly znalost řešení dvojité rovnice vyššího stupně. Zadání i postup řešení připomíná některé úlohy Diofantovy. V práci *Bījaganita* nalezneme několik zajímavých příkladů, v nichž si autor musel poradit s řešením soustavy s více než dvěma rovnicemi. Byly to úlohy, kde se hledala většinou dvě přirozená čísla, jejichž součet, rozdíl, součin apod. byl druhou nebo třetí mocninou nějakého přirozeného čísla.

4 Závěr

Algebraické výpočty od aritmetických neodlišovalo jen dokazování, jak tvrdil Bhāskara II., ale také symbolika. Indičtí učenci jako první začali systematicky označovat neznámé písmeny, zavedli zkratky k vyjádření mocniny neznámých a pro součiny těchto mocnin. K odlišení záporných čísel sloužila tečka umístěná nad číslem, proto bylo možno zapsat rovnici i se zápornými koeficienty, což výrazně zjednodušilo klasifikaci rovnic.

Některé úlohy a metody jejich řešení připomínají Diofantovu *Aritmetiku*, podstatným rozdílem je však obor neznámých. Indové až na výjimky hledali řešení pouze v oboru přirozených čísel. Řada algebraických metod se z Indie šířila do arabského světa a zprostředkovaně tak ovlivnila matematiku evropskou.

Literatura

[1] Clark W. E.: *The Aryabhatiya of Aryabhata*. The University of Chicago Press, Chicago, Illinois, 1930.

[2] Colebrooke H. T.: *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara*. John Murray, London, 1817.

[3] Datta B., Singh A. N.: *History of Hindu Mathematics (Part II)*. Molital Banarsidass, Lahore, 1938.

[4] Plofker K.: *Mathematics in India*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2009.

[5] Rangacarya M.: *Ganita-sara-sangraha of Mahaviracarya with English Translation and Notes*. Government Press, Madras, 1912.

[6] Smith D. E.: *History of Mathematics, Vol. 2, Special Topics of Elementary Mathematics*. Dover Publications, New York, 1958.

[7] Sýkorová I.: *Kuttaka*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 34. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2013, 159–162.

[8] Sýkorová I.: *Pellova rovnice ve staré Indii*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 32. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2011, 255–260.

Adresa

RNDr. Irena Sýkorová
Katedra matematiky
Vysoká škola ekonomická
Ekonomická 957
148 00 Praha 4
e-mail: *sykorova@vse.cz*

CHARLES BABBAGE A JEHO PŘÍNOS V TEORII FUNKCIONÁLNÍCH ROVNIC

PETR ŠATNÝ

Abstract: We deal with Babbage's contribution to the theory of functional equations. After a short profile of Charles Babbage and a general comment on the topic of functional equations, we describe three Babbage's articles involving his original way of solutions of some equations. Finally, we introduce Babbage's functional equation with a specific class of particular solutions.

1 Úvod

Charles Babbage (26. prosince 1791 – 18. října 1871) byl anglický matematik, filozof, vynálezce a strojní inženýr, který se proslavil jako „otec“ moderních počítačů díky svému návrhu *Difference engine*, počítacímu stroji, jejž později vylepšil a pojmenoval *Analytical Engine*. I přes bezchybný návrh stroje a vysokou finanční podporu se však počítač kvůli technické náročnosti nepodařilo zkonstruovat ([1]). Nicméně se Babbageův výzkum stal zdrojem inspirace pro konstrukci nových mechanických počítacích strojů. Tímto obrovským přínosem v oblasti výpočetních strojů se Babbage nesmazatelně zapsal do dějin vědy a zastínil tím své jiné tvůrčí aktivity, zejména na poli matematiky[1], a to svůj výzkum v teorii funkcionálních rovnic, o kterém náš příspěvek pojednává.

Ačkoliv funkcionální rovnice nejsou samostatným tématem osnov středoškolské matematiky, setkáváme se s nimi při zavádění některých elementárních pojmů, jako například při definování liché funkce jakožto řešení funkcionální rovnice $f(-x) = -f(x)$. Rozhodnout, zda funkce s daným předpisem splňuje konkrétní funkcionální rovnici, můžeme zjistit rutinním dosazením, avšak nalézt všechna její řešení není zdaleka tak snadné. Neexistuje totiž obecná metoda, jak se „dopočítat“ ke všem funkcím, které dané rovnici vyhovují. Nalezení postupu, jak získat všechna nebo alespoň nekonečně mnoho řešení (funkcí) určité (prakticky důležité) funkcionální rovnice (a tím i všech rovnic, které lze na ni transformovat), bylo proto často natolik významnou událostí, že tato rovnice byla pojmenována po svém řešiteli. Můžeme se tak setkat s funkcionálními rovnicemi pojmenovanými například po Cauchym, Eulerovi, D'Alembertovi a také Babbageovi.

2 Charles Babbage a funkcionální rovnice

Babbageův přínos pro oblast funkcionálních rovnic je založen na jeho příspěvcích do vědeckých magazínů v období 1815–1820. Jak sám autor píše v prvním článku [3], byl přesvědčen, že nalezl originální způsob řešení funkcionálních rovnic 1. řádu[2]. Kromě

[1] O výzkumu Charlese Babbage v matematice se lze více dozvědět v publikaci *The Mathematical Work of Charles Babbage* [2].

[2] Řádem funkcionální rovnice Babbage označoval počet složení funkce, která se v rovnici vyskytuje, např. $f\big(x + f(x)\big) = x$ je funkcionální rovnice 2. řádu, $f\big(x+1\big) = f\Big(f\big(f(x)\big) + y\Big)$ je funkcionální rovnice 3. řádu.

toho Babbage zkoumal i řešení jistých funkcionálních rovnic vyšších řádů, pro které se později vžil název Babbageovy funkcionální rovnice.

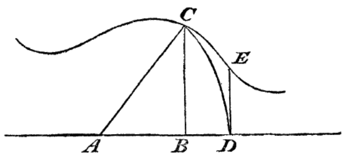
2.1 Článek *An essay towards the calculus of functions* (1815)

V roce 1815 v článku [3] z názvu tohoto oddílu Babbage nejdříve předložil motivační problémy a zavedl pojmy, které hodlal dále využívat. V další části článku pak uvedl 21 řešených problémů (příkladů funkcionálních rovnic). Originální způsob Babbageova řešení spočíval v konstrukci „obecného[3]" řešení pomocí řešení partikulárního. Jako příklad uveďme úvodní problém tak, jak jej uvedl a vyřešil Babbage ([3, str. 395]):

Problém I. Je požadováno nalezení obecného řešení ψ funkcionální rovnice $\psi(x) = \psi(\alpha(x))$ za předpokladu, že známe jedno partikulární řešení.

Nechť f označuje jedno konkrétní řešení zadané rovnice a položme $\psi = \phi \circ f$, kde ϕ je libovolná funkce. Je evidentní, že taková funkce ψ splňuje stejnou funkcionální rovnici jako funkce f, tj. že rovnost $\phi(f(x)) = \phi(f(\alpha(x)))$ je identitou, neboť platí identita $f(x) = f(\alpha(x))$. Je-li například zadána funkcionální rovnice $\psi(x) = \psi(-x)$ a známe-li její partikulární řešení $f(x) = x^2$, její „obecné" řešení je tvaru $\psi(x) = \phi(x^2)$.

Některé problémy Babbage obohatil i o grafické znázornění vlastností konkrétních funkcí, které odpovídají zadané funkcionální rovnici. Například v Problému XVII ([3, str. 415]) se zabýval funkcionální rovnicí $\psi(\alpha(x, \psi(x))) = x$, z níž odvodil „obecné" řešení ve tvaru $\psi(x) = \phi^{-1}(f(\phi(x)))$, kde f je partikulární řešení a ϕ je invertibilní funkce splňující $\phi^{-1}(f^{-1}(x)) = \alpha\left(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(f(x))\right)$. Na obrázku 1 je znázorněna vlastnost funkcí vyřešené funkcionální rovnice se speciální funkcí α. Babbage tuto vlastnost popsal tak, že při libovolné volbě úsečky AB, kde A leží v počátku a $|AB| = x$, se nejprve zkonstruuje „nad" bodem B bod C ležící na grafu ψ, tj. $BC = \psi(x)$. Bod D je pak průsečíkem souřadnicové osy s kružnicí se středem A a poloměrem $|AC|$. Konečně nad bodem D se sestrojí bod E ležící na grafu ψ. Na funkci ψ je pak kladen požadavek, aby platilo $|AB| = |ED|$. S ohledem na výše popsanou konstrukci platí $|AD| = |CA| = \sqrt{x^2 + (\psi(x))^2}$ a $|ED| = \psi(|AD|)$, odkud Babbage odvodil příslušnou rovnici $x = \psi\left(\sqrt{x^2 + (\psi(x))^2}\right)$ z Problému XVII, která odpovídá funkci $\alpha(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Obrázek 1 ([3, str. 416]).

V Problému X, resp. XI ([3, str. 411]) se Babbage zabýval řešením funkcionální rovnice $\psi^2(x) = \psi(\psi(x)) = x$, resp. $\psi^n(x) = x$, kde $\psi^n(x) = \psi\left(\psi^{n-1}(x)\right)$ se dnes obvykle nazývá n-tou iterací funkce ψ. Tato konstrukce opakovaného skládání téže funkce našla uplatnění v řadě matematických modelů a rovnici $\psi^n(x) = x$ se tak dostalo pojmenování Babbageova. Pro ni autor v článku [3] předložil stejný způsob řešení jako

[3] Pojmem obecné řešení Babbage označoval tvar předpisu funkce, z něhož lze odvodit nekonečně mnoho funkcí splňující danou funkcionální rovnici (nejedná se tedy o zápis tvaru všech řešení).

u funkcionálních rovnic prvního řádu, tj. sestavení „obecného“ řešení ψ z partikulárního řešení f a libovolné funkce ϕ. Pro funkcionální rovnici $\psi^n(x) = x$ se zadaným $n \in \mathbb{N}$ Babbage totiž ukázal, že „obecným“ řešením jsou funkce tvaru $\psi(x) = \phi^{-1}(f(\phi(x)))$. Snadným dosazením se o tomto tvrzení můžeme přesvědčit i my: identita

$$\psi^n(x) = \underbrace{(\phi^{-1} \circ f \circ \phi) \circ (\phi^{-1} \circ f \circ \phi) \circ \ldots \circ (\phi^{-1} \circ f \circ \phi)}_{n}(x) = (\phi^{-1} \circ f^n \circ \phi)(x) = x$$

platí, platí-li identita $f^n(x) = x$.

2.2 Článek *An essay towards the calculus of functions. Part II* (1816)

V tomto oddíle se budeme věnovat Babbageovu článku [4] z roku 1816, který navazuje na jeho článek [3] z předešlého roku. Je v něm uvedeno 42 řešených problémů (funkcionálních rovnic). Babbage se zde nově zaměřil na funkcionální rovnice s neznámými funkcemi o dvou proměnných a funkcionální rovnice obsahující derivace funkcí. Stejným způsobem jako v předešlém článku nalezl Babbage „obecné“ řešení funkcionálních rovnic s pomocí partikulárního řešení. Jako příklad můžeme uvést znění i řešení prvního problému ([4, str. 184]):

Problém I. Je požadováno nalezení řešení funkcionální rovnice $\psi(x, y) = \psi(\alpha(x), \beta(y))$.

Položením $\psi(x, y) = \phi(f(x), g(y))$ a dosazením tohoto tvaru do zadání dostaneme $\phi(f(x), g(y)) = \phi(f(\alpha(x)), g(\beta(y)))$, což bude platit, budou-li splněny postačující podmínky ve tvaru identit $f(x) = f(\alpha(x))$ a $g(y) = g(\beta(y))$. Stačí tedy najít partikulární řešení f a g dvou (na sobě nezávislých) rovnic z Problému I článku [3]. „Obecné“ řešení aktuálního Problému I pak lze psát ve tvaru $\psi(x, y) = \phi(f(x), g(y))$. Jako názorný příklad Babbage uvádí rovnici $\psi(x, y) = \psi\left(-x, \frac{1}{y}\right)$, které odpovídají rovnice $f(x) = f(-x)$ s partikulárním řešením $f(x) = x^2$ a rovnice $g(y) = g\left(\frac{1}{y}\right)$ s partikulárním řešením $g(y) = \frac{y^2+1}{y}$. „Obecné“ řešení je pak Babbagem zapsáno ve tvaru $\psi(x, y) = \phi\left(x^2, \frac{y^2+1}{y}\right)$, kde ϕ je libovolná funkce.

2.3 Příspěvek *Examples of the Solutions of Functional Equations* (1820)

Výsledky hledání nejobecnějšího řešení funkcionální rovnice $\psi^n(x) = x$ Babbage publikoval v příspěvku [5] z názvu tohoto odstavce. Jak sám autor v úvodu píše, cílem bylo zpřístupnit čtenářům problematiku funkcionálních rovnic a jejich řešení a také jim poskytnout návody, jak tyto rovnice řešit.

Nejdříve se Babbage zabývá funkcionální rovnicí $\psi^n(x) = x$ pro hodnoty $n = 2$, $n = 3$ a poté pro obecné n. Ve všech případech odvozuje řešení[4] ve tvaru $\psi(x) = (\phi^{-1} \circ f \circ \phi)(x)$, kde ϕ je libovolná funkce mající inverzi a f je partikulární řešení k příslušné funkcionální rovnici. S odkazem na Hornerův článek [6] z roku 1817 Babbage uvádí nekonečně mnoho

[4] Vědom si skutečnosti, že neodvodil tvar všech řešení, nepoužívá tentokrát Babbage termín „obecné“ řešení jako v předešlých článcích.

partikulárních řešení funkcionální rovnice $\psi^n(x) = x$ ve tvaru $f(x) = \dfrac{a+bx}{c+dx}$, kde *a, b, c, d* jsou libovolné konstanty splňující při označení $K = \cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$, kde $k \in \mathbb{Z}$, podmínku $2(1+K)ad = -(b^2 - 2Kbc + c^2)$. Ve srovnání s dřívějšími články tak Babbage podává přesnější představu o bohatosti množin řešení funkcionálních rovnic $\psi^n(x) = x$. Dále v článku [5] spolu i s výsledky autor uvádí dalších 83 funkcionálních rovnic, z nichž některé doplňuje o postup výpočtu řešení.

3 Závěr

Jak jsme uvedli, Charles Babbage hlouběji studoval funkcionální rovnice $f^n(x) = x$ pro „iteračně-periodické" funkce *f*. Ačkoliv nedokázal nalézt všechna jejich řešení, popsal postup sestavení nekonečně mnoha funkcí splňujících tyto a obdobně zadané rovnice. Svým výzkumem dal možnost vzniknout otázkám a výzvám pro další generace matematiků, zejména při zkoumání různých modifikací funkcionální rovnice $f^n(x) = x$, kterou dnes po právu nazýváme Babbageova.

Literatura

[1] Wikipedia (The free encyclopedia): *Charles Babbage* [online]. Poslední revize 7. února 2014 [cit. 21. 2. 2014].
http://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Babbage.

