Základy aritmetiky a algebry

Jindřich Bečvář, Zdeněk Halas

Abstrakt

Příspěvek informuje o některých změnách, k nimž došlo na Matematicko-fyzikální fakultě UK ve výchově budoucích učitelů matematiky v souvislosti s novou akreditací bakalářského studia. Do prvních pěti semestrů byly zařazeny tzv. „základy matematiky“, přičemž první a čtvrtý semestr je věnován aritmetice a algebře. Hlavní myšlence základů aritmetiky a algebry je věnován tento článek.

1 Úvod

Od školního roku 2012/13 začíná na Matematicko-fyzikální fakultě UK příprava budoucích středoškolských učitelů matematiky (v kombinaci s předměty F, DG, I, Z, B, Ch, TV) podle nové akreditace bakalářského studia oboru *Matematika se zaměřením na vzdělávání*. Při sestavování studijních plánů bylo přihlédnuto k nízké úrovni znalostí a dovedností současných maturantů a k jejich všestranné nepřipravenosti k vysokoškolskému studiu. V posledních dvou desetiletích totiž značně pokleslo porozumění mluvenému i psanému slovu, snížila se schopnost soustředění, zodpovědnost za odvedenou práci, vztah k pečlivému a cílevědomému studiu, kázeň atd. V tomto kalendářním roce se na Katedře didaktiky matematiky MFF UK připravuje také nová akreditace navazujícího magisterského studia.

Nově akreditovaný studijní plán učitelství matematiky na MFF UK přináší rovnoměrné rozložení *výuky matematiky* a *výchovy učitelských profesních dovedností* mezi bakalářské a magisterské studium. Dosavadní bakalářské studium oboru *Matematika zaměřená na vzdělávání* bylo totiž věnováno jen matematice a navazující magisterské studium převážně profesní výchově k učitelství matematiky. Nový plán navíc představuje v řadě směrů výrazný ústup od „zbytečné abstrakce“ v prvních dvou letech studia. Obsahy jednotlivých předmětů jsou totiž koncipovány konkrétněji a v bezprostřední návaznosti na látku střední školy. Usnadňují tak studentům přechod ze střední školy na školu vysokou.

2 Základy matematiky

Jedním z podstatných přínosů inovací je zavedení série předmětů vyučovaných v prvních pěti semestrech bakalářského studia: *Základy aritmetiky a algebry I*, *Základy rovinné geometrie*, *Základy prostorové geometrie*, *Základy aritmetiky a algebry II*, *Základy zobrazovacích metod* (vše s časovou dotací 1/1).

Cílem „základů matematiky“ je opakování, upevnění a prohloubení znalostí středoškolské matematiky a rozvinutí aritmetických, algebraických i geometrických dovedností. Středoškolská matematika je prezentována s určitým přesahem do vysokoškolské matematiky, přehledně, v exaktnější rovině a do větší hloubky, s nadhledem a v širších souvislostech. Látka je doplňována důkazy (které na střední škole většinou chybí), rozšiřována o zajímavá témata, o historické a metodické poznámky. Zařazeny jsou partie, které jsou inspirativní, mohou studenty motivovat k práci a probouzet jejich zájem o matematiku. Důraz je kladen na názornost a srozumitelnost na straně jedné a na přesnost a exaktnost na straně druhé.

Studenti učitelství – budoucí učitelé – získávají v „základech matematiky“ širší matematický rozhled, nalézají nejrůznější souvislosti a postupně vnímají jednotu celé matematiky. Současně vstřebávají metodické a didaktické zkušenosti v bezprostřední vazbě na jednotlivá matematická témata. Probíraná témata jim mohou při jejich budoucím učitelském působení posloužit ke zpestření výuky a koncipování obsahu výběrových seminářů.

3 Základy aritmetiky a algebry

V prvním, resp. čtvrtém semestru inovovaného bakalářského studijního plánu jsou vyučovány *Základy aritmetiky a algebry I*, resp. *II*.

