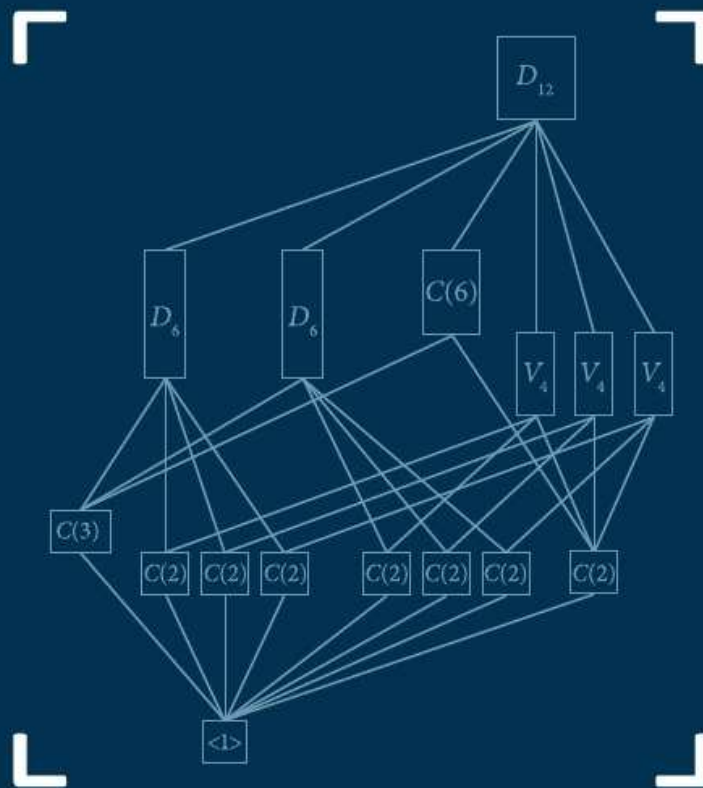


OD ARITMETIKY K ABSTRAKTNÍ ALGEBŘE

Vlastimil Dlab | Jindřich Bečvář



Vlastimil Dlab, Jindřich Bečvář: *Od aritmetiky k abstraktní algebře*,
SERIFA, Praha, 2016, 1. vydání, 479 stran, ISBN 978-80-260-9838-6

Prodává Knihkupectví Karolinum, Celetná 18, Praha 1,
(tel., fax: 224 491 448, 224 491 671).

UČÍME SE ALGEBŘE

Pozvání k elementárnímu kurzu algebry

I dobře napsané a promyšlené učebnice poměrně často odstrašují čtenáře tím, že látku prezentují pouze v klasickém schématu: definice – věta – důkaz. Nenabízejí prakticky žádné příklady, nevyužívají motivace, neuvádějí aplikace.

Zvolili jsme netradiční přístup. Dítě se nenaučí, co je *stůl*, když mu předložíme jeho definici nebo popíšeme jeho „konstrukce“ splňující jisté „axiomy“. Ukážeme-li mu však několik různých stolů, bude po jisté chvíli samo schopno vybrat stůl z předložených kusů nábytku. Podáváme proto například pestrý soubor konkrétních grup, a až je student pochopí a zažije, měl by být schopen definici grupy sám vyslovit. A to je základní myšlenka naší učebnice.

Při psaní knihy jsme sledovali dva hlavní cíle. Prvním je *motivace žáků a studentů ke studiu matematiky*. Domníváme se, že pozitivní roli přitom mohou sehrát pouze ti učitelé, kteří jsou kvalitně vzděláni v matematice a dobře profesně připraveni na učitelské poslání. Obtížnou práci při výchově takových učitelů za nás neudělají ani nové metodiky, didaktiky, moderní technologie a výpočetní technika, ani přepracovávání rámcových vzdělávacích programů, vylepšování sylabů, resp. učebních osnov. Nové učitele musíme vychovat sami. Druhým cílem naší učebnice je snaha ukázat, *jak správně, zajímavě a poutavě vyučovat matematice*.

Každou kapitolu jsme se snažili důsledně budovat v této formě: rozsáhlejší inspirativní motivace – kurzovní výklad – zajímavé pokročilejší partie – klasická cvičení a obtížnější problémové úlohy. Učebnice tedy obsahuje jak úvodní kurz aritmetiky a algebry, který poskytuje dostatečný prostor pro zvládnutí základů těchto disciplín, tak bohatý motivační, procvičující a rozšiřující materiál, který navíc umožňuje pochopení současných trendů v algebře. V neposlední řadě jsme se snažili zbavit umělých a rigidně udržovaných hranic mezi jednotlivými obory, a zdůrazňovat úzké vztahy algebry a geometrie, algebry a aritmetiky, algebry a teorie čísel apod. Právě to je pro učitele důležité.

