DŮKAZY

1. Dokažte, že číslo $2^{100} + 10$ je dělitelné třinácti.

2. Je-li n libovolné přirozené číslo, pak $n^3 - n$ je dělitelné šesti. Dokažte.

3. Je-li n libovolné přirozené číslo, pak $n^5 - n$ je dělitelné pěti. Dokažte.

4. Je-li n libovolné přirozené číslo, pak $n^7 - n$ je dělitelné sedmi. Dokažte.

5. Je-li n libovolné přirozené číslo, pak $6^{2n} - 8$ je dělitelné sedmi. Dokažte.

6. Jsou-li a, b dvě libovolná přirozená čísla, pak číslo $a^3 + b^3$ je dělitelné číslem $a + b$. Dokažte.

7. Dokažte, že číslo $a_n = 2 \cdot 3^{5n-4} + 5$ je dělitelné jedenácti pro každé přirozené číslo n.

8. Je-li číslo m složené, pak je možno najít prvočíslo $p \leq \sqrt{m}$, které dělí číslo m. Dokažte.

9. Dokažte, že číslo 827 je prvočíslo.

10. Je-li n přirozené číslo, pak číslo $5n^2 + 1$ není úplný čtverec. Dokažte.

11. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

12. Dokažte, že součet n prvních přirozených čísel je roven $\frac{n(n+1)}{2}$.

13. Dokažte, že součin dvou po sobě jdoucích čísel je dělitelný dvěma.

14. Dokažte, že součin tří po sobě následujících čísel je dělitelný šesti.

15. Dokažte, že platí rovnost

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

16. Dokažte, že platí rovnost

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

17. Dokažte, že platí rovnost

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

18. Dokažte, že platí rovnost

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

19. Dokažte, že platí rovnost

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

20. Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.

21. Dokažte, že součet čtverců dvou po sobě jdoucích přirozených čísel zvětšený o jedničku je dělitelný čtyřmi.

22. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geq 3$ platí

$$2^n > 2n + 1.$$

23. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geq 5$ platí

$$2^n > n^2.$$

24. Dokažte, že pro $x \neq 2k\pi$ platí

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

25. Dokažte, že pro $x \neq 2k\pi$ platí

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

26. Dokažte, že pro $x \neq k\pi$ platí

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \ldots \cdot \cos 2^n x = \frac{\sin 2^{n+1} x}{2^{n+1} \sin x}.$$

27. Dokažte, že pro $x \neq 2k\pi$ platí

$$\sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \cdots + n \sin nx = \frac{(n+1) \sin nx - n \sin(n+1)x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

28. Dokažte, že pro $x \neq 2k\pi$ platí

$$\cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + \cdots + n \cos nx = \frac{(n+1) \cos nx - n \cos(n+1)x - 1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

29. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí: Jestliže $0 < x_i < \pi$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ potom

$$|\sin(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)| < \sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n.$$

30. Dokažte, že platí

$$(1 + \mathrm{i})^n = 2^{\frac{n}{2}} (\cos \frac{n\pi}{4} + \mathrm{i} \sin \frac{n\pi}{4}).$$

31. Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.

32. Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$ není racionální.

33. Dokažte, že pro vzdálenosti tří libovolných bodů A, B, C platí

$$|AB| + |BC| \geq |AC|,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když bod C je bodem úsečky AB.

34. Dokažte, že součet vnitřních úhlů trojúhelníka je roven $2R$, kde R je pravý úhel.

35. Dokažte, že vnější úhly trojúhelníka jsou rovny součtu protějších úhlů vnitřních.

36. Dokažte, že spojnice pat dvou výšek ostroúhlého trojúhelníka odděluje od něj trojúhelník danému trojúhelníku podobný.

37. Dokažte, že v trojúhelníku osa vnitřního úhlu dělí protější stranu v poměru stran přilehlých.

38. Dokažte, že dvě různé kružnice mají nejvýše dva různé společné body.

39. Dokažte, že geometrickým místem bodů X, z nichž je vidět úsečku AB pod úhlem α, jsou kruhové oblouky AX_1B a AX_2B (s výjimkou bodů A a B) souměrně sdružené podle přímky AB.

40. Dokažte: mezi všemi obdélníky, které mají obvod o, existuje jeden, který má největší obsah.

41. Dokažte, že přímky spojující vrchol rovnoběžníku se středy protějších stran rozdělují úhlopříčku, která daným vrcholem neprochází, na tři stejné části.

42. Dokažte, že n různých bodů v rovině ($n \geq 2$), z nichž žádné tři neleží v přímce, určuje $\frac{n(n-1)}{2}$ různých přímek.

43. Je-li $n \geq 2$, potom n různých přímek ležících v jedné rovině a procházejících jedním bodem dělí rovinu na $2n$ dutých úhlů. Dokažte.

44. Dokažte, že n různých bodů v prostoru ($n \geq 3$), z nichž žádné tři neleží v téže přímce a žádné čtyři neleží v téže rovině, určuje $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ různých rovin.

45. Dokažte, že součet vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku je $2(n-2)R$, kde R je pravý úhel.

46. Dokažte, že n rovin jdoucích jedním bodem, z nichž žádné tři nemají společnou přímku dělí prostor na $n(n-1) + 24$ částí.

47. V rovině je dán konečný počet přímek. Označme a počet průsečíků těchto přímek, b počet částí, na něž jsou přímky průsečíky rozděleny, a c počet částí, na něž přímky rozdělují rovinu. Dokažte, že $a - b + c = 1$.

48. Dokažte kosinovou větu.