ZÁKLADY ARITMETIKY A ALGEBRY II

1. Definujte následující pojmy:

- normální podgrupa
- ideál
- eukleidovský obor integrity
- obor integrity hlavních ideálů
- ireducibilní prvek
- prvočinitel
- jednotka
- aritmetická posloupnost k-tého stupně
- geometrická posloupnost
- geometrická řada
- harmonická řada
- aritmetický, geometrický a harmonický průměr
- algebraické číslo, transcendentní číslo
- stupeň rozšíření
- Dedekindův řez
- fundamentální (cauchyovská) posloupnost
- duální a dvojná čísla

2. Dokažte, že čísla $\sqrt{6}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{97}$ nejsou racionální.

3. Rozveďte v řetězový zlomek následující čísla:

- $\sqrt{a^2+1}$
- $\sqrt{a^2+2}$
- $\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+4}\right)$

4. Pomocí řetězových zlomků nalezněte zlomky, které aproximují následující iracionální čísla s přesností na šest desetinných míst (hodnoty získaných zlomků porovnávejte s hodnotou, kterou pro příslušné iracionální číslo dá kalkulačka):

- $\sqrt{2}$
- $\sqrt{3}$
- $\sqrt{5}$
- $\sqrt{7}$
- $\sqrt{10}$
- $\sqrt{11}$
- $\sqrt{18}$
- zlaté číslo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

5. Ukažte, jaký je vztah prvočinitele a ireducibilního prvku

- obecně,
- v eukleidovském oboru integrity.

6. Dokažte, že každý eukleidovský obor integrity je oborem integrity hlavních ideálů.

7. Uveďte příklady eukleidovských oborů integrity.

8. Popište svaz podgrup grupy kvaternionů a ukažte, že všechny její podrupy jsou normální.

9. Může mít grupa řádu 64 podgrupy řádu 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 16, 18?

10. Rozhodněte, zda jsou následující struktury (s obvyklým sčítáním a násobením) pole nebo pouze obory integrity:

- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Z}\}$
- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,\mathrm{i}] = \{a + b\sqrt{2}\,\mathrm{i}; a, b \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,\mathrm{i}] = \{a + b\sqrt{2}\,\mathrm{i}; a, b \in \mathbb{Z}\}$

11. K danému oboru integrity zkonstruujte podílové pole.

12. Zformulujte Lagrangeovu větu a dokažte ji.

13. Zformulujte a dokažte větu o homomorfismu pro grupy.

14. Zformulujte a dokažte větu o homomorfismu pro okruhy.

15. Odvoďte vzorec pro součet n členů

- aritmetické posloupnosti,
- geometrické posloupnosti.

16. Odvoďte vzorec pro součet geometrické řady.

17. Ukažte, že harmonická řada diverguje.

18. Uveďte, jaké vztahy platí mezi aritmetickým, geometrickým a harmonickým průměrem dvou čísel. Dokažte je.

19. Odvoďte vzorec pro řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$.

20. Odvoďte Cardanův vzorec a vysvětlete, co je *casus irreducibilis.*

21. Napište Viètovy vzorce pro algebraickou rovnici 4. stupně a dokažte je.

22. Řešte následující rovnice v oboru komplexních čísel:

- $x^2 + (1 - \mathrm{i})x + 4 + 7\,\mathrm{i} = 0$
- $(2 + \mathrm{i})x^2 - (9 + 2\,\mathrm{i})x + 5(3 - \mathrm{i}) = 0$
- $x^3 - 3x - 52 = 0$
- $x^3 + 9x^2 + 9x + 8 = 0$
- $2x^3 - 9x^2 + 18x - 7 = 0$
- $x^3 - 3x - 2 = 0$

- $x^3 - 9x - 28 = 0$
- $x^3 + 30x + 30 = 0$
- $x^3 - 15x - 4 = 0$
- $x^3 + 3x - 4 = 0$
- $x^3 + x + 10 = 0$
- $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
- $x^5 - 19x^4 + 76x^3 - 76x^2 + 19x - 1 = 0$

23. Najděte všechny kořeny následujících polynomů nad $\mathbb{Z}_6$:

- $x^3 + x^2 + x + 2$
- $x^3 + 3x + 2$
- $x^3 + 2x^2 + 3$

24. Najděte všechny kořeny následujících polynomů nad $\mathbb{Z}_5$:

- $x^3 + x^2 + x + 2$
- $x^3 + 3x + 2$
- $x^3 + 2x^2 + 3$

25. Zjistěte, zda jsou následující polynomy ireducibilní nad polem racionálních čísel:

- $x^3 + 2x - 7$
- $x^3 + 9x^2 + 9x + 8$
- $2x^3 - 9x^2 + 18x - 7$
- $x^4 - 4x^3 + 11x^2 + 8x - 26$
- $x^3 + 30x + 30$
- $x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2$

26. Řešte následující soustavy rovnic:

- $$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 84 \\ x + \sqrt{xy} + y &= 14 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ x + 2y + z &= 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 14 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= 7 \\ x^3 + y^3 &= 35 \end{aligned}$$