[2] Dubbey J. M.: *The Mathematical Work of Charles Babbage*. Cambridge University Press, 1978.

[3] Babbage Ch.: *An essay towards the calculus of functions*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London 105(1815), 389–423.

[4] Babbage Ch.: *An essay towards the calculus of functions. Part II.* Philosophical Transactions of the Royal Society of London 106(1816), 179–256.

[5] Babbage Ch.: *Examples of the solutions of functional equations*. London, s.n., 1820.

[6] Horner W. G.: *Solution of the Equation* $\psi^n(x) = x$. The Annals of philosophy, Vol. X, July to December, 1817, 341–346.

Adresa

Mgr. Petr Šatný
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita
Kotlářská 2
611 37 Brno
e-mail: *satnyp@mail.muni.cz*

ZNOVUZROZENÍ
WEYROVA KANONICKÉHO TVARU

MARTINA ŠTĚPÁNOVÁ

Abstract: In 1885, Eduard Weyr discovered the so-called *typical form*, which is nowadays called the Weyr canonical form. It is permutationally similar to the commonly used Jordan canonical form of the same matrix and has become much better known in the last few years and even a monograph dedicated to this topic was published in 2011.

1 Úvod

Při hledání odpovědí na otázky týkající se vzniku a vývoje jednotlivých vědeckých disciplín nalezneme mnoho příkladů matematických pojmů, vztahů a výsledků, které byly relativně brzy po svém vzniku dále studovány, postupně rozvíjeny, zpřesňovány a využívány v jiných oborech. Některé pojmy dokonce vstoupily do základů samostatných teorií, mnohé poznatky se nedlouho po svém zrodu zařadily mezi všeobecně známá fakta v celosvětové matematické komunitě. Jen málokterý pojem byl po svém prvním zavedení v podstatě zapomenut a teprve po dlouhém období, v němž se náplň i charakter výzkumu příslušné disciplíny radikálně proměnily, byl znovuobjeven a je doceňován až v kontextu novodobého vývoje. Příkladem pojmu, který má za sebou takovýto vývoj, je tzv. *Weyrův kanonický tvar*.

2 Základní pojmy

Uveďme několik definic a vlastností, jejichž znalost je pro orientaci v dalším textu nezbytná. Pro komplexní čtvercovou matici A řádu n a její s-násobné vlastní číslo λ budeme *Weyrovou charakteristikou matice A příslušnou vlastnímu číslu λ* rozumět posloupnost přirozených čísel $\eta(\lambda) = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_t)$, kde $\eta_i = \operatorname{nul}\,(A - \lambda E)^i - \operatorname{nul}\,(A - \lambda E)^{i-1}$, $i = 1, \dots, t$. Přitom E je jednotková matice příslušného řádu, $\operatorname{nul} A$ značí nulitu matice A (tj. rozdíl jejího řádu a hodnosti) a t je nejmenší přirozené číslo, pro které

$$\operatorname{nul}(A - \lambda E) < \operatorname{nul}(A - \lambda E)^2 < \cdots < \operatorname{nul}(A - \lambda E)^t = \operatorname{nul}(A - \lambda E)^{t+1} = \cdots$$

Lze dokázat, že $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \cdots \geq \eta_t$. Soubor $\eta(A)$ Weyrových charakteristik matice A příslušných všem jejím vlastním číslům budeme nazývat *Weyrovou charakteristikou matice A*. Nechť symbol $E_{i\times j}$, $i \geq j$, značí matici

$$E_{i\times j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

typu $i \times j$, jejíž prvních j řádků je tvořeno jednotkovou maticí a případné zbývající řádky (v počtu $i-j$) obsahují samé nuly, nechť O je nulová matice a nechť $\eta(\lambda) = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_t)$ je Weyrova charakteristika matice A příslušná vlastnímu číslu λ. Potom

$$\begin{pmatrix} \lambda E_{\eta_1 \times \eta_1} & E_{\eta_1 \times \eta_2} & O & \cdots & O \\ O & \lambda E_{\eta_2 \times \eta_2} & E_{\eta_2 \times \eta_3} & \cdots & O \\ O & O & \lambda E_{\eta_3 \times \eta_3} & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & \lambda E_{\eta_t \times \eta_t} \end{pmatrix}$$

je *Weyrův blok příslušný vlastnímu číslu* λ a blokově diagonální matice sestavená z Weyrových bloků příslušných všem vlastním číslům matice A je *Weyrův kanonický tvar matice A*. Čtvercová matice a jí příslušný Weyrův kanonický tvar jsou podobné matice.

3 Historie Weyrova kanonického tvaru

3.1 Zavedení pojmu a jeho následné zapomnění

Uvažovaný kanonický tvar byl poprvé publikován pražským matematikem Eduardem Weyrem (1852–1903) roku 1885 v krátkém článku *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* [13]. Do konce osmdesátých let 19. století byl prezentován ještě v několika málo pracích téhož autora.[1] Tehdy byl uveden v poněkud odlišném tvaru: skalární matice $\lambda E_{i \times i}$ byly na diagonálu umístěny v opačném pořadí a matice $E_{i \times j}$ tak musely být do kanonického tvaru situovány pod, nikoli nad hlavní zobecněnou diagonálu. Nazýván byl termínem „*typický tvar matice*" nebo jednoduše „*typická matice*" náležící dané matici. Odezvy se Weyrův tvar nedočkal. Vzhledem k tehdejší době, kdy primární oblastí zájmu matematiků zabývajících se poznatky, které jsou dnes řazeny do lineární algebry, byly determinanty, se tomu nelze příliš divit. Ani po rozmachu teorie matic přibližně ve třicátých letech 20. století se Weyrovy práce na výsluní nedostaly, jejich autor byl tehdejší matematickou komunitou vnímán především jako geometr. Celosvětově se začal používat Jordanův kanonický tvar, který poprvé zavedl německý matematik Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) v článku *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* [12] z roku 1868.

Během následujícího století byla v literatuře občas zmiňována Weyrova charakteristika, větší zájem jí byl věnován až v osmdesátých a devadesátých letech 20. století, kdy byla studována její souvislost s posloupnostmi zavedenými terminologií teorie grafů. Do širšího povědomí se dostala v roce 1999, kdy Helene Shapiro publikovala ve známém a širokou komunitou čteném časopisu The American Mathematical Monthly článek *The Weyr characteristic* [10]. A právě v tomto textu byl Weyrův kanonický tvar poprvé uveden pod „historicky správným" termínem.

3.2 Znovuzrození pojmu

Vraťme se však do roku 1983. Tehdy publikoval Genrich Ruvimovič Belitskij[2] rusky psanou práci, jejíž anglický název je *Normal forms in a space of matrices* [1]. Publikace

[1] Bližší informace o těchto publikacích včetně popisu originální konstrukce kanonického tvaru viz [11].
[2] Roku 1991 emigroval z Ukrajiny, dnes působí v Izraeli.

prezentovala algoritmus pro současnou transformaci k komplexních matic na kanonický tvar pomocí téže podobnosti. Podstatným pilířem tohoto algoritmu je Weyrův kanonický tvar. Belitskij však nepoužil tento termín, ale název *modified Jordan form*. S Weyrovou teorií totiž nebyl obeznámen a k pojmu dospěl při hledání tvaru matice, který má jisté vlastnosti (viz níže), jež známý Jordanův kanonický tvar nemá. Jeho algoritmus zaujal ukrajinského matematika Vladimira Vasil'eviče Sergejčuka, který autorovi doporučil, aby článek přepracoval a v detailnější podobě publikoval znovu. Původně třináctistránkovou publikaci tak nahradil takřka o dvacet stran delší článek, který vyšel roku 2000 v angličtině pod mírně pozměněným názvem *Normal forms in matrix spaces* [2]. Belitského výsledek byl často citován, např. roku 2013 se tak stalo v druhém vydání známé knihy *Matrix Analysis* [5] Rogera A. Horna a Charlese R. Johnsona:

The Weyr form (in its standard partition) was rediscovered by G. Belitskii, whose motivation was to find a canonical form for similarity with the property that every matrix commuting with it is block upper triangular. ([5], str. 215)

Belitskij již na počátku osmdesátých let věděl, že mezi Weyrovým a Jordanovým kanonickým tvarem lze přecházet pomocí simultánních permutací řádků a sloupců. Byl navíc zřejmě prvním, kdo formuloval větu, která určuje matice komutující s daným Weyrovým tvarem matice mající jediné vlastní číslo. Tyto matice jsou, kvůli zmíněnému požadavku, horní (blokově) trojúhelníkové a mezi jejich bloky platí jednoduchý vztah:

Nechť W je Weyrův blok řádu n příslušný některému vlastnímu číslu, jehož příslušná Weyrova charakteristika je $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$, kde $t \geq 2$. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tt} \end{pmatrix}$$

je bloková matice řádu n, jejíž bloky A_{ij} jsou typu $\eta_i \times \eta_j$. Potom $WA = AW$ právě tehdy, když A je horní blokově trojúhelníková matice, pro jejíž bloky platí

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{i+1,j+1} & * \\ O & * \end{pmatrix} \qquad \text{pro } 1 \leq i \leq j \leq t-1,$$

*kde na místě * jsou matice o libovolných prvcích (pro $\eta_j = \eta_{j+1}$ nejsou v bloku A_{ij} tyto matice obsaženy; analogicky pro $\eta_i = \eta_{i+1}$ nejsou v bloku A_{ij} obsaženy poslední řádky začínající nulami).*

Algoritmus rozvinul v roce 2000 již zmíněný Vladimir Sergejčuk v obsáhlém pojednání *Canonical matrices for linear matrix problems* [9] a aplikoval jej při řešení mnoha problémů teorie matic, včetně současného převedení dvojice čtvercových matic A a B téhož řádu na kanonické tvary $G^{-1}AG$ a $G^{-1}BG$. Rovněž Sergejčuk pracoval s Weyrovým kanonickým tvarem již dříve, aniž by pro jeho pojmenování používal termín obsahující Weyrovo jméno. Nazýval jej *reordered Jordan matrix* nebo *modified Jordan matrix* – druhý ze zmíněných termínů se vyskytuje například v práci *Littlewood's algorithm and quaternion matrices* [6], na jejímž vzniku se podílel Dennis I. Merino. Teprve v práci z roku 2000, v níž opakovaně zdůraznil souvislost tohoto kanonického tvaru s Weyrovou charakteristikou, uvedl Weyrovo jméno v jeho názvu. Důvod své terminologie okomentoval takto:

The matrix W is named a "Weyr matrix" since $(m_{i1}, m_{i2}, \ldots, m_{ik})$ *is the Weyr characteristic of W (and of every matrix that is similar to W) for* λ_i. (9, online verze, str. 7)

Významnou roli v šíření Weyrova kanonického tvaru mezi současnou algebraickou komunitou hrají Kevin C. O'Meara a Charles Irvin Vinsonhaler.[3] Weyrův kanonický tvar zavedli roku 2006 v článku *On approximately simultaneously diagonalizable matrices* [7] v souvislosti se studiem tzv. *přibližné současné diagonalizovatelnosti* skupiny matic (viz dále). V práci jej však nazvali *H-tvarem*, Weyrův blok *základní H-maticí* a Weyrovu charakteristiku pro určité vlastní číslo *H-blokovou strukturou*. Písmeno „H" bylo v uvedených termínech použito na počest psa huskyho, který byl roku 1934 studenty zvolen maskotem University of Connecticut a stal se takřka jejím synonymem.[4] Na zmíněné univerzitě v té době Charles Vinsonhaler pracoval a Kevin O'Meara byl jeho hostem.

Normou $||A||$ čtvercové komplexní matice autoři článku rozuměli odmocninu ze součtu čtverců absolutních hodnot všech prvků matice. Čtvercové matice $B_1, B_2, \ldots, B_k$ řádu n (obecně nad polem) se nazývají *současně diagonalizovatelné*, jestliže existuje invertibilní matice C taková, že matice $C^{-1}B_1C, C^{-1}B_2C, \ldots, C^{-1}B_kC$ jsou diagonální. Komplexní čtvercové matice $A_1, A_2, \ldots, A_k$ řádu n se nazývají *přibližně současně diagonalizovatelné*, jestliže pro libovolné reálné číslo $\varepsilon > 0$ existují matice $B_1, B_2, \ldots, B_k$, které jsou současně diagonalizovatelné a platí $||B_i - A_i|| < \varepsilon$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$. Již padesát let před publikováním této práce bylo známo, že každá dvojice komplexních komutujících matic řádu n je přibližně současně diagonalizovatelná, O'Meara a Vinsonhaler dokázali (str. 42), že přibližně současně diagonalizovatelné matice jsou po dvou komutativní. A pro každou konečnou množinu komutujících matic je známo, že je lze pomocí současné podobné transformace převést na horní trojúhelníkový tvar. V této problematice se ukazuje výhoda jedné vlastnosti Weyrova kanonického tvaru, kterou Jordanův tvar nemá a díky níž byl Weyrův tvar v článku, který se řadí mezi nejvýraznější časopiseckou literaturu věnovanou Weyrovým výsledkům, zaveden:

Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *jsou navzájem komutující matice řádu n nad algebraicky uzavřeným polem. Potom existuje invertibilní matice C taková, že* $C^{-1}A_1C$ *je Weyrův kanonický tvar matice* A_1 *a současně matice* $C^{-1}A_2C, C^{-1}A_3C, \ldots, C^{-1}A_kC$ *jsou horní trojúhelníkové.*

Další z prací, kde vystupuje Weyrův kanonický tvar, avšak pod jiným názvem, je práce *The commutator algebra of a nilpotent matrix and an application to the theory of commutative Artinian algebras* [4], kterou roku 2008 publikovali japonští matematikové Tadahito Harima a Junzo Watanabe. Pro jeho označení používali termín *Jordan second canonical form*. Lze však připomenout i jejich starší pojednání *The finite free extension of Artinian K-algebras with the strong Lefschetz property* [3] z roku 2003, v němž využili pozměněný tvar, opět nazývaný *Jordan second canonical form*, který získáme, jestliže výše definovaný Weyrův kanonický tvaru transponujeme podle vedlejší diagonály. I zde

[3] Jedná se o matematiky působící především na Novém Zélandě a v USA.
[4] Pes husky se na počest Jonathana Trumbulla (1710–1785), amerického revolucionáře z *Války za nezávislost* (1775–1783), jmenuje Jonathan. V univerzitním kampusu byla roku 1995 umístěna huskyho socha. Pohlazení jeho čumáčku údajně přináší štěstí.

byl tento kanonický tvar použit kvůli některým svým výhodnějším vlastnostem v porovnání s Jordanovým kanonickým tvarem:

Also we introduce the "Jordan second canonical form" of a nilpotent matrix. This is essentially the same as the usual Jordan decomposition, but as one will see it is easier to deal with in the theory of Artinian algebras. ([3], str. 121)

Výše zmíněný článek Helene Shapiro, v němž název kanonického tvaru poprvé obsahuje jméno pražského matematika, zajistil popularizaci Weyrovy teorie týkající se kanonických tvarů mezi širší matematickou komunitou. Byl citován v poměrně značné části prací, v nichž se vyskytla Weyrova charakteristika. Weyrův kanonický tvar dlouho jakoby stál v jejím stínu. Roku 2011 tuto situaci výrazně změnilo vydání monografie [8] věnované Weyrovu tvaru.

