

ÚPRAVY VÝRAZŮ

1. Zjednodušte následující výrazy:

a) $6\sqrt{20} - 11\sqrt{180} + \sqrt{720} + \sqrt{1280}$,

b) $\left[(2\sqrt{180} + \sqrt{20} - 3\sqrt{320}) : 28\right]^{-1}$,

c) $\left(\frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{40}}\right)^2$,

d) $\left(\sqrt{1 + \sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)^{-1}$,

d) $\left(\frac{\sqrt{12} - \sqrt{6}}{\sqrt{12} + \sqrt{6}}\right)^2$,

e) $\frac{|4 - \sqrt{10}| - |\sqrt{10} - 2|}{\sqrt{40} - |0,75 \cdot (-2)^3|}$.

2. Zapište dané reálné číslo v jednodušším tvaru:

a) $\log_2 8 \cdot \log_2 \sqrt{8} - \log_2 0,25 \cdot \log_2 4$,

b) $\log_2(1 + \log_4 \sqrt{2} + \log_{\sqrt{2}} 4 - 1,25)$,

c) $\left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} : \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 3^2\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$,

d) $\frac{\sin 30^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 30^\circ + \cos 70^\circ}$,

e) $\sin 40^\circ + \sin 80^\circ + \sin 120^\circ + \sin 160^\circ$,

f) $\frac{\cot^2 \frac{\pi}{10} + \cos^2 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{\pi}{10}}{\sin \pi^{10}}$.

3. Úpravy výrazů s proměnnými

a) Najděte vhodné rozklady mnohočlenů, stanovte definiční obory výrazů, výrazy zjednodušte:

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{2x^2 - 13x + 15},$$

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1},$$

$$\frac{2x^3 - 5x^2 - 2x + 5}{x^2 - 4x + 3}.$$

b) Upravte následující výrazy tak, aby neobsahovaly absolutní hodnoty:

$$3 - |x| + |-x|,$$

$$\sqrt{(1-x)^x} - |x-1|,$$

$$2|x-2| + |4-2x| - 4x.$$

c) Určete definiční obor následujícího výrazu a pak jej zjednodušte:

$$\frac{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1\right)(x^2 - y^2)}{\frac{x^4}{y^2} - \frac{y^4}{x^2}},$$

$$\frac{a^4 - b^4}{a^2 b^2} : \left[\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{2a}{b} + \frac{a^2}{b^2}\right) \right],$$

$$\frac{\sqrt{2a} - \frac{2a}{a + \sqrt{2a}}}{\frac{\sqrt{2a} - 2}{a - 2}}.$$

4. Důkazy vět o rovnosti výrazů

a) Dokažte, že pro každé reálné číslo a platí:

$$5 \cdot 3^{a+2} - 3 \cdot 3^{a+1} = 36 \cdot 3^a.$$

b) Dokažte, že platí následující rovnost:

$$\sqrt{15 + 10\sqrt{2}} - \sqrt{15 - 10\sqrt{2}} = 20.$$

c) Dokažte, že pro každé reálné číslo $r \geq 1$ platí:

$$\sqrt{(r-1)(r^2-1)} + \sqrt{9r^2 + 9r^3} + \sqrt{4+4r} = (4r+1)\sqrt{r+1}.$$

5. Dokažte, že následující dvojice výrazů jsou si rovny v průniku svých definičních oborů:

a) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$ a $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$,

b) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\cos 2x}$ a $\cos^{-2} x$,

c) $\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} + \operatorname{tg} \frac{x-y}{2}$ a $2 \sin x \cdot (\cos x + \cos y)^{-1}$.

6. Dokažte, že pro přirozená čísla a a b , $a^2 \geq b$ platí:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a+r}{2}} + \sqrt{\frac{a-r}{2}}, \text{ kde } r = \sqrt{a^2 - b}.$$

7. Dokažte, že pro každé reálné nenulové číslo x platí:

$$(a - x^{-1})^2 = \frac{(ax)^2 - 2ax + 1}{x^2}.$$