Obsahem prvního semestru je zejména problematika číselných oborů (přirozená, celá, racionální, reálná a komplexní čísla), a to jak z hlediska aritmetiky, tak z hlediska algebry s úzkou vazbou na geometrii, teorii množin a logiku. Postupné budování základních číselných oborů je provedeno zcela v konkrétní rovině a s minimálním stupněm abstrakce, pozvolna však připravuje cestu k pochopení jak základních myšlenek obecné algebry (algebraické operace a jejich vlastnosti, algebra struktur, faktorizace atd.), tak k porozumění úvodním pojmům teorie množin (mohutnosti, uspořádání, ordinální a kardinální čísla). Postupné rozšiřování číselných oborů jde ruku v ruce s otázkou řešitelnosti algebraických rovnic a s geometrickými interpretacemi aritmetických a algebraických faktů (aritmetické zákony, znázornění aritmetického, geometrického a harmonického průměru, vztah nesouměřitelnosti úseček a iracionality, využití komplexních čísel v geometrii a goniometrii apod.).

Ve čtvrtém semestru přichází problematika různých typů rovnic a metod jejich řešení, a to jak standardním způsobem, tak některými elegantními postupy, které užívali naši předkové. Na tematiku číselných oborů navazují partie o kvaternionech, oktávách, duálních a dvojných číslech a dělitelnosti v některých nestandardních strukturách.

Základy aritmetiky a algebry I a II přibližují studentům aritmetiku a algebru po stránce teoretické i praktické a přispívají k propojení středoškolské a vysokoškolské látky.

4 Konkrétní příklady

V těchto odstavcích nastíníme několik příkladů, kterými můžeme vzbudit zájem studentů a motivovat je k hlubšímu studiu. Domníváme se totiž, že soustavným redukováním učiva a vynecháváním důkazů na střední škole (k čemuž v uplynulých dvou desetiletích docházelo a bohužel stále dochází) ztrácí matematika to, co je jí vlastní, a všechno to, čím může inspirovat. Tím se stává nudným předmětem, který nic zajímavého a inspirativního neposkytuje.

V oboru přirozených čísel je velmi důležitý *princip matematické indukce* (jeden z Peanových axiomů). Je vhodné dokázat, že je ekvivalentní s *principem dobrého uspořádání*. Matematickou indukcí jsou často dokazovány vzorce popisující součet n prvků posloupnosti druhých, třetích či k-tých mocnin. Takovéto vzorce se sice indukcí poměrně snadno dokáží, ale vůbec není jasné, jak se naleznou. Proto je rozumné výklad na tomto místě obohatit a ukázat, jak se nalezne například vzorec

$$1^5 + 2^5 + \cdots + n^5 = {}^1/_{12} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n^2 + 2n - 1)\,.$$

V oboru celých čísel Z je nekonečně mnoho prvočísel (je rozumné dokázat Eukleidovu větu, kterou studenti většinou neznají) a dvě tzv. *jednotky*, neboli *invertibilní prvky* (±1). V oboru *Gaussových celých čísel* Z [i] (komplexní čísla s celočíselnými složkami), který je poměrně jednoduchým rozšířením oboru Z, jsou jednotky čtyři (± 1, ± i). Prvočísla však vypadají v oboru Gaussových celých čísel jinak než v oboru celých čísel Z, rozklady na součin prvočísel tedy rovněž jinak. V oboru Z [i] jsou například čísla 2, 5, 13, 17 složená:

$$2 = (1+\mathrm{i}) \cdot (1-\mathrm{i})\,,\ \ 5 = (1+2\mathrm{i}) \cdot (1-2\mathrm{i})\,,\ \ 13 = (2+3\mathrm{i}) \cdot (2-3\mathrm{i})\,,\ \ 17 = (1+4\mathrm{i}) \cdot (1-4\mathrm{i})\,.$$

V Z [i] jsou prvočísly např. čísla 3, 7, 11, 1 ± i, 1 ± 2i, 1 ± 4i, 2 ± 3i. *Základní věta aritmetiky* o jednoznačném rozkladu celého čísla na součin prvočísel platí i v Z [i]. Na první pohled se však může zdát, že jednoznačnost rozkladu na prvočísla v Z [i] neplatí, neboť

$$5 = (1+2\mathrm{i}) \cdot (1-2\mathrm{i}) = (2-\mathrm{i}) \cdot (2+\mathrm{i})\,.$$

Tyto rozklady však nepovažujeme za různé, říkáme jim *asociované*, neboť z jednoho dostaneme druhý vynásobením jednotkami, jejichž součin je 1.

$$(1+2\mathrm{i}) \cdot (-\mathrm{i}) = (2-\mathrm{i})\,, \qquad (1-2\mathrm{i}) \cdot \mathrm{i} = (2+\mathrm{i})\,.$$

Dobře si rozmysleme následující rozklad čísla 10 (čísla 2, 5, $1 \pm 3i$ jsou složená):

$$10 = 2 \cdot 5 = (1 + 3i) \cdot (1 - 3i) = (1 + i) \cdot (1 - i) \cdot (1 + 2i) \cdot (1 - 2i).$$

Obdobné úvahy lze rozvíjet například v oborech $Z[\sqrt{2}]$ a $Z[\sqrt{3}]$, v nichž je však více jednotek.