3.3 Monografie plně věnovaná Weyrovu kanonickému tvaru

Roku 2011 vyšla obsáhlejší kniha (400 stran), která má Weyrův kanonický tvar přímo ve svém názvu: *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form* [8]. Původně zamýšlený název monografie, pozměněný na návrh recenzentů, byl dokonce *The Weyr Form: A Useful Alternative to the Jordan Canonical Form*. Jeho autory jsou již zmínění Kevin C. O'Meara a Charles I. Vinsonhaler, kteří do autorského kolektivu v průběhu práce na publikaci přibrali Johna Clarka. Zajímavostí je, že se všichni tři během psaní knihy nikdy nesešli. Vzájemně se navštěvovali po dvojicích na svých pracovištích či bydlištích na Novém Zélandě, v Austrálii a v USA.

Velmi zdařilá kniha, která si brzy po svém publikování nalezla čtenáře mezi vrcholnými lineárními algebraiky, je rozdělena do dvou částí (první je věnována Weyrovu tvaru a jeho vlastnostem, druhá jeho aplikacím), které jsou dále členěny do sedmi kapitol. Rozbor stěžejních partií knihy napsané velmi příjemným, osobitým stylem by vydal na několik samostatných příspěvků. Alespoň pro základní představu o její náplni uveďme názvy všech kapitol: *Background Linear Algebra*, *The Weyr Form*, *Centralizers*, *The Module Setting*, *Gerstenhaber's Theorem*, *Approximate Simultaneous Diagonalization* a *Algebraic Varieties*. Snad nejlepším způsobem, jak knihu v krátkosti přiblížit a zároveň představit její „atmosféru“, je citovat následující slova z její předmluvy:

"*Old habits die hard." This maxim may help explain why the Weyr form has been almost completely overshadowed by its cousin, the Jordan canonical form. Most have never even heard of the Weyr form, a matrix canonical form discovered by the Czech mathematician Eduard Weyr in 1885. In the 2007 edition of the Handbook of Linear Algebra, a 1,400-page, authoritative reference on linear algebra matters, there is not a single mention of the Weyr form (or its associated Weyr characteristic). But this canonical form is as useful as the Jordan form, ... Our book is in part an attempt to remedy this unfortunate situation of a grossly underutilized mathematical tool, by making the Weyr form more accessible to those who use linear algebra at its higher level. Of course, that class includes most mathematicians, and many others as well in the sciences, biosciences, and engineering. And we hope our book also helps popularize the Weyr form by demonstrating its topical relevance, to both "pure" and "applied" mathematics. We believe the applications to be interesting and surprising.* ([8], str. xi)

Literatura

[1] Belitskij G.: [*Normal forms in a space of matrices*], rusky. In Machrenko V. A. (ed.): Analysis in Infinite-Dimensional Spaces and Operator Theory, Naukova Dumka, Kiev, 1983, 3–15.

[2] Belitskij G.: *Normal forms in matrix spaces*. Integral Equations and Operator Theory 38(2000), 251–283.

[3] Harima T., Watanabe J.: *The finite free extension of Artinian K-algebras with the strong Lefschetz property*. Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova 110(2003), 119–146.

[4] Harima T., Watanabe J.: *The commutator algebra of a nilpotent matrix and an application to the theory of commutative Artinian algebras*. Journal of Mathematics 319(2008), 2545–2570.

[5] Horn R. A., Johnson Ch. R.: *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985; reprint: 1990, 2. upravené vydání: Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[6] Merino D. I., Sergeichuk V. V.: *Littlewood's algorithm and quaternion matrices*. Linear Algebra and its Applications 298(1999), 193–208.

[7] O'Meara K. C., Vinsonhaler Ch. I.: *On approximately simultaneously diagonalizable matrices.* Linear Algebra and its Applications 412(2006), 39–74.

[8] O'Meara K. C., Clark J., Vinsonhaler Ch. I.: *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form*. Oxford University Press, New York, Oxford, 2011.

[9] Sergeichuk V. V.: *Canonical matrices for linear matrix problems*. Linear Algebra and its Applications 317(2000), 53–102;

online: http://arxiv.org/pdf/0709.2485.pdf [cit. 22. 4. 2014]

[10] Shapiro H.: *The Weyr characteristic*. The American Mathematical Monthly 106(1999), 919–929.

[11] Štěpánová M.: *Počátky teorie matic v českých zemích (a jejich ohlasy).* Disertační práce, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, Praha, 2013.

[12] Weierstrass K. T. W.: *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen*. Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1868, 310–338.

[13] Weyr Ed.: *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces*. Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 100(1885), 966–969.

Adresa

RNDr. Martina Štěpánová, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *stepanov@karlin.mff.cuni.cz*

Z HISTORIE POČETNIC

LUKÁŠ VÍZEK

Abstract: In this article we focus on the Czech algebra textbooks for secondary schools, which were published between 1870 and 1946. We describe the appropriate titles written by Franjo Močnik, František Kneidl, Michael Marhan, Mikuláš Benda, Josef Horčička, Jan Nešpor, Josef Úlehla, Kamil Buzek, Josef Krůta, Karel Jon, Antonie Maxová, Josef Vlček and Vladimír Dubský. We provide an overview of these books, we compare them with each other and we mention the typical characteristics of each book.

1. Úvod

V tomto příspěvku podáváme přehled českých početnic pro vyšší obecné, resp. měšťanské školy z rozmezí let 1870 až 1946. Navazujeme tím na Mikulčákovu práci *Nástin dějin vzdělávání matematice* [12] věnovanou historii vyučování tomuto předmětu v českých zemích do roku 1918. Nejprve jednotlivé početnice stručně představíme, potom je porovnáme a na konkrétní kapitole předvedeme způsob výkladu látky. Závěrem ukážeme jejich typické znaky.

2. Měšťanské školy

V roce 1869 byly přijetím tzv. velkého říšského zákona ustanoveny *obecné školy*, které nahradily dosavadní triviální, hlavní a normální školy. Dělily se na *obyčejné obecné školy* a *měšťanské školy*.[1] Oba typy poskytovaly výuku pro děti ve věku 6 až 14 let, tedy v období jejich povinné školní docházky[2] a měly osm ročníků.

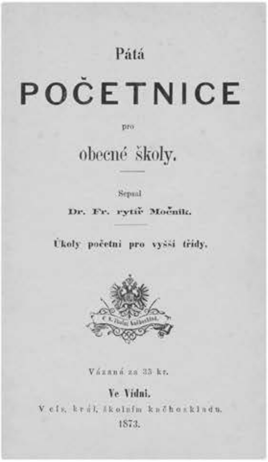
Obyčejné obecné školy byly v nejmenších sídlech jednotřídní se společnou výukou žáků různého věku, při větším počtu dětí fungovaly jako dvojtřídní, trojtřídní, resp. až osmitřídní s oddělenými všemi ročníky. Měšťanské školy byly zřizovány zpravidla ve městech, byly striktně osmitřídní, rozdělené na chlapecké a dívčí a měly poskytovat vyšší vzdělání než obyčejné obecné školy. Existovaly rovněž jako tříleté s výukou pro 6. až 8. ročník. Tato forma „měšťanek"[3] (vyšší obecná škola) byla novelou říšského zákona v roce 1883 ustanovena jako jediná a byla platná až do přijetí tzv. zákona o jednotné škole v roce 1948.[4]

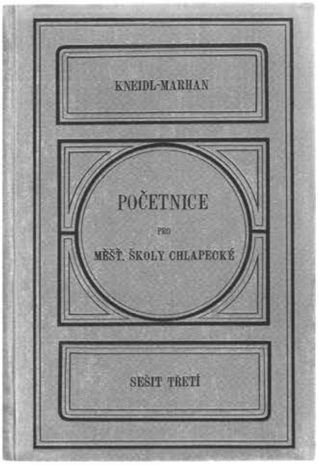
3. Početnice

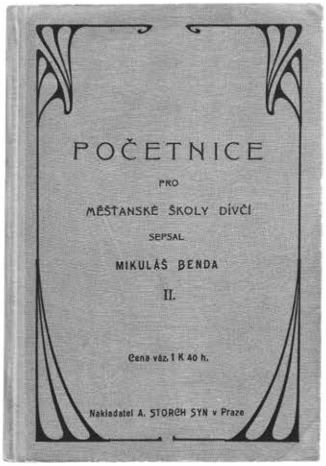
3.1. Úvodní charakteristika

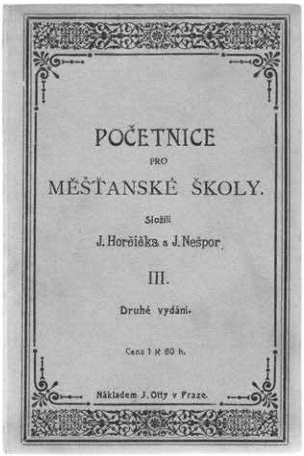
Početnice, tedy učebnice aritmetiky[5] pro obecné školy byly vydávány od 70. let 19. století. Mohly být publikovány jakýmkoliv vydavatelem nebo též nákladem autora, k používání ve

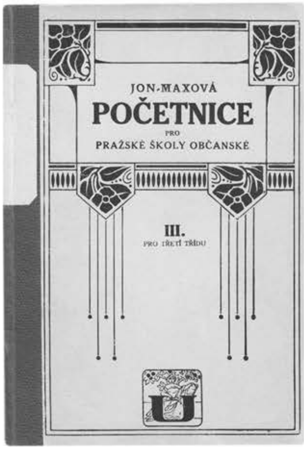
[1] Více informací o tehdejší vzdělávací soustavě viz [10], str. 56−188.
[2] Povinná školní docházka byla zavedena velkým říšským zákonem. Navazovala na tzv. všeobecnou vzdělávací povinnost dětí ve věku 6 až 12 let, jež vzešla z tereziánských reforem školství z roku 1774.
[3] V textu budeme pro měšťanské školy užívat vžitou „zkratku" měšťanky.
[4] Více informací o školské soustavě po roce 1945 uvádí [13], str. 84−85.
[5] Matematika byla na měšťanských školách rozdělena do předmětů *arithmetika* (později *počty spolu s jednoduchým účetnictvím*) a *měřictví a rýsování* (tj. geometrie). Její učební osnovy měly být ze zákona stanoveny zemskými školními úřady. Tuto povinnost však splnily jen některé z nich, ministerstvo kultu a vyučování proto v roce 1874 vydalo osnovy samo. Byly uvedeny spolu s podrobnějšími informacemi v Čelakovský J. (ed.): *Zákony a nařízení u věcech obecného a pokračovacího školství*. Dr. E. Grégr, Praha, 1886.

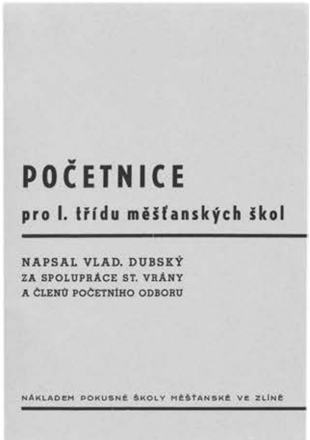












Obálky, resp. titulní listy představovaných početnic. Data vydání (zleva shora): 1872, 1888, 1910, 1907, 1909, 1920, 1923, 1932 a 1936.

výuce musely být schváleny ministerstvem kultu a vyučování. Byly sepisovány buďto pro obecné nebo pro měšťanské školy. První jmenované obsahovaly pouze látku nižších pěti ročníků.[6] Jedinou výjimku z nich představovala *Pátá početnice pro obecné školy. Úkoly početní pro vyšší třídy* Franja Močnika.[7]

Početnice pro měšťanky zpravidla vycházely jako třídílné sešity určené pro jednotlivé ročníky, mívaly variantu pro chlapecké a variantu pro dívčí školy. V následujícím přehledu jsou chronologicky podle data vydání uvedeny všechny vyhledané učebnice aritmetiky pro vyšší obecné, resp. měšťanské školy, jež byly publikovány do konce druhé světové války, resp. do roku 1946.[8]

3.2. Přehled početnic pro vyšší obecné školy

autor početnice	vydávána
Franjo Močnik (1814−1892) *Pátá početnice pro obecné školy. Úkoly početní pro vyšší třídy.*	1870 až 1913
František Kneidl (1855−1928), Michael Marhan (1851−1928)[9] *Početnice pro měšťanské školy chlapecké/dívčí. Sešit prvý/druhý/třetí.*	1886 až 1936
Mikuláš Benda (1843−1925)[10] *Arithmetika pro měšťanské školy chlapecké/dívčí. Stupeň I./II./III.*	1895 až 1910

[6] Zmiňme alespoň autory a data vydávání jejich početnic pro (nižší) obecné školy: Antonín Kunz (1882), Jan Kozák a Jan Roček (1899 až 1910), František Petrmichl (1904), Alois Lhotský (1906), Augustin Matolín (1909 až 1951) a Miloslav Disman a kol. (1934 až 1948).

[7] Slovinec Franjo Močnik působil jako profesor matematiky na technické akademii ve Lvově a na olomoucké univerzitě. Později pracoval v Lublani a ve Štýrském Hradci jako školní rada a inspektor. Je znám jako autor úspěšných a velmi rozšířených německy psaných učebnic matematiky pro obecné a střední školy. V jednotlivých zemích monarchie byly překládány do národních jazyků a vycházely až do roku 1938. Více o životě a díle F. Močnika viz Mačák K.: *Franz von Močnik*. Učitel matematiky 3(1994−1995), č. 3, březen 1995, str. 45−49, Povšič J.: *Bibliografija Franca Močnika*. Slovenska akademija znanosti in umetnosti, Ljubljana, 1966.

[8] Přehled byl sepsán na základě systematického studia katalogů českých knihoven. Poznamenejme, že nejvíce početnic obsahuje fond Pedagogické knihovny J. A. Komenského (Mikulandská 5, Praha 1), Národní knihovny České republiky (Klementinum 190, Praha 1) a Moravské zemské knihovny v Brně (Kounicova 65a, Brno). Vodítkem při zpracování soupisu byl seznam *Učebnice základních škol* uveřejněný v [12], str. 199−202. Vedle učebnic matematiky byly k výuce na obecných školách vydávány rovněž sbírky úloh a metodické příručky. Jejich přehled byl zpracován ve [12], str. 202−208.

[9] O Kneidlovi se podařilo nalézt pouze stručné slovníkové heslo: *ředitel škol v Karlíně, komunální a nár. pracovník. Býv. starosta Ú. M. Š.* (*Komenského slovník naučný*. Svazek VI. Nakladatelství a vydavatelství Komenského slovníku naučného, Praha, 1938, str. 293). Ze studia fondů českých knihoven plyne, že vedle početnic psal také učebnice zeměpisu pro měšťanské školy a místopisné práce věnované historii Karlína (dnes součásti Prahy). Michael Marhan působil na obecných školách ve Slabcích (10 km jižně od Rakovníka), Vinařicích (jedná se pravděpodobně o Vinařice u Kladna), v Mělníku a v Karlíně. Kromě učebnic aritmetiky publikoval ve spoluautorství s Antonínem Mojžíšem (1856−1927) a Janem Nagelen (data narození a úmrtí se nepodařilo dohledat) také sbírky úloh. Věnoval se rovněž redakční činnosti, vedl *Zlaté mládí. Časopis obrázkový pro naši mládež,* psal povídky a pohádky. Podobně, jako u většiny uvedených autorů, o Marhanově životě a díle se nepodařilo dohledat podrobnější literaturu. Informace plynou ze slovníkových hesel uvedených v *Ottově slovníku naučném* (Díl XVI. J. Otto, Praha, 1900, str. 837), a v *Komenského slovníku naučném* (Svazek VII. Nakladatelství a vydavatelství Komenského slovníku naučného, Praha, 1938, str. 434).