Sledovat vytčené cíle a pečlivě se držet zvolených principů není jednoduché. Pozorný čtenář jistě nalezne náměty ke zdokonalení textu. Každou připomínku, která ke zlepšení naší učebnice přispěje, uvítáme.

P. R. Halmos (1916–2006), známý americký matematik maďarského původu a zkušený učitel, uvádí, že nejlepší způsob, jak se naučit matematice, je ji skutečně „dělat“. V knize *I Want to Be a Mathematician* (Springer-Verlag, New York, Inc., 1985) tento přístup ke studiu matematiky dále specifikuje:

Don't just read it; fight it! Ask your own questions, look for your own examples, discover your own proofs. Is the hypothesis necessary? Is the converse true? What happens in the classical special case? What about the degenerate cases? Where does the proof use the hypothesis? (str. 69)

Připomíná rovněž staré přísloví, které bývá často přičítáno významnému čínskému filozofu Konfuciovi (551–479 př. Kr.):

I heard, I forget; I see, I remember; I do, I understand. (str. 258)

Česky bychom asi řekli: slyším a zapomenu, vidím a pamatuji, dělám a rozumím. Na jiném místě Halmos zdůrazňuje, že pořádný, dobře organizovaný štos příkladů, tak rozsáhlý, jak jen vůbec může být, je nepostradatelný pro důkladné porozumění jakémukoli pojmu.

V tomto duchu jsme se snažili materiál v učebnici prezentovat. Umožňují to jak příklady, tak cvičení, která bezprostředně navazují na příslušnou látku, doplňují ji a pomáhají osvětlit. Pro omezený rozsah učebnice jsme nezařadili ve větší míře cvičení, která prověřují, zda čtenář umí aplikovat předchozí tvrzení – taková lze snadno nalézt v řadě dostupných sbírek. Výsledky několika náročnějších cvičení jsme uvedli v závěru učebnice.

Mnohé učebnice obtížně řeší problém, v jakém pořadí prezentovat grupy a okruhy. Mají být nejprve grupy a poté okruhy nebo naopak? Tomuto trápení jsme se vyhnuli tím, že oba tyto pojmy v textu používáme, jakmile se přirozeně vyskytnou. Jejich hlubšími vlastnostmi se pak zabýváme v samostatných závěrečných kapitolách. Protože se však některé abstraktní pojmy objevují bez formálních definic již v počátečních kapitolách týkajících se číselných oborů, považovali jsme za účelné je shrnout ve stručné Kapitole VI.

Některé sekce jsou značeny symbolem ★. Ty mohou být – nezávisle na ostatních sekcích – při prvním čtení vynechány, neboť slouží k výraznému rozšíření obzorů a ke zdůraznění souvislostí mezi jednotlivými oblastmi matematiky.

Kniha je určena především budoucím středoškolským učitelům matematiky a jejich vysokoškolským učitelům. Jejím předobrazem byly texty a soubory cvičení, které měli studenti – budoucí učitelé – k dispozici na přednáškách z obecné algebry v letech 2008 až 2012 na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Přivítáme, když osloví i další zájemce o algebru, aritmetiku a matematiku vůbec.

Žádná kniha nežije v izolaci od ostatních publikací a vlivů. Nejrůznější inspirace jsme našli v četných pracích, poučili jsme se z řady učebních textů. Seznam užitých pramenů jsme připojili v závěru. Některé pomohly vylepšit teoretické formulace, jiné ukázaly, jak se vyhnout nežádoucím problémům a nástrahám, jakou volit motivaci a jak vytvářet aplikační úlohy.

Z vlastních dlouholetých zkušeností víme, že hlubší porozumění matematice je založeno na postupném dosahování jednotlivých úrovní znalostí a dovedností. K celkové vyzrálosti se většinou nedostaneme jednoduchou přímou cestou, ale komplikovanějším putováním, které je výstižně charakterizováno v učebnici *Algebra. An Elementary Text-Book for the Higher Classes of Secondary Schools and for Colleges* G. Chrystala (Adam and Charles Black, Edinburg, 1889, Part II).

Every mathematical book that is worth anything must be read “backwards and forwards,” if I may use the expression. I would modify Lagrange’s advice a little and say, “Go on, but often return to strengthen your faith.” When you come on a hard or dreary passage, pass it over; and come back to it after you have seen its importance or found the need for it further on. (str. viii)

Vlastimil Dlab a Jindřich Bečvář

V Ottawě a Praze, v květnu 2016

OBSAH

Obsah	3
Učíme se algebře	7
I. ÚVOD, ZÁKLADNÍ POJMY	11
1. Několik úvodních slov o množinách	11
2. Vennovy diagramy	12
3. Další vlastnosti množinových operací	17
4. Důležitá role zobrazení	18
5. Čtyři příklady bijekcí v rovinné geometrii	22
6. ★ Bernsteinova-