Poměrně snadno můžeme ukázat číselné obory, v nichž *Základní věta aritmetiky* neplatí. Takovýto příklad otvírá dveře k bohatosti matematických struktur. Zajímavý je např. číselný obor $Z[i\sqrt{5}]$, ve kterém jsou pouze dvě jednotky (± 1). Neplatí v něm jednoznačnost rozkladu na *ireducibilní* (nerozložitelné) prvky, kterým již není rozumné říkat prvočísla. Postrádají totiž důležitou vlastnost (tzv. *podmínka prvočinitelová*), kterou mají prvočísla v oboru celých čísel *Z*. Ireducibilními prvky v $Z[i\sqrt{5}]$ jsou například čísla

$$2, 3, 7, 11, 13, \ldots, \pm i\sqrt{5}, 1 \pm i\sqrt{5}, 2 \pm i\sqrt{5}, 3 \pm i\sqrt{5}, 4 \pm i\sqrt{5}, 1 \pm 2i\sqrt{5}, 3 \pm 2i\sqrt{5}.$$

Nelze je totiž netriviálním způsobem rozložit na součin. Rozložitelná jsou např. čísla 5 a 29:

$$5 = i\sqrt{5} \cdot (-i\sqrt{5}), \qquad 29 = (3 + 2i\sqrt{5}) \cdot (3 - 2i\sqrt{5}).$$

Jak již bylo řečeno, v oboru $Z[i\sqrt{5}]$ neplatí jednoznačnost rozkladu čísla na ireducibilní prvky. Číslo 9 lze totiž rozložit dvěma způsoby:

$$9 = 3 \cdot 3 = (2 + i\sqrt{5}) \cdot (2 - i\sqrt{5}).$$

Ještě zajímavější jsou tři různé rozklady čísla 21:

$$21 = 3 \cdot 7 = (1 + 2i\sqrt{5}) \cdot (1 - 2i\sqrt{5}) = (4 + i\sqrt{5}) \cdot (4 - i\sqrt{5}).$$

Snadno zjistíme, že v oboru $Z[i\sqrt{5}]$ neplatí tzv. *podmínka prvočinitelová*, na kterou jsme „v běžném životě“ (tj. v oboru celých čísel *Z*) zvyklí. Ve výše uvedených rozkladech čísla 21 vidíme, že číslo $1 + 2i\sqrt{5}$ dělí součin $(4 + i\sqrt{5}) \cdot (4 - i\sqrt{5})$. Nedělí však ani číslo $4 + i\sqrt{5}$, ani číslo $4 - i\sqrt{5}$, jak snadno ověříme.

Prozraďme na závěr, že velkou pomůckou při vyšetřování dělitelnosti v předchozích příkladech je tzv. *norma*. Ve zmíněných oborech je definována těmito rovnostmi:

$$\mathrm{N}(a + b\,i) = a^2 + b^2, \quad \mathrm{N}(a + b\sqrt{2}) = |a^2 - 2b^2|, \quad \mathrm{N}(a + b\sqrt{3}) = |a^2 - 3b^2|,$$
$$\mathrm{N}(a + b\,i\sqrt{5}) = a^2 + 5b^2.$$

Podstatné je, že platí tzv. *zákon normy*, tj. $\mathrm{N}(\alpha \cdot \beta) = \mathrm{N}(\alpha) \cdot \mathrm{N}(\beta)$. Tento vztah je velmi důležitý pro zkoumání vlastností jednotlivých číselných oborů.

Studium číselných oborů, které se odlišují od klasických číselných oborů, jež jsou studentům víceméně známé (přirozená, celá, racionální, reálná, případně komplexní čísla), je zajímavé a pro studenty překvapivé. Velkou výhodou je, že na hledání jejich základních vlastností vystačí se znalostmi středoškolské matematiky a s trochou počtářských dovedností. Vhodným tématem je rovněž studium elementárních vlastností *dvojných*, resp. *duálních* čísel, tj. dvousložkových čísel tvaru $a + b\,i$, která se sčítají po složkách a násobí pomocí rovností

$$(a + b\,i) \cdot (c + d\,i) = (ac + bd) + (ad + bc)\,i, \quad \text{resp.} \quad (a + b\,i) \cdot (c + d\,i) = ac + (ad + bc)\,i.$$

Obor dvojných, duálních a komplexních čísel jsou jedinými třemi obory dvousložkových čísel, v nichž se sčítá po složkách a násobí asociativně a distributivně vůči sčítání. V dvojných číslech pro jednotku i platí $i^2 = 1$, v duálních $i^2 = 0$, v komplexních $i^2 = -1$.