[10] Mikuláš Benda působil na reálné škole ve Vodňanech, na měšťanské škole na Smíchově (dnes součást Prahy) a na Starém městě v Praze. Mimo uvedené početnice publikoval i učebnice geometrie pro měšťanské školy. Životopisná data jsou převzata z *Ottova slovníku naučného* (Díl III. J. Otto, Praha, 1890, str. 729) a z *Komenského slovníku naučného* (Svazek I. Nakladatelství a vydavatelství Komenského slovníku naučného, Praha, 1937, str. 493).

Josef Horčička (1870−1939), Jan Nešpor (1879−1931)[11] *Početnice pro měšťanské školy chlapecké i dívčí. Díl I./II./III.*	1899 až 1934
Josef Úlehla (1852−1933)[12] *Početnice pro měšťanské školy chlapecké/dívčí. Stupeň I./II./III.*	1909 až 1930
Kamil Buzek (1874−1950), Josef Krůta (1874−1950)[13] *Početnice pro měšťanské školy chlapecké/dívčí. Díl I./II./III.*	1913 až 1946
Karel Jon, Antonie Maxová (1889−1954) *Početnice pro pražské školy občanské. Díl I./II./III.*	1921 až 1924
Josef Vlček (1889−?) *Početnice pro první/druhou/třetí třídu měšťanských škol.*	1932 až 1936
Vladimír Dubský a kol.[14] *Početnice pro I./II. třídu měšťanských škol.*	1936 až 1939

Početnice byly v dalších svých vydáních mírně modifikovány, neměly však zásadně změněnou koncepci zpracování látky. Jejich varianty pro dívčí školy byly odvozeny od chlapeckých. Obsahovaly slovní úlohy vztažené na ženská povolání a některé tematické celky z nich byly vyřazeny.[15] Rozdělení učebnic pro školy podle pohlaví se však postupně vytratilo.[16]

[11] O životě a díle Jana Nešpora se nepodařilo nalézt žádné informace. O Josefu Horčičkovi byla dohledána pouze stručná poznámka: *český pedagog, autor četných dějepisných a zeměpisných učebnic, čítanek, početnic pro základní školy* (*Komenského slovník naučný*. Svazek V. Nakladatelství a vydavatelství Komenského slovníku naučného, Praha, 1938, str. 231). Spolu s J. Nešporem napsal také učebnice dějepisu a literatury pro měšťanské školy, metodiky těchto předmětů a rovněž cestopisné průvodce. Celkově bylo od této autorské dvojice v katalozích českých knihoven dohledáno 32 různých knih.

[12] Josef Úlehla vyučoval matematiku a přírodovědné předměty na obecných a později měšťanských školách na Moravě, pracoval rovněž ve vedení škol. Sepsal více než 150 publikací, v nichž se věnoval didaktice a metodice přírodovědných oborů, historii matematiky, filozofii a překladům anglických reformních pedagogů. Pro měšťanské školy připravil spolu s početnicemi i učebnice přírodopisu, o kalkulu napsal učebnici *Počet infinitesimální* a o historii matematiky publikoval dvoudílnou monografii *Dějiny mathematiky*. O Úlehlově životě a díle viz Vízek L.: *Josef Úlehla a jeho učebnice Počet infinitesimální*. In Doležalová J. (ed.): *Sborník z 20. semináře Moderní matematické metody v inženýrství*. Ostrava, 2011, str. 125–131, Vízek L.: *Josef Úlehla (1852–1933) a jeho Dějiny mathematiky*. In J. Bečvář, M. Bečvářová (eds.): *32. mezinárodní konference Historie matematiky*. Matfyzpress, Praha, 2011, str. 275–284.

[13] Kamil Buzek vyučoval na českých obecných školách, na měšťanské škole v Nuslích (dnes součást Prahy) a působil jako ministerský rada na ministerstvu školství. Kromě početnic napsal společně s Josefem Krůtou metodickou práci *Počty v občanském životě*. Údaje jsou čerpány z *Ottova slovníku naučného nové doby* (Díl I., svazek II. J. Otto, společnost s r. o., Praha, 1931, str. 820), a z *Komenského slovníku naučného* (Svazek II. Nakladatelství a vydavatelství Komenského slovníku naučného, Praha, 1937, str. 218). J. Krůta byl: *ředitel měšťanských škol v Praze, český pedagogický spisovatel, od 1922 předseda Říšského svazu učitelů měšťanských škol, od 1926 náměstek starosty Československé obce učitelů* (*Ottův slovník naučný nové doby*. Díl III., svazek II. J. Otto, společnost s r. o., Praha, 1935, str. 930−931). Sepsal také *Početnice pro roční učebné kursy na měšťanských školách* a *Měřictví pro roční učebné kursy na měšťanských školách*.

[14] O Karlu Jonovi, Antonii Maxové, Josefu Vlčkovi a Vladimíru Dubském nebyly nalezeny žádné informace. Data narození, resp. úmrtí A. Maxové a J. Vlčka byla převzata ze Souborného katalogu České republiky (on-line dostupného z http://www.caslin.cz [cit. 2014−04−01]).

[15] Dívky měly méně hodin matematiky týdně než chlapci, studovaly více „praktických" předmětů zaměřených na ženská povolání.

[16] Od roku 1919 se mohli chlapci a dívky na měšťanských školách vzdělávat společně. Došlo k tzv. koedukaci, více informací viz [11], str. 44.

U dalších vydání některých početnic docházelo k drobné změně názvu. Nejvýrazněji se v pojmenování lišily Bendovy učebnice, jež místo *Arithmetika* měly v titulu *Početnice*,[17] a Kneidlovy,[18] Úlehlovy, resp. Jonovy a Maxové početnice, které měly od 20. let 20. století v názvu určení *pro občanské školy*.[19] Dalším fenoménem období první republiky byly překlady učebnic do slovenštiny. Této „cizojazyčné“ mutace se dočkaly početnice F. Kneidla, J. Úlehly, K. Buzka a J. Vlčka.[20]

3.3. Analýza početnic

V následujících odstavcích porovnáme didaktické zpracování jednotlivých početnic. Za reprezentativní část vybíráme kapitolu o poměru. Jedná se o stručnější tematický celek, který předkládá novou matematickou látku. Vhodně na něm nastíníme odlišné způsoby zavedení pojmu a rozdílné přístupy k vysvětlování tvrzení.

M. Benda zavedl poměr takto:

Tážeme-li se, oč jest jedna veličina větší nebo menší nežli druhá, nazýváme takové srovnání poměrem arithmetickým. Tážeme-li se, kolikrát jest jedna veličina větší než druhá, nazýváme takové srovnání poměrem měřickým čili krátce poměrem.
(...)
Otázku, kolikrát na př. 15 *větší jest než* 5, *řešíme dělením, jež se pouze naznačí. Píšeme* 15 : 5 *nebo* 15/5, *a čteme:* 15 *dělených* 5, *nebo* 15 *má se ku* 5, *anebo* 15 *ku* 5. ([3], str. 81)

Jako jediný představil pojem aritmetický poměr, dále s ním však nepracoval. Zbývající autoři postupovali po obsahové stránce stejně. F. Kneidl a M. Marhan navíc motivovali geometrickou úlohou s připojeným obrázkem úseček a se zadáním:

Přirovnej přímku a ku přímce b, c![21] ([2], str. 91)

V. Dubský proti ostatním více rozpracoval úvod. Navazoval na dosavadní znalosti žáků, s poměrem pracoval v jednoduchých úlohách ještě před vysvětlením pojmu:

Rozměry naší vlajky nemohou být libovolné, jejich poměr 2 : 3 *je stanoven zákonem. Vysvětlete! Stanovte neznámé rozměry obou menších vlajek!* 2 *m* : 3 *m,* 18 *dm* : *x dm, x dm* : 18 *dm.* ([9], str. 132.)

---

[17] Jako *Arithmetiky* byly zpravidla označovány učebnice pro střední školy. V prostředí měšťanky však nebyl tento název vhodný. Vyučovala se zde matematiky na nižší úrovni a se zaměřením na praktické dovednosti, resp. na „kupecké počty“, s nimiž označení *početnice* souvisí.

[18] V letech 1909 až 1925 byly Kneidlovy a Marhanovy početnice vydávány pouze pod autorstvím F. Kneidla. Po jeho smrti je v letech 1934 až 1936 publikoval Josef Martinec (data narození ani další životopisné údaje se nepodařilo dohledat) pod názvy *Kneidlova Početnice pro první/druhou/třetí třídu měšťanských škol*. Celá série početnic byla velmi úspěšná, vycházela padesát let.

[19] Změna názvu odráží dobové snahy o přejmenování měšťanské školy na občanskou školu, k němuž však nakonec nedošlo. Problematika reformních snah byla podrobně popsána v [11], str. 45.

[20] V 19. století na Slovensku měšťanské školy existovaly pouze výjimečně. Po vzniku Československé republiky však jejich počet rychle rostl. Překlady českých učebnic vhodně naplňovaly poptávku po studijních textech. Slovenských autorů nebylo mnoho, nejstarší původně slovenské *Počtovnice pro prvú/druhú/tretiu triedu meštianskych škôl* vydal v letech 1927 a 1928 Václav Hodek.

[21] V úloze je uvažována úsečka, resp. její délka. Označení přímka vycházelo z Euklidových *Základů*, resp. jejich překladů do českého jazyka, v nichž byl tímto pojmem v podstatě chápán současný pojem úsečka. Podrobněji problém analyzuje např. Bečvářová M.: *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 20, Prometheus, Praha, 2002, str. 136.

Do dalších odstavců kapitoly autoři zařadili příklady na výpočet prvního a druhého členu poměru a jeho udavatele[22] se zadanými dvěma z těchto veličin. Někteří takovým úlohám věnovali více, někteří méně pozornosti, po obsahové stránce je však zpracovali téměř totožně.

Podívejme se nyní, jakými způsoby bylo vysvětlováno tvrzení, že poměr se nezmění, násobíme-li oba jeho členy stejným (nenulovým) číslem. V početnicích můžeme nalézt dva přístupy. V učebnicích [1] až [5] byli žáci vedeni k objevení pravidla. Byli vybídnuti k násobení obou členů nějakého poměru různými čísly a k porovnávání udavatelů původního a nově obdrženého poměru. V Úlehlově početnici byly k nalezení vlastnosti přivedeni takto (výše bylo uvedeno, že tvář a čelo je v poměru 16 : 5,5):

Smí-li umělec zobraziti člověka tak, aby jeho tvář byla dlouhá 2 *cm,* 4 *cm,* 32 *cm,* 64 *cm,* 10 *dm? Učinil-li tvář* 2, 3, 4*krát kratší nebo delší, jak vysoké bude pak čelo, aby tvář byla zobrazena pravidelně?*
Když se zvětší nebo zmenší tvář i čelo, co se nesmí zvětšiti ani zmenšiti?
Poměr se nezmění, když se stejně znásobí nebo rozdělí oba jeho členy. ([5], str. 38)

Jiným způsobem postupovali autoři početnic [6], [8] a [9]. Pravdivost tvrzení vztahovali na dělení a na krácení, resp. rozšiřování zlomků, jež vysvětlili v předchozích kapitolách. Např. J. Vlček napsal:

Které poměry se sobě rovnají? Poněvadž je poměr naznačeným dělením, platí o poměru týž pravidla jako o dělení nebo zlomku. Proto můžeme poměr krátiti (kterak?) a rozšiřovati (kterak?). Poměr zpravidla vyjadřujeme čísly celými a nejmenšími. ([8], str. 89)

Pouze v učebnici K. Jona a A. Maxové je sledované pravidlo uvedeno zcela bez souvislostí a bez naznačení jeho platnosti:

Aby členy v poměru nebyly velké, krátí se přední i zadní člen stejným číslem; tím se udavatel nezmění. ([7], str. 22)

Další část kapitoly o poměru je věnována srovnalosti, tj. rovnosti dvou poměrů (označované též jako úměra nebo proporce). Zaměříme se nyní na důležité tvrzení, je-li $a : b = c : d$ (kde bychom dodali a, b, c, d jsou reálná čísla a b, d různá od nuly), potom $ad = bc$. Všichni autoři až na K. Jona a A. Maxovou motivovali žáky k objevení této vlastnosti a vysvětlovali některé souvislosti. Přístup k problematice můžeme osvětlit úryvkem z Močnikovy početnice:

Ve srovnalosti 18 : 6 = 27 : 9 *položte místo každého předního členu součin jeho zadního členu a vykladatele; z jakých činitelů je složen součin krajních, a z jakých součin středních členů?*
V každé proporci rovná se součin krajních členů součinu středních členů. ([1], str. 63)

Na učebnici K. Buzka a J. Krůty můžeme ocenit důraz na samostatné objevení vlastnosti žáky:

Proveďte podobné pokusy i na ostatních[23] *úměrách, které jste sestavili v př. 3.* ([6], str. 22)

Další kapitola početnic byla věnována trojčlence. Úzce navazovala na představené tvrzení, neboť na něm zakládala metodu řešení. Přístup jednotlivých autorů byl srovnatelný, lze jej

[22] Udavatel (resp. vykladatel nebo exponent) byl chápán jako výsledek naznačeného dělení. Např. udavatelem poměru 12 : 4 jsou 3.
[23] Vybídnutí k „pokusům na ostatních úměrách“ následuje po dvou ukázkových příkladech, v nichž je na konkrétní úměře ukázána platnost tvrzení.

přiblížit pomocí stručné citace z Horčičkovy a Nešporovy učebnice:

V úměře $x : 21 = 2 : 5$ *jest vnější člen neznám; z ostatních tří známých členů lze neznámý člen užitím věty v C)*[24] *vypočítati, neboť* $5 \cdot x = 2 \cdot 21$ *a* $x = 2 \cdot 21 / 5$. ([4], str. 86)

3.4. Shrnutí

Močnikova série početnic pro obecné školy je nejstarší ze všech uvedených v tomto příspěvku a byla publikována nejdéle, celkově téměř 70 let. Zmíněná *Pátá početnice* je charakteristická strohým typografickým provedením, stručným a přitom přesným matematickým vyjadřováním a vedením žáků k samostatnému objevování. V jednom svazku zpracovává látku tří ročníků vyšší obecné, resp. měšťanské školy. Některá témata však neobsahuje.[25]

Nejstarší původní české a dlouhých 50 let vydávané početnice pro měšťanky sepsali F. Kneidl a M. Marhan. Na rozdíl od F. Močnika zpracovali látku podrobněji, zahrnuli více příkladů na procvičení a text místy akcentovali grafickými prvky nebo potřebnými ilustracemi. Dali vzniknout určitému vzoru pro později vydávané učebnice. Početnice M. Bendy a autorské dvojice J. Horčičky a J. Nešpora byly totiž zpracovány po obsahové i metodické stránce velmi srovnatelně.

Úlehlovy početnice vynikají přívětivým a inspirujícím jazykem, svým vyjadřováním se více přibližují dítěti. Předznamenávají reformní pedagogické tendence, jež u nás vrcholily ve 30. letech 20. století.[26] Napříč kapitolami odrážejí autorovo zaujetí pro dějiny matematiky, neboť obsahují podnětné historické úlohy.[27]

Za vzor prvorepublikových početnic lze považovat práce K. Buzka a J. Krůty. Vyšly prvně těsně před první světovou válkou, naposledy byly dotištěny v roce 1946. Svým zpracováním propojují jednotlivá matematická témata, vstřícně se obracejí na žáka a zdůrazňují důležitost jeho vlastního objevování. Metodicky podobně jsou zpracovány Vlčkovy a Dubského učebnice. Obsahují však větší množství obrázků a grafických prvků. Důležité pojmy a tvrzení jsou v nich výrazně zarámovány podobně jako v současných učebnicích.

Ze všech zmíněných početnic poněkud vystupují učebnice K. Jona a A. Maxové. Jako jediné byly publikovány pouze jednou. Typograficky se podobají spíše textům 2. poloviny 19. století, platnosti tvrzení v nich nejsou zpravidla vysvětlovány a děti jimi nejsou příliš vedeny k samostatnému tvoření a objevování.

4. Závěr

Tento příspěvek je stručnou sondou do starších českých učebnic aritmetiky pro (dnešním jazykem) druhý stupeň základní školy. Chtěli jsme především podat jejich přehled a popsat základní charakteristiku. Detailnější rozbor těchto knih by vyžadoval širší studii. Závěrem

[24] Věta v C) byla formulována *V úměře je součin členů vnějších roven součinu členů vnitřních*. ([4], str. 86)
[25] V Močnikově *Páté početnici* například není vysvětlen výpočet druhé a třetí odmocniny, jehož výuku osnovy předepisovaly a jemuž je v ostatních učebnicích věnováno mnoho prostoru.
[26] Charakteristické rysy tzv. reformní pedagogiky byly respekt k osobnosti dítěte, důraz na uměleckou a pracovní výchovu; vyučování jako prostředek výchovy nebo škola bez osnov, bez rozvrhu hodin, bez učebnic apod. Nejvýznamnějšími představiteli tohoto směru byli Otokar Chlup (1875−1965) a Václav Příhoda (1889−1979).
[27] Např. do kapitoly *Soustava desetinná* zahrnul J. Úlehla starověkou úlohu: *„Kaž položiti pšeničné zrno na pole šachové desky, dvě zrna na druhé pole, 4 zrna na třetí pole, a tak dále na každé pole dvakrát tolik zrn, než bylo na předešlém," pravil prý jednou moudrý muž v indické zemi hrdému knížeti, jenž myslil, že všecko má a všecko může. Ukázalo se, že tolik zrn nebylo v říši knížecí, ba nebylo na světě. Šachová deska jest rozdělena na 64 polí, a zrn, jichž mudřec požádal, bylo 18 446 744 073 709 551 615.* ([5], str. 6.)

chceme vyjádřit přesvědčení, že studium starých učebnic může vhodně podněcovat současné vzdělávání matematice a obohacovat, inspirovat nebo motivovat autory nových početnic.

Literatura

[1] Močnik F.: *Pátá početnice pro obecné školy. Úkoly početní pro vyšší třídy*. C. k. školní kněhosklad, Vídeň, 1873, 200 stran.

[2] Kneidl F., Marhan M.: *Početnice pro měšťanské školy chlapecké. Sešit prvý*. F. Tempský, Praha, 1896, 110 stran.

[3] Benda M.: *Početnice pro měšťanské školy chlapecké. Stupeň I*. Höfer a Klouček, Praha, 1903, 91 stran.

[4] Horčička J., Nešpor J.: *Početnice pro měšťanské školy chlapecké i dívčí. Díl I*. J. Otto, Praha, 1905, 98 stran.

[5] Úlehla J.: *Početnice pro měšťanské školy chlapecké. Stupeň I. a II*. C. k. školní knihosklad, Praha, 1909, 75 stran.

[6] Buzek K., Krůta J.: *Početnice pro měšťanské školy chlapecké. Díl II*. Komenium, Karlín (Praha), 1921, 104 stran.

[7] Jon K., Maxová A.: *Početnice pro pražské školy občanské. Díl II*. Česká grafická unie a.s., Praha, 1923, 116 stran.

[8] Vlček J.: *Početnice pro druhou třídu měšťanských škol*. Státní nakladatelství v Praze, Praha, 1935, 146 stran.

[9] Dubský V. a kol.: *Početnice pro II. třídu měšťanských škol*. Pokusné měšťanské školy ve Zlíně, Zlín, 1939, 171 stran.

[10] Kádner O.: *Vývoj a dnešní soustava školství. I. díl*. Sfinx Bohumil Janda, Praha, 1929.

[11] Kádner O.: *Vývoj a dnešní soustava školství. II. díl*. Sfinx Bohumil Janda, Praha, 1931.

[12] Mikulčák J.: *Nástin dějin vzdělávání matematice*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 42, Matfyzpress, Praha, 2010.

[13] Votavová A. a kol.: *Pedagogika pro učitele*. Grada, Praha, 2007.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře projektu Specifický vysokoškolský výzkum 2014-260105.

Adresa

Mgr. Lukáš Vízek
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *vizek@karlin.mff.cuni.cz*

NOWE IDEE TOPOLOGICZNE W PIERWSZYCH PRACACH TWÓRCÓW POLSKIEJ SZKOŁY MATEMATYCZNEJ

WIESŁAW WÓJCIK

Abstract: The aim of the paper is to explain how the new topological ideas shaped the nature of the Polish School of Mathematics. The limited point of my analyses is the appearance of the first number of *Fundamenta Mathematicae* in 1920. I show the significance of the first topological papers of W. Sierpinski, Z. Janiszewski, S. Mazurkiewicz and others.

1 Wprowadzenie

Jeszcze przed odzyskaniem przez Polskę niepodległości w 1918, zaczęła kształtować się polska szkoła topologiczna. Topologia stała się, jak wiadomo, jedną z najważniejszych teorii kształtujących charakter tej szkoły. W pierwszej dekadzie XX wieku topologia nie miała jeszcze ugruntowanej pozycji w matematyce. Czas największych odkryć i konstrukcji był jeszcze przed nią. I to właśnie polscy matematycy mieli znaczący wkład w te dokonania. Podobna sytuacja miała miejsce w przypadku teorii mnogości, teorii funkcji, analizy funkcjonalnej, teorii miary i całki, rachunku prawdopodobieństwa, statystyki matematycznej czy logiki matematycznej.

W tej pracy ograniczę się jednak tylko do topologii, wskazując zarazem, że stanowiła ona swoistą filozofię geometrii (i całej matematyki) „obowiązującą" w polskiej szkole matematycznej (przede wszystkim w warszawskiej, z czasem we lwowskiej, w mniejszym stopniu w krakowskiej). Analizy zawarte w tej pracy zamykają się rokiem 1920, kiedy wychodzi pierwszy numer czasopisma *Fundamenta Mathematicae* ([11]), świadczący o istnieniu w Warszawie silnej grupy matematyków skupionych na badaniach teorio-mnogościowych i topologicznych. W tym też roku następuje stabilizacja polityczna w Polsce, po odparciu ataku wojsk bolszewickich na Warszawę. Do zwycięstwa w tej bitwie i całej wojnie w niemałym stopniu przyczynili się polscy matematycy i logicy (Stefan Mazurkiewicz, Wacław Sierpiński i Stanisław Leśniewski zatrudnieni byli jako eksperci w Biurze Szyfrów Polskiej Armii) – to oni właśnie złamali szyfr „Rewolucja" jakim posługiwało się dowództwo wojsk bolszewickich. Udowodnili tym samym skuteczność matematyki.

Do głównych twórców polskiej szkoły topologicznej należy zaliczyć Zygmunta Janiszewskiego, Wacława Sierpińskiego i Stefana Mazurkiewicza. Za współtwórców zrębów tej szkoły można jeszcze uznać jej pierwszych uczniów: Kazimierza Kuratowskiego, Bronisława Knastera i Stanisława Saksa.

Pierwsze polskie prace z topologii powstają w roku 1910 – są to prace Zygmunta Janiszewskiego i Stefana Mazurkiewicza, wydane w czasopiśmie francuskim „Comptes Rendus". Praca Mazurkiewicza, dotycząca topologicznej charakteryzacji łuków, jest uzupełnieniem pracy Janiszewskiego – upraszcza dowód Janiszewskiego mówiący, że w każdym continuum istnieje continuum nieprzywiedlne. Jest to bardzo konkretny przykład początku współpracy naukowej tych dwóch wielkich uczonych.

W tym samym roku Janiszewski pisze do „Wiadomości Matematycznych" artykuł *Nowy kierunek w geometrii* ([12]), w którym wyjaśnia potrzebę rozwoju topologii. Już tutaj znajdują się zręby opracowanego przez niego parę lat później programu budowy polskiej szkoły matematycznej.

Kolejne prace topologiczne powstały już w okresie lwowskim w latach 1911–1914.

Pod wpływem problemów teoriomnogościowych, jak również zagadnień stawianych przez Janiszewskiego, również Wacław Sierpiński podejmuje badania topologiczne. Jego pierwsze rezultaty topologiczne powstają w latach 1911–1914, z których szczególne znaczenie ma praca *O krzywej, której każdy punkt jest punktem rozgałęzienia* ([50]), gdzie podaje słynne konstrukcje tzw. krzywej Sierpińskiego (dywanowej i trójkątowej).

W tym czasie powstaje też kilka kluczowych dla rozwoju topologii prac S. Mazurkiewicza. Przede wszystkim w 1913 uzyskuje na Uniwersytecie Lwowskim doktorat pod kierunkiem Sierpińskiego za pracę *Przyczynki do teorii mnogości.* Podał tam, między innymi, definicję wymiaru zgodną z wprowadzoną później przez Mengera i Urysohna).

Zawierucha I wojny światowej sprawia, że cała trójka matematyków opuszcza Lwów i znajduje zatrudnienie na nowo otwartym w 1915 roku Uniwersytecie Warszawskim. I kolejnym ważnym etapem w rozwoju polskiej szkoły topologicznej jest uruchomienie od roku akademickiego 1916/17 seminarium z topologii, prowadzone na początku przez samego Mazurkiewicza. Tam też wychodzi, już po przedwczesnej śmierci Janiszewskiego, pierwszy numer „Fundamenta". Zawiera on prace wyłącznie polskich matematyków, które są poświęcone głównie teorii mnogości i topologii. Większość z nich zawiera przełomowe wyniki. W tomie znajduje się praca Janiszewskiego (z K. Kuratowskim, uczniem Janiszewskiego) *Sur les continus indécomposables* ([11]), 210–222), wiele prac Sierpińskiego, Mazurkiewicza, kilka prac Kuratowskiego, a również po jednej pracy H. Steinhausa, S. Banacha. W. Wilkosza i S. Ruziewicza. Przedstawione tam rezultaty świadczą, że ukazanie się tego tomu było przełomem w rozwoju nowych dyscyplin matematycznych, przede wszystkim topologii i teorii mnogości. Widać było, że istnieje już, w dopiero co odrodzonej Polsce, znaczące środowisko matematyczne. W ciągu kilku lat rozwoju matematyka polska stała się trzecim, pod względem rangi naukowej i liczby nowych wyników, krajem na świecie.

Przykładowo w pracy Janiszewskiego i Kuratowskiego *Sur les continus indécomposables* pojawia się kilka warunków charakteryzujących continua nierozkładalne, w tym twierdzenie Janiszewskiego stwierdzające, że w*arunkiem koniecznym i wystarczającym nierozkładalności continuum C jest, aby każde właściwe podcontinuum continuum C było continuum zagęszczenia.* Natomiast Sierpiński, w ramach badań topologicznych „continuów Peany" podał warunek charakteryzujące takie continua. Pojawiają się też warunki charakteryzujące continua i continua lokalnie spójne. Również Mazurkiewicz przedstawia twierdzenia charakteryzacyjne np. dla continuów nierozkładalnych. Badania rozpoczęte przez mistrzów kontynuują uczniowie, w tym B. Knaster (skonstruował pierwsze continuum dziedzicznie nierozkładalne), K. Kuratowski, K. Borsuk i inni.

2 Wydarzenia oraz inicjatywy kluczowe dla powstania polskiej szkoły topologicznej

2.1 Okres przed wybuchem I wojny światowej

Gdy sięgamy do źródeł, z których polska szkoła topologiczna wzięła swój początek, musimy cofnąć się do dekady poprzedzającej I wojnę światową. W tym czasie miały miejsce wydarzenia, bez których powstanie i rozwój szkoły byłby niemożliwy.

Przede wszystkim główni twórcy tej szkoły (Zygmunt Janiszewski, Stefan Mazurkiewicz, Wacław Sierpiński) zdobywali w tym czasie wykształcenie w najlepszych ośrodkach matematycznych Europy (głównie Getynga, Monachium i Paryż). Czerpali swą wiedzę od najlepszych matematyków tamtych czasów oraz zapoznawali się z najnowszymi ideami, teoriami i problemami, które czekały na rozwiązanie. W ramach tych nowych teorii dokonywali pierwszych odkryć i tworzyli środowisko badawcze w zakresie topologii. Tak Mazurewicz jak i Janiszewski studiowali w Monachium i Getyndze. Tam się spotkali i nawiązali bliską współpracę naukową. Była ona potem kontynuowana we Lwowie i Warszawie. Mazurkiewicz, po studiach w Krakowie w latach 1906–1907, udaje się do Monachium, gdzie studiuje do roku 1910, a następnie przybywa do Getyngi – jest tam przez dwa lata aż do 1912 i przyjeżdża do Lwowa. Tam przyłącza się do grupy Wacława Sierpińskiego, który prowadzi na Uniwersytecie Lwowskim seminarium z teorii mnogości i jej zastosowań. Pod kierunkiem Sierpińskiego i Puzyny uzyskuje w 1913 doktorat za pracę *Przyczynki do teorii mnogości*.