5 Poznámka o literatuře

Obsahová náplň obou semestrů *Základů aritmetiky a algebry* byla koncipována po pečlivém studiu a komparaci současných učebních textů s našimi učebnicemi celého předchozího století. V úvahu byly vzaty vysokoškolské i středoškolské učebnice. Připomeňme české a slovenské učebnice *Algebra a teoretická aritmetika* (viz [1], [10], [13]), Hrušovu *Elementární aritmetiku* [9] a Čechovu knihu *Čísla a početní výkony* [4]. Řada cenných a inspirativních

poznatků pro výuku vyplynula z prvního dílu knihy Felixe Kleina (1849–1925) *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* [11]. Velmi poučné pro nás bylo prolistování učebnic pro vyšší střední školy z druhé poloviny 19. století a první poloviny 20. století (Šimerka [14], Hromádko a Strnad [8], Machovec [12], Hoza [7], Bydžovský [2], Bydžovský, Teplý a Vyčichlo [3], Čech [5] a [6], dále např. Smolík, Studnička a další).

6 Závěr

Základy aritmetiky a algebry v obou semestrech bezprostředně navazují na výuku na střední škole, látka je však v přednášce i ve cvičení probírána exaktněji, tj. z hlediska matematiky vysokoškolské. Látka, kterou budou studenti jednou sami vyučovat, je zasazena do širšího kontextu matematického i historického. Jednotlivá témata jsou přirozeným způsobem využívána k předávání konkrétních metodických poznatků a didaktických zkušeností. Studenti učitelství matematiky tak přijdou hned v prvním semestru svého vysokoškolského studia do úzkého kontaktu s tím, co je bezprostředním cílem jejich studia, a mohou upevnit svůj kladný vztah k učitelskému povolání.

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory projektu FRVŠ F6/555/2012 – *Základy aritmetiky a algebry*.

Literatura

[1] BLAŽEK, J., a kol. *Algebra a teoretická aritmetika I., II*. Praha: SPN, 1983, 1985.

[2] BYDŽOVSKÝ, B. *Aritmetika pro V. až VII. třídu škol reálných*. Praha: JČM, 1911.

[3] BYDŽOVSKÝ, B., TEPLÝ, S., VYČICHLO, F. *Aritmetika pro V.–VIII. třídu středních škol*. Praha: JČMF, 1947.

[4] ČECH, E. *Čísla a početní výkony*. Praha: SNTL, 1954.

[5] ČECH, E. *Aritmetika pro první, druhou, třetí třídu středních škol*. Praha: JČM, 1943.

[6] ČECH, E. *Poznámky k učebnicím aritmetiky pro 1. – 3. třídu středních škol*. Praha: JČM, 1944.

[7] HOZA, E. *Algebra pro vyšší reálky*. Praha: I. L. Kober, 1892.

[8] HROMÁDKO, F., STRNAD, A. *Sbírka úloh z algebry*. Praha: JČM, 1876, 7. vyd. 1906.

[9] HRUŠA, K. *Elementární aritmetika*. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1953.

[10] KATRIŇÁK, T., a kol. *Algebra a teoretická aritmetika I*. Bratislava, Praha: Alfa, SNTL, 1985.

[11] KLEIN, F. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, I. Aritmetik, Algebra, Analysis*. 3. vyd. Berlin: Springer-Verlag, 1924. Anglický překlad: *Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis*. Ruský překlad: *Elementarnaja matematika s točki zrenija vysšej. Arifmetika, algebra, analiz.* 4. vyd. Moskva: Nauka, 1987.

[12] MACHOVEC, F. *Algebra pro vyšší třídy škol středních*. Praha: F. Tempský, 1886 (vydání pro gymnasia), 1887 (vydání pro reálky).

[13] ŠALÁT, T., a kol. *Algebra a teoretická aritmetika II*. Bratislava, Praha: Alfa, SNTL, 1986.

[14] ŠIMERKA, V. *Algebra čili počtářství obecné*. Praha: E. Grégr, 1863.