Natomiast Janiszewski najpierw studiuje przez jeden semestr 1907/08 w Zurychu, a następnie w Getyndze (do wakacji), poczym udaje się na studia do Paryża i po roku znów wraca w 1909 do Monachium i Getyngi, by przez kolejny rok akademicki 1910/11 kontynuować studia w Paryżu. W Niemczech słucha wykładów Hilberta, Minkowskiego i Zermelo, Bernsteina, Rungego, Landaue'a, Toeplitza, Brunna i Burckhardta), natomiast w Paryżu uczęszcza na wykłady Borela, Hadamarda, Picarda i Goursata i nawiązuje bliski kontakt z Poincarem i Lebesguem. Pod kierunkiem tego drugiego pisze pracę doktorską z topologii (19]). Jak wspomina Steinhaus we *Wspomnieniu pośmiertnym* wygłoszonym 7 lutego 1920 na posiedzeniu Polskiego Towarzystwa we Lwowie „Poincare, który bardzo niechętnie się udzielał, z Nim, 22-letnim studentem, przeprowadził długą dyskusję o jego tezie topologicznej, a w kilka lat po jego wyjeździe z Paryża pamiętał Go jeszcze spośród tłumu, który od tego czasu przeszedł przez wrota Sorbony, H. Lebesgue i wspominał z głębokim uznaniem Jego odrębną indywidualność" ([60]). Następnie wraca do Warszawy i prowadzi na przełomie 1911 i 1912 roku wykłady z topologii i filozofii matematyki w ramach Towarzystwa Kursów Naukowych (działające od 1905 w Warszawie, jako namiastka wyższej polskiej uczelni, kontynuator Uniwersytetu Latającego dla kobiet, przekształconego na początku niepodległości w Wolną Wszechnicę Polską). I znów przez kilka miesięcy jeździ po ważnych ośrodkach naukowych Europy, między innymi uczestniczy w 1912 w Kongresie Matematyków w Cambridge, wyjeżdża do Strasburga (semestr letni 2012), Grazu (semestr letni 2013), Marburga, Padwy i Bolonii (por. [5]). Na Kongresie w referacie *Über die Begriffe „Linie" und „Flache"* przedstawił szkic konstrukcji krzywej nie zawierającej łuków. Było to znaczące włączenie się w dyskusję nad ustaleniem ścisłej definicji krzywej[1]. Jeszcze w 1911 roku (18−22 lipca) uczestniczył w XI Zjeździe Przyrodników i Lekarzy w Krakowie (obrady

[1] Pełną konstrukcję takiej krzywej przedstawił uczeń Janiszewskiego B. Knaster w swojej pracy doktorskiej *Un continua dont tout sous-continu est indécomposable* z 1922.

w sekcji matematycznej), gdzie nawiązuje współpracę z J. Puzyną i W. Sierpińskim. To spotkanie owocuje pracą w charakterze asystenta w katedrze Puzyny na Uniwersytecie Lwowskim od roku 1912 (prowadzi zajęcia z teorii funkcji analitycznych i rachunku funkcyjnego) i włączeniem się w pracę seminarium Sierpińskiego z teorii mnogości (patrz niżej). W 1913 uzyskuje Janiszewski habilitacje z matematyki na Uniwersytecie Lwowskim, w oparciu o pracę *O rozcinaniu płaszczyzny przez kontinua* [15]. Za tę pracę dostaje w 1918 nagrodę im. Jakuba Natansona. Praca ta jest kontynuacją badań topologicznych podstawowych obiektów geometrycznych, a poświęcona jest topologii płaszczyzny. Wskazuje na kluczową własność płaszczyzny (własność Janiszewskiego), która stała się podstawą do podania w 1929 przez Kuratowskiego pięknej topologicznej charakterystyki sfery dwuwymiarowej [30]. W tym czasie włącza się w projekt Stanisława Michalskiego wydania *Poradnika dla Samouków*, zrodzony pod koniec XIX wieku. Ideą *Poradnika* było rozbudzenie wśród Polaków zainteresowanie nauką, aby w ten sposób odrodzić ducha narodowego. Miał to być „pozytywistyczny zryw powstańczy", w którym, poprzez miłość wiedzy i osobiste (samodzielne) poszukiwanie prawdy, Naród odbuduje samodzielność kulturową i polityczną. Janiszewski zredagował tom poświęcony matematyce, który wyszedł w roku 1914 w Warszawie [21]. Był autorem znacznej części artykułów, w tym *Wstępu ogólnego, Zakończenia,* rozdziałów: *Równania różniczkowe zwyczajne, Równania funkcyjne, różnicowe i całkowe, Rozwinięcia na szeregi, Topologia, Podstawy geometrii, Logistyka i Zagadnienia filozoficzne matematyki.* W *Poradniku* znajdowały się też rozdziały napisane przez S. Mazurkiewicza, W. Sierpińskiego, S. Zarembę i S. Kwietniewskiego.

Kolejną postacią współtworzącą polską szkołę topologiczną był, urodzony w 1882 w Warszawie, Wacław Sierpiński. Również w Warszawie uzyskał wykształcenie, w tym studia matematyczne na Cesarskim Uniwersytecie Warszawskim. Tam, pod kierunkiem matematyka rosyjskiego G. F. Woronoja, rozpoczął badania nad teorią liczb i uzyskał w 1904 stopień kandydata nauk (odpowiednik doktoratu). Drugi doktorat otrzymał na Uniwersytecie Jagiellońskim w 1906[2]. Od 1907 roku datuje się jego zainteresowanie teorią mnogości. W celu dokładniejszego jej poznania odbył kilkumiesięczne studia w Getyndze (1907/08), a za namową Józefa Puzyny przeprowadza na Uniwersytecie Lwowskim w 1908 przewód habilitacyjny, na podstawie pracy *O pewnym zagadnieniu funkcji asymptotycznych*. W tym samym roku rozpoczął wykłady na Uniwersytecie Lwowskim (od roku 1909 pierwsze na ziemiach polskich z teorii mnogości). Owocem badań i prowadzonych wykładów jest wydana w 1912 książka *Zarys teorii mnogości* ([58]). W roku 1910 uzyskuje nominację na stanowisko profesora nadzwyczajnego i obejmuje funkcję kierownika II katedry matematyki, a od 1911 roku zaczyna prowadzić seminarium z teorii mnogości i jej zastosowań. Gromadzi ono tak matematyków (Z. Janiszewski, S. Mazurkiewicz, S. Ruziewicz, A. Łomnicki, Otto Nikodym) jak i filozofów i logików (K. Ajdukiewicz, T. Czeżowski, Z. Zawirski). Efektem pracy grupy Sierpińskiego są dwa doktoraty obronione w 1913: Stanisława Ruziewicza[3] i wspomniany już Mazurkiewicza oraz habilitacja Janiszewskiego. Spotkania grupy przerywa i ją rozprasza wybuch wojny światowej w 1914.

[2] W tym czasie Warszawa i Kraków należały do innych państw – odpowiedni Rosji i Austrii – i był problem z uznawalnością stopni naukowych.

[3] Praca doktorska *O funkcji ciągłej, monotonicznej, nie posiadającej pochodnej w nieprzeliczalnej mnogości punktów* ukazała się w [47].

2.2 Okres wojny

Okres I wojny światowej nie był czasem straconym dla budowania polskiej szkoły matematycznej. W czasie wakacji Sierpiński przebywał w Wiatce na Białorusi w majątku rodziny swojej żony. Tam zastał go wybuch wojny. Jako obywatel austriacki został przez władze rosyjskie internowany. Dzięki wsparciu matematyków rosyjskich dostaje zgodę na zamieszkanie w Moskwie, gdzie przez trzy lata prowadził działalnością naukową. Uczęszczał na spotkania Polskiego Koła Naukowego w Moskwie, a kiedy w 1915 został powołany Uniwersytet Warszawski dedukuje mu napisaną wówczas pracę *Analiza*. Od tego pobytu datuje się wieloletnia współpraca z matematykami rosyjskimi (tam w tym czasie rozwija się silna szkoła teorii mnogości i topologii prowadzona przez P. S. Aleksandrowa), w tym z D. Jegorowem, B. Młodziejowskim i N. Łuzinem. Wraz z Łuzinem napisali osiem wspólnych prac z deskryptywnej teorii mnogości, do rozwoju której wnieśli znaczący wkład.

Po wyparciu Rosjan z Królestwa Polskiego, władze niemieckie, chcąc pozyskać Polaków do walki z Rosją, zgadzają się na uruchomienie w 1915 roku Uniwersytetu Warszawskiego (jako uczelni polskiej)[4]. Od początku został zatrudniony w nim S. Mazurkiewicz i dostał nowo utworzoną katedrę matematyki. Rozpoczyna z ogromnym impetem wykłady, które gromadzą dużą liczbę studentów. Zajęcia jego były bardzo dobrze przygotowane, był ponadto świetnym mówcą, potrafiącym pobudzić do intensywnej pracy twórczej. Od roku akademickiego 1916/17 zaczął prowadzić seminarium naukowe z topologii, na które uczęszczali, między innymi, K. Kuratowski, B. Knaster, S. Saks.

W 1917 (a dokładniej 3 grudnia), z inspiracji Janiszewskiego i Puzyny, zostaje powołane Towarzystwo Matematyczne we Lwowie. Było to pierwsze oficjalne towarzystwo matematyczne powstałe na ziemiach polskich, a jego pierwszym prezesem został J. Puzyna. Poza nimi do towarzystwa przystąpili H. Steinhaus, Z. Krygowski, A. Łomnicki (sekretarz towarzystwa), P. Dziewiński, T. Czeżowski (logik). Cała siódemka tworzyła grupę założycieli. Potem do Towarzystwa przystąpili E. Żyliński, S. Ruziewicz, M. Ernst i inni. Od grudnia 1917 do czerwca 1918 członkowie działali bardzo intensywnie, wygłaszając 15 referatów.

W tym czasie, wykorzystując zamieszanie rewolucyjne, opuszcza Sierpiński Rosję (luty 1918) i, przez Finlandię i Szwecję, przedostaje się do Polski. Wraca do Lwowa, który w tym czasie przeżywa kilka miesięcy względnego spokoju. W semestrze letnim roku akademickiego 1917/118 kontynuuje wykłady we Lwowie i włącza się aktywnie w działalność naukową Towarzystwa Matematycznego. Jest jednym z najaktywniejszych uczestników posiedzeń, wygłasza kilka ważnych referatów, w tym: *Najnowsze badania o funkcjach mierzalnych, O hipotezie continuum, Definicja całki Lebesgue'a bez teorii miary* ([5], 37).

Rozpoczęcie w listopadzie 1918 wojny polsko-ukraińskiej o Lwów i w całej Galicji Wschodniej wstrzymało aktywną działalność Towarzystwa. Wojna ta kończy się w lipcu 1919, jednak rozpoczynają się działania wojenne w ramach wojny polsko-bolszewickiej 1919−1921. Działania wojenne utrudniały, a przez długi okres uniemożliwiały działalność akademicką i naukową. Jesienią 1918 roku Sierpiński opuszcza Lwów i udaje się do

[4] Utworzono cztery wydziały: Prawa, Lekarski, Historyczno-Filozoficzny i Matematyczno-Przyrodniczy. Po roku dwa ostatnie połączono w jeden Wydział Filozoficzny. Dopiero w roku 1927 ponownie utworzono odrębny Wydział Matematyczno-Przyrodniczy.

Warszawy, gdzie zostaje powołany na kierownika I katedry matematyki Uniwersytetu Warszawskiego.

Natomiast Janiszewski zaraz na poczatku wojny wstępuje do Legionów Polskich i walczy aż do kryzysu przysięgowego w 1916. Przez pewien czas ukrywa się pod Radomiem, gdzie, między innymi, organizuje schronisko dla bezdomnych dzieci. Na lata 1917/19 został mianowany na asystenta w katedrze Puzyny, jednak już wiosną 1918 opuszcza Lwów i podejmuje pracę na Uniwersytecie Warszawskim, włączając się aktywnie w działalność seminarium topologicznego Mazurkiewicza.

W 1916 r. Komitet Kasy im. Mianowskiego podjął inicjatywę mającą na celu bardziej planowe i efektywne wydawanie środków skierowanych na pomoc nauce polskiej. Chodziło o ustalenie planu działania dotyczącego wszystkich głównych dziedzin nauki poprzez popieranie istniejących instytucji naukowych i powoływanie nowych, wpieranie odpowiednich wydawnictw naukowych i efektywne udzielanie pomocy materialnej. W celu zrealizowania tego przedsięwzięcia zwrócono się do najwybitniejszych uczonych polskich z prośbą o przedstawienie swoich spostrzeżeń i propozycji. Te uwagi miały się ukazać w pierwszym tomie „Nauki Polskiej”. W 1917 Janiszewski otrzymuje propozycję napisanie artykułu, w którym przedstawiłby stan i możliwości rozwoju polskiej matematyki. Pisze słynny artykuł *O potrzebach matematyki w Polsce,* który stał się manifestem tworzącej się polskiej szkoły matematycznej. Przedstawił w nim postulat stworzenia w Polsce silnego ośrodka twórczej pracy matematycznej, skoncentrowanego na jednej gałęzi matematyki i powołanie czasopisma naukowego, publikującego prace (głównie matematyków polskich) z tej wybranej gałęzi. Janiszewski proponuje skoncentrować badania na teorii mnogości, topologii i dyscyplinach pokrewnych. Celem jest nie tylko koncentracja matematyków na jednej dyscyplinie matematycznej, lecz koncentracji matematyków, stworzenia centrów autentycznej twórczości (spotkań, dyskusji), w której panują właściwe warunki pracy i klimat. Planowany tom „Nauki Polskiej“ z manifestem Janiszewskiego wychodzi w 1918 roku, u progu niepodległości [14].

2.3 Lata 1918−1920

Koniec roku 1918 jest czasem odzyskania przez Polskę niepodległości, jest również czasem powołania Sierpińskiego na katedrę w UW, gdzie pracował już Mazurkiewicz (od roku 1915) i Janiszewski (od wiosbu 1918). Trzech matematyków skupionych w jednym miejscu i pracujących nad tymi samymi zagadnieniami mogło zrealizować program Janiszewskiego i powołać specjalistyczne czasopismo. Wydanie pierwszego numeru *Fundamenta Mathematicae* było przełomem w historii teorii mnogości i topologii, mimo że autorami byli wyłącznie matematycy polscy (Sierpiński, Mazurkiewicz, Janiszewski, Banach, Steinhaus, Ruziewicz, Wilkosz). Janiszewski, redaktor naczelny *Fundamenta,* umiera na początku roku, nie doczekawszy się wydania tomu. Do sukcesu polskiej szkoły matematycznej przyczynił się ważny rys osobowości Janiszewskiego. Był człowiekiem wrażliwym na kwestie społeczne, narodowe, na drugiego człowieka. Traktował pracę naukową jako misję społeczną i narodową. Już swoją pracę doktorską dedykuje Markowi Sangnierowi, przywódcy chrześcijańskiej demokracji we Francji, twórcy ugrupowania „Silon“, z którym nawiązał bliską współpracę podczas studiów we Francji; gromadzi wokół siebie studentów i współpracowników, zakłada i utrzymuje przytułek dla dzieci, przeznacza swój majątek na kształcenie uzdolnionych jednostek, a swoje ciało przeznacza po śmierci na badania naukowe.

Można wymienić kilka wydarzeń kluczowych dla powstania polskiej szkoły topologicznej: studia zagraniczne w najlepszych ośrodkach matematycznych, zorganizowanie i prowadzenie seminariów naukowych z teorii mnogości i topologii oraz wydawanie specjalistycznego czasopisma. Duże znaczenie miał też projekt naukowy Janiszewskiego, w którym szczególną rangę przypisywał on nowym teoriom matematycznym (teorii mnogości, topologii, teorii funkcji, logice matematycznej) i przewidywał ich ogromną rolę w rozwiązywaniu problemów matematycznych, również w innych obszarach matematyki. Projekt ten był oparty ponadto na nowej hierarchii i strukturze dyscyplin matematyki związanej z pojawieniem się nowych dyscyplin naukowych. Najważniejsza w całej strukturze była teoria mnogości, a jako jej zastosowania pojawiały się: topologia, geometrie niearchimedesowe oraz badanie podstaw arytmetyki. Sama topologia była ściśle sprzężona z badaniem podstaw geometrii i, poprzez te badania, z geometrią euklidesową, syntetyczną, różniczkową, analityczną i geometriami nieeuklidesowymi. Badania topologiczne dają podstawę oraz impuls do rozwoju teorii powierzchni algebraicznych, funkcji algebraicznych, eliptycznych, analitycznych, całek i funkcji Abela, dalej prowadzą do równań różniczkowych, szeregów (w tym szeregów Fouriera) i innych działów matematyki. Bezpośrednie zastosowania topologii obejmują w tym projekcie ogromną część matematyki, w sposób pośredni topologia obecna jest w całej matematyce. Ten projekt Janiszewski konsekwentnie realizował i innych „wciągał" do badań w tym zakresie.

Ten projekt został przez niego sformułowany w szeregu prac, poczynając od pracy *Nowy kierunek w geometrii* ([12]), poprzez wykład habilitacyjny *O realizmie i idealizmie w matematyce,* artykuły w *Poradniku dla samouków* i w końcu w manifeście polskiej szkoły matematycznej *O potrzebach matematyki w Polsce*. Projekt ten, poprzez budowanie bliskiej współpracy między matematykami polskimi (wspólne tematy, wspólne autorstwo prac, wzajemna naukowa, i nie tylko naukowa pomoc) koncentrację na nowych teoriach, dążył do samodzielności naukowej polskiej matematyki.

3 Pierwsze polskie prace z topologii i ich charakterystyka

3.1 Prace topologiczne do roku 1920

W roku 1910 wychodzą dwie prace Janiszewskiego *Contribution à la géometrié des courbes planes générales* [9], *Sur la géométrie des lignes cantoriennes* [17] oraz jedna Mazurkiewicza *Sur la théorie des ensambles* [38] – wszystkie w Comptes Rendus w Paryżu. Rok 1911 jest czasem ukazania się przełomowej pracy doktorskiej Janiszewskiego *Sur les continus irréductibles entre deux points* [19]. W tym też roku swoją pierwszą pracę z topologii (jako zastosowanie teorii mnogości) drukuje Sierpiński – *O pewnym twierdzeniu z teoryi mnogości i jego zastosowaniach do analizy funkcyj nieciągłych* [51]. W roku 1912 wychodzą dwie prace Janiszewskiego – *Über die Begriffe „Linie" und „Flach"* [20] oraz *Démonstration d'une propriété des continus irréductibles entre deux points* [10] i jedna Sierpińskiego *O krzywych wypełniających kwadrat* [51]. W kolejnym roku mamy pracę habilitacyjną Janiszewskiego pracę *O rozcinaniu płaszczyzny przez continua* [15] i cztery prace Mazurkiewicza – Pr*zyczynki do teorii mnogości* (praca doktorska), *Contribution à la théorie des ensembles* [32] *oraz* O arytmetyzacji kontinuów w dwóch częściach ([33] i [34]).

W oparciu o swoją pracę doktorską drukuje Mazurkiewicz w 1915 roku pracę *O punktach wielokrotnych krzywych wypełniających obszar płaski* [36], a rok później *O pewnej klasyfikacji punktów leżących na kontinuach dowolnych* [35]. Natomiast Sierpiński wydaje dwie prace – *O krzywej, której każdy punkt jest pnktem rozgałęzienia* [50] oraz *Kontynuum liniowe jako mnogość abstrakcyjna* [49]. W roku 1918 zostaje wydana praca Mazurkiewicza *Teoria zbiorów* G_δ [39], w oparciu o którą uzyskuje rok później, na Uniwersytecie Warszawskim, habilitację.

W tym okresie matematycy ci wydali jeszcze kilkanaście innych prac, jednak już mniejszej rangi lub będącymi przygotowaniem do tego, co wydarzyło się w roku 1920 – wydanie pierwszego tomu *Fundamenta Mathematicae.* Zgromadzone tam prace topologiczne (było też kilka prac z teorii mnogości, teorii miary i teorii funkcji) były istną erupcją twórczą. Najwięcej prac napisał Sierpiński: *Démonstration d'un théorème de M. Baire sur les fonctions représentables analytiquement* ([11], 159–165), *Une démonstration du théorème sur la structure des ensembles de points* ([11], 1–6), *Sur les suites transfinies convergentes de fonctions de Baire* ([11], 132–141), *Sur un ensemble ponctiforme connexe* ([11], 1–70), *Sur une condition pour qu'un continu soit une courbe jordanienne* ([11], 44–60), *Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables denses en soi* ([11], 11–16). A oto prace Mazurkiewcza: *Un théorème sur les continus indécomposables* ([11], 35–39), *Sur un ensemble* G_δ *ponctiforme qui n'est homéomorphe à aucun ensemble linéaire* ([11], 61–81) , *Sur les lignes de Jordan* ([11], 166–209), *Contribution à la topologie des ensembles dénombrables* (wspólna z Sierpińskim) ([11], 17–27), Janiszewskiego (wspólna z Kuratowskim) – *Sur les continus indécomposables* ([11], 210–222) i Kuratowskiego – *Une définition topologique de la ligne de Jordan* ([11], 40–43).

Wszystkie te prace niosły nowe wyniki i rozwiązania wcześniejszych problemów. W kolejnym paragrafie przeanalizujemy najważniejsze z nich.

3.2 Najważniejsze wyniki

Pierwsze prace Janiszewskiego podjęły badanie dotyczące podstaw geometrii i analizy. Były nawiązaniem to prac G. Cantora, C. Jordana, A. Schoenfliesa, L. E. J. Brouwera i innych twórców topologii. Sformułowane przez tych matematyków twierdzenia i własności domagały się badań nad doprecyzowaniem występujących w nich pojęć. Jedno z pierwszych twierdzeń topologicznych – twierdzenie Jordana – mówiące, że każda krzywa zamknięta na płaszczyźnie dzieli tę płaszczyznę na dwa obszary i jest ich wspólnym brzegiem, otworzyło ogromny obszar badań nad zdefiniowaniem krzywej, obszaru, brzegu jako podstawowych pojęć topologicznych. Definicja krzywej (Jordana) jako ciągłego obrazu odcinka prowadziła do wielu paradoksów (konstrukcje Peano krzywych wypełniających kwadrat), a zdawałoby się proste i oczywiste „twierdzenie" Schoenfliesa, że krzywa na płaszczyźnie może być wspólnym brzegiem tylko dwóch obszarów, okazało się fałszywe. Pojawiały się konstrukcje krzywych (L. E. J. Brouwer, K. Yoneyama), które były wspólnym brzegiem trzech obszarów (i większej liczby). Okazało się, że te krzywe posiadają „paradoksalną" własność nierozkładalności (nie można ich rozłożyć na sumę dwóch podcontinuów właściwych). To skierowało badania do pojęć spójności i zwartości, niezbędnych do uchwycenia podstawowych bytów geometrycznych, w tym continuum (jako zbioru spójnego i zwartego).

W ramach tych badań, L. Zoretti wprowadził w 1909 pojęcie „continuum nieprzywiedlnego" (kontinuum jest nieprzywiedlne między dwoma punktami, jeśli jest minimalnym kontinuum, zawierającym te punkty). Continua nieprzywiedlne okazały się bardzo przydatne przy badaniu pojęcia linii, szczególnie do podania jej charakterystyki topologicznej. Janiszewski w swojej pracy doktorskiej udowodnił, że każde continuum, które jest nieprzywiedlne między dwoma punktami i nie zawiera podcontinuum zagęszczenia, jest łukiem (czyli homeomorficznym obrazem odcinka). Te badania były kontynuowane w polskiej szkole topologicznej. K. Kuratowski udowodnił w pracach *Théorie des continus irréductibles entre deux points I* [28] oraz *Théorie des continus irréductibles entre deux points II* [29] wiele niespodziewanych własności continuów nieprzywiedlnych m. in. twierdzenia o rozkładzie continuum nieprzywiedlnego na warstwy fundamentalne (są to podcontinua maksymalne danego continuum X ze względu na inkluzję zbiorów, w rodzinie tych podcontinuów X, które są przeliczalnymi sumami nietrywialnych continuów nierozkładalnych). Kuratowski dowodził dla continuum X nieprzywiedlnego między punktami a i b, że wszystkie continua w X zawierające a, będące dotknięciami swoich wnętrz, są uporządkowane liniowo ze względu na inkluzję. Dalej Kuratowski pokazywał, że z tą rodziną continuów można związać pewne ciągłe przekształcenie z X na odcinek, którego warstwy są warstwami fundamentalnymi X. W oparciu o te wyniki Kuratowskiemu wraz z Knasterem udało się znacznie wzmocnić wyniki H. Hahna, L. Vietorisa i W. A. Wilsona o liniowych rozkładach continuów nieprzywiedlnych. Udowodnili, że dla continuum X nieprzywiedlnego między dwoma punktami, przestrzenią rozkładu półciągłego górnie X na warstwy fundamentalne jest albo odcinek albo punkt.

Kolejnym istotnym wynikiem pracy doktorskiej Janiszewskiego jest konstrukcja continuum nierozkładalnego. Była ona istotnym uproszczeniem konstrukcji Brouwera z pracy *Zur Analysis Situs* z 1909 [2]. Praca Brouwera jest analizą trzech prac Schoenfliesa z lat 1903−1906 badających podstawy topologii płaszczyzny. Schoenflies próbuje scharakteryzować krzywe płaskie jako brzegi obszarów, odwołując się do twierdzenia Jordana o krzywych zwykłych zamkniętych (dzieli ona płaszczyznę na dwa obszary i jest ich wspólnym brzegiem). Brouwer pokazał fałszywość twierdzeń Schoenfliesa m.in. o możliwości rozkładu krzywej zwykłej zamkniętej na dwa łuki, będące właściwymi podzbiorami tej krzywej. Zrobił to poprzez konstrukcję krzywej będącej kontrprzykładem do badanych „twierdzeń" ([2], 434 i dalej). Janiszewski podejmując te analizy zauważył ponadto ciekawą własność skonstruowanego przez siebie continuum: pokazał, że istnieją w nim trzy takie punkty, że continuum to jest nieprzywiedlne między każdą utworzoną z nich parą. W pracy ([11], 110–122), udowodnił (wraz K. Kuratowskim) całą serię warunków charakteryzujących continua nierozkładalne, w tym twierdzenie Janiszewskiego, które stwierdza, że w*arunkiem koniecznym i wystarczającym nierozkładalności continuum jest, aby każde właściwe jego podcontinuum było continuum zagęszczenia*.

Natomiast w rozprawie habilitacyjnej z 1913 r. *O rozcinaniu płaszczyzny przez continuua* ([15], 55) formułuje ważną własność (nazywaną własnością Janiszewskiego) i pokazuje, że ma ją płaszczyzna: przestrzeń ma własność Janiszewskiego, jeśli suma dwóch dowolnych continuów, których przekrój nie jest spójny, rozcina tę przestrzeń.

Parę lat później Kuratowski, w oparciu o to twierdzenie, podał prostą charakterystykę sfery dwuwymiarowej: S^2: continuum peanowskie X jest homeomorficzne z S^2 wtedy i tylko wtedy, gdy żaden punkt nie rozcina X oraz każde continuum niejednosprzęgłe[5] w X rozcina X [230]. Dla sfer wyższego wymiaru udowodnienie topologicznych warunków charakteryzujących okazało się bardzo trudne. Najbardziej znana była tzw.

[5] Continuum jest jednosprzęgłe, jeśli przekrój dwóch dowolnych podcontinuów, dających w sumie całe to continuum, jest spójne.

Hipoteza Poincarego (dla sfery trójwymiarowej), która stwiedzała, że każda rozmaitość spójna, zwarta, bez brzegu oraz jednospójna[6] jest homeomorficzna ze sferą. Dopiero sto lat później została udowodniona przez G. Perelmana (twierdzenie Poincarego-Perelmana).

Kolejnym kluczowym wynikiem z pracy doktorskiej jest „lemat Janiszewskiego", jako ważne narzędzie dowodzenia mówiące, że jeśli U jest podzbiorem otwartym pewnego continuum, to dowolna składowa (maksymalny zbiór spójny) zbioru U ma punkty wspólne z brzegiem zbioru U ([19], 46).

Również w istotny sposób rozwijał pomysły mistrza Bronisław Knaster, uczeń Janiszewskiego. W swojej pracy doktorskiej *Un continua dont tout sous-continu est indécomposable* [22] konstruuje continuum dziedzicznie nierozkładalne (continuum dziedzicznie nirozkładalne czyli pseudołuk jest to takie continuum, że każde jego podcontinuum ma własność nierozkładalności), jako doprecyzowanie idei przedstawionej przez Janiszewskiego na Kongresie w Cambridge w 1912. Była to pierwsza tego typu konstrukcja i pozwalała, między innymi, odpowiedzieć na pytanie postawione przez Knastera i Kuratorskiego w 1920 ([11],. 223) oraz pytanie sformułowane przez Mazurkiewicza w 1921 ([38], 286). Były to pytania o topologiczną charakteryzację krzywej zwykłej zamkniętej (homeomorficzny obraz okręgu) oraz łuku. Brzmiały one następująco: 1. czy każde jednorodne leżące na płaszczyźnie continuum musi być krzywą zwykłą zamkniętą? (przestrzeń jest jednorodna, jeśli dla dowolnych dwóch punktów x i y istnieje homeomorfizm f tej przestrzeni taki, że $f(x) = y$); 2. czy każde płaskie continuum o tej własności, że jest homeomorficzne z dowolnym swoim niezdegenerowanym (niejednopunktowym) podcontinuum, musi być łukiem? Skonstruowany pseudołuk dawał negatywne odpowiedzi na oba pytanie. Posiadał zarazem własności łuku jak i krzywej zwykłej zamkniętej. Był tym samym szczególnie paradoksalny.

Najważniejsze wyniki Sierpińskiego w zakresie topologii, w analizowanym okresie, dotyczą „continuów Peano" (czyli ciągłych obrazów odcinka, są to continua lokalnie spójne). Podał on warunek charakteryzujące takie continua ([11], 44−60). Podał również nową konstrukcję krzywej Peano (a więc krzywej „wypełniającej" kwadrat, która powstaje jako ciągły obraz odcinka na kwadrat). Duże znaczenie w topologii mają twierdzenia Sierpińskiego charakteryzujące continua i continua lokalnie spójne. Jedno z nich mówi o tym, że niemożliwe jest otrzymanie continuum jako sumy przeliczalnie wielu zbiorów domkniętych rozłącznych [55]. Natomiast kolejne stwierdza, że jeśli continuum metryczne jest lokalnie spójne, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje pokrycie skończone tego continuum złożone ze zbiorów spójnych o średnicy nieprzekraczającej ε. ([11], 44−60).

Słynne, i mające znaczenie nie tylko w topologii, są skonstruowane już w 1915 przez Sierpińskiego krzywe, zwane krzywymi Sierpińskiego [54]: krzywa dywanowa (konstrukcję krzywej dywanowej pokazał Sierpińskiemu już wcześniej S. Mazurkiewicz) i trójkątowa. Krzywa dywanowa Sierpińskiego powstaje jako proces sukcesywnego wyjmowania z ustalonego kwadratu K wnętrza kwadratu środkowego (po podziale kwadratu K na dziewięć kwadratów). Ten podział na dziewięć kwadratów i wyrzucanie kwadratu środkowego powtarzamy w przypadku każdego z pozostałych ośmiu kwadratów (w kolejnym kroku $64 = 8^2$, potem 8^3 itd.). Krzywa ta ma nieskończenie wiele punktów rozgałęzienia. Krzywa ta jest uniwersalna dla wszystkich krzywych Jordana tzn.

[6] Przestrzeń jest jednospójna, jeśli każda pętla na tej powierzchni jest ściągalna do punktu.

są one homeomorficznie zanurzalne w krzywą Sierpińskiego [57]. Zainspirowany tą konstrukcją K. Menger podał analogiczne konstrukcje dla kostek n-wymiarowych, $n \geq 3$ [53]. Jest to tzw. gąbka (lub kostka) Mengera dla $n = 3$ (w przypadku kostek dowolnego wymiaru mówimy o przestrzeniach Mengera). Okazuje się, że dowolna krzywa z dowolnej przestrzeni metrycznej jest homeomorficznie zanurzalna w kostce Mengera.

Natomiast krzywa trójkątowa Sierpińskiego powstaje z trójkąta poprzez nieskończoną procedurę dzielenia trójkąta na cztery trójkąty (poprzez łączenie środków boków odcikami) i wyrzucania wnętrza trójkąta środkowego. Powstaje krzywa, której punkty rozgałęzienia są skończonego rzędu, w odróżnieniu od dywanu Sierpińskiego. Skonstruowane przez Sierpińskiego krzywe są przykładami pierwszych skonstruowanych fraktali (a więc figur samopodonych).

W przypadku Stefana Mazurkiewicza jego badania topologiczne rozpoczęły się, podobnie jak Janiszewskiego, w roku 1910. W napisanej wówczas pracy na temat topologicznej charakteryzacji łuków upraszcza dowód twierdzenia Janiszewskiego o tym, że w każdym continuum istnieje continuum nieprzywiedlne ([33]). Natomiast w swojej pracy doktorskiej udowodnił, że każde continuum panowskie (czyli lokalnie spójne continuum metryczne) jest obrazem ciągłym odcinka. Twierdzenie to zostało nazwane twierdzeniem Hahna-Mazurkiewicza-Móore'a, gdyż wskazani w twierdzeniu matematycy w tym samym czasie doszli do podobnych rezultatów. Mazurkiewicz w swojej pracy doktorskiej wprowadził również pojęcie wymiaru w przypadku zbiorów zwartych. Ta definicja występuje w pracy jako narzędzie badań, a nie cel sam w sobie. Najpierw formułuje twierdzenie mówiące, że każda ciągła funkcja, która przekształca zwarty liniowy zbiór w zbiór płaski o niepustym wnętrzu, przyjmuje tę samą wartość w przynajmniej trzech różnych punktach, natomiast każdy płaski zbiór nieposiadający punktów wewnętrznych jest już dwukrotnym ciągłym obrazem takiego liniowego zbioru. W oparciu o to twierdzenie formułuje pojęcie wymiaru: wymiar zbioru C wynosi co najwyżej n, jeśli, jeśli n jest najmniejszą liczbą całkowitą, dla której istnieje ciągła funkcja przekształcająca na C pewien nigdziegęsty zwarty liniowy zbiór i przyjmująca tę samą wartość w co najwyżej $n+1$ różnych punktach tego zbioru.

W 1920 ([11], 38) dowodzi, iż w *dowolnym continuum nierozkładalnym istnieją trzy takie punkty, że to continuum jest nieprzywiedlne między każdą parą tych punktów*. Przy pomocy metod topologicznych badał więc strukturę przestrzeni, krzywych, continuów i innych obiektów matematycznych. Te badania rozwijał w późniejszym okresie.

Literatura

[1] Borsuk K.: *O osiągnięciach prof. dr K. Kuratowskiego w dziedzinie topologii*. Wiad. Mat. 3 (1959).

[2] Brouwer L. E. J.: *Zur Analysis Situs*. Math. Annalen 68(1910), 422−434.

[3] Charatonik J. J.: *The Works of Bronisław Knaster*. In Aull C. E., Lowen R. (wyd.), *Handbook of the History of General Topology*. Dordrecht, Boston, London, 1997.

[4] Dickstein S.: *Przemówienie ku uczczeniu Zygmunta Janiszewskiego*. Wiad. Mat. 25(1921), 91–98.

[5] Domoradzki S.: *Towarzystwo Matematyczne we Lwowie*. In Więsław W. (red.): *Dzieje matematyki polskiej*. Wrocław, 2012, 31–43.

[6] Duda R.: *Jordan, Schoenflies i teoria leżenia (zarys problematyki do roku 1960)*. In Więsław W. (red.): *Dzieje matematyki polskiej*. Wrocław, 2012, 59–72.

[7] Duda R.: *Lwowska Szkoła Matematyczna*. Wrocław, 2007.

[8] Engelking R.: *O pracach Władysława Sierpińskiego z topologii*. Wiad. Mat. 26(1984), 18–24.

[9] Janiszewski Z.: *Contribution à la géometrié des courbes planes générales*. Comptes Rendus Paris 150(1910), 606–609.

[10] Janiszewski Z.: *Démonstration d'une propriété des continus irréductibles entre deux points*. Bulletin de l'Académie des science de Cracovie, Kraków, 1912, 906–914.

[11] Janiszewski Z. (red.): *Fundamenta Mathematicae* 1(1920).

[12] Janiszewski Z.: *Nowy kierunek w geometrii.* Wiad. Mat. 14(1910), 57−64.

[13] Janiszewski Z.: *Oeuvres choisies*. Warszawa, 1962.

[14] Janiszewski Z.: *O potrzebach matematyki w Polsce*. Nauka Polska 1(1918), 11–18.

[15] Janiszewski Z.: *O rozcinaniu płaszczyzny przez continua*. Prace Matematyczno-Fizyczne 26(1913), 11–63.

[16] Janiszewski Z.: *O realizmie i idealizmie w matematyce*. Przegląd Filozoficzny 19(1916), 161–170.

[17] Janiszewski Z.: *Sur la géométrie des lignes cantoriennes*. Comptes Rendus Paris 151(1910), 198–201.

[18] Janiszewski Z., Kuratowski K.: *Sur les continus indécomposables*. Fundamenta Mathematicae 1(1920), 210–222.

[19] Janiszewski Z.: *Sur les continus irreductibles entre deux points*. These, Gauthier-Villars, Paris, 1911.

[20] Janiszewski Z.: *Über die Begriffe „Linie" und „Flache"*. In Proceedings of International Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912.

[21] Janiszewski Z.: *Wstęp ogólny* (s. 3–27); *Topologia* (s. 387–401); *Podstawy geometrii* (s. 402–426); *Logistyka* (s. 449–461); *Zagadnienia filozoficzne matematyki* (s. 462–489); *Zakończenie* (s. 538–543). In *Poradnik dla samouków*. T. 1, Warszawa, 1914.

[22] Knaster B.: *Un continua dont tout sous-continu est indé-composable.* Fund. Math. 3(1922).

[23] Knaster B.: *Zygmunt Janiszewski*. Wiad. Mat. 74(1960), 1–9.

[24] Kuratowski K.: *Notatki do autobiografii*. Warszawa, 1981.

[25] Kuratowski K.: *Pół wieku matematyki polskiej 1920−1975*. Warszawa, 1973.

[26] Kuratowski K.: *Selected papers*. Warszawa, 1988.

[27] Kuratowski K.: *Stefan Mazurkiewicz et son oeuvre scientifique*. Fundamenta Mathematicae 34(1947).

[28] Kuratowski K.: *Théorie des continus irréductibles entre deux points I*. Fund. Math. 3(1922), 200−231.

[29] Kuratowski K.: *Théorie des continus irréductibles entre deux points II*. Fund. Math. 10(1927), 225−275.

[30] Kuratowski K.: *Une caractérisation topologique de la surface de la sphère*. Fund. Math. 13(1929), 307–308.

[31] Marczewski E.: *O pracach Wacława Sierpińskiego*. Wiad. Mat. 14(1972), 65–72.

[32] Mazurkiewicz S.: *Contribution à la théorie des ensembles.* Bull. Acad. Pol., 1913, 46–55.

[33] Mazurkiewicz S.: *O arytmetyzacji kontinuów*. C. R. Soc. Sc. Varsovie 6(1913), 46–55.

[34] Mazurkiewicz S.: *O artmetyzacji kontinuów II*. C. R. Soc. Sc. Varsovie 6(1913), 941–945.

[35] Mazurkiewicz S.: *O pewnej klasyfikacji punktów leżących na kontinuach dowolnych*. C. R. Soc. Sc. Varsovie 9(1916), 428–442.

[36] Mazurkiewicz S.: *O punktach wielokrotnych krzywych wypełniających obszar płaski*. 26, nr 1(1915), 113–120.

[37] Mazurkiewicz S.: *Problem 14*. Fund. Math. 2(1921).

[38] Mazurkiewicz S. : *Sur la théorie des ensambles*. Comptes Rendus Paris 151(1910), 296–298.

[39] Mazurkiewicz S., Sierpiński W. : *Sur un ensemble superposable avec chacune de ses deux parties*. Comptes Rendus Paris 158(1914), 618–19.

[40] Mazurkiewicz S.: *Teoria zbiorów* G_δ . Wektor 6(1917−18), 129–185.

[41] Mazurkiewicz S.: *Travaux de topologie et ses applications*. Warszawa, 1969.

[42] Menger K.: *Allgemeine Räume und Cartesische Räume, Zweite Mitteilung: Über umfassenste n-dimensionale Mengen*. Proc. K. Akad. Wetensch. Amsterdam 29(1926), 476–482.

[43] Moore H.: *The emergence of open sets, closed sets and limit points in analysis and topology*. Hist. Math. 35(2008).

[44] Murawski R.: *Filozofia matematyki i logiki w Polsce międzywojennej*. Toruń, 2011.

[45] Pol R.: *The works of Stefan Mazurkiewicz in topology*. In Aull C. E., Lowen R. (wyd.): *Handbook of the History of General Topology*. T. II., Dordrecht, Boston, London 1998.

[46] Prytuła J.: *Doktoraty z matematyki na Uniwersytecie Lwowskim w latach 1877–1917*. In Więsław W. (red.): *Dzieje matematyki polskiej II*. Wrocław, 2013, 133–156.

[47] Ruziewicz S.: *O funkcji ciągłej, monotonicznej, nie posiadającej pochodnej w nieprz-* Warszawskiego Wydziału Nauk Matematyczno-Przyrodniczych 6, 3–4(1913).

[48] Schinzel A.: *Wacław Sierpiński*. In *Matematyka przełomu XIX i XX wieku. Nurt mnogościowy*. Katowice 1992, 9–15.

[49] Sierpiński W.: *Kontynuum liniowe jako mnogość abstrakcyjna*, Prace Matematyczno-Fizyczne 27(1916), 203–227.

[50] Sierpiński W.: *O krzywej, której każdy punkt jest punktem rozgałęzienia*. Prace Matematyczno-Fizyczne 27(1916), 77–86.

[51] Sierpiński W.: *O krzywych wypełniających kwadrat*. Prace Matematyczno-Fizyczne 22(1912), 193–219.

[52] Sierpiński W.: *O pewnym twierdzeniu z teoryi mnogości i jego zastosowaniach do analizy funkcyj nieciągłych*. Prace Matematyczno-Fizyczne 22(1911), 19–23.

[53] Sierpiński W.: *O pewnem uogólnieniu zbiorów Borela*. Prace Matematyczno-Fizyczne 30(1919), 89–94.

[54] Sierpiński W.: *Ouvres choisies*. T. I.−III., Warszawa, 1974–76.

[55] Sierpiński W.: *Sur une condition pour qu'un continu soit une courbe jordanienne*. Fund. Math. 1(1920), 44–60.

[56] Sierpiński W.: *Sur une courbe cantorienne dont tout point est un point de ramification.* C. R. Acad. Sci. Paris 160(1915), 302.

[57] W. Sierpiński, *Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée*. C.R. Acad. Sci. Paris 162(1916), 629–632.

[58] Sierpiński W.: *Un théorème sur les continus*.Tôhoku Math. J. 13(1918), 300–303.

[59] Sierpiński W.: *Zarys teorii mnogości*. Lwów, 1912.

[60] Steinhaus H.: *Wspomnienie pośmiertne o Zygmuncie Janiszewskim*. Przegląd Filozoficzny 22(1920).

Adresa

Wiesław Wójcik
Instytut Historii Nauki Polskiej Akademii Nauk
ul. Nowy Świat 72
00-330 Warszawa
e-mail: *wwoj@ihnpan.waw.pl*

OBSAH

I. Vyzvané přednášky

II. Konferenční vystoupení

Přehled dosud vyšlých konferenčních sborníků

- M. Bečvářová (editorka): *27. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 25. 8. – 29. 8. 2006*. Sborník sylabů, Praha, 2006, 74 stran.
- M. Bečvářová (editorka): *28. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, 24. 8. – 28. 8. 2007*. Sborník sylabů, Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2007, 120 stran, ISBN 978-80-7378-016-6.
- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *29. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 22. 8. – 26. 8. 2008*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2008, 191 stran, ISBN 978-80-7378-048-7.
- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *30. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, 21. 8. – 25. 8. 2009*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2009, 242 stran, ISBN 978-80-7378-092-0.
- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *31. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 18. až 22. 8. 2010*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2010, 291 stran, ISBN 978-80-7378-128-6.
- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *32. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, 26. až 30. 8. 2011*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2011, 301 stran, ISBN 978-80-7378-172-9.
- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *33. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 24. 8. až 28. 8. 2012*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2012, 303 stran, ISBN 978-80-7378-208-5.
- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *34. mezinárodní konference Historie matematiky, Poděbrady, 23. až 27. 8. 2013*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2013, 201 stran, ISBN 978-80-7378-234-4.

Elektronické verze výše uvedených sborníků a další informace o mezinárodních konferencích Historie matematiky jsou dostupné na adrese

http://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/konference/hlavnindex.html.

Jindřich Bečvář, Martina Bečvářová (ed.)

35. mezinárodní konference

HISTORIE MATEMATIKY

Velké Meziříčí, 22. až 26. 8. 2014

Katedra didaktiky matematiky MFF UK

Vydal

MATFYZPRESS
vydavatelství
Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 459. publikaci

Z připravených předloh
vytisklo Reprostředisko UK MFF
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

První vydání

Praha 2014

ISBN 978-80-7378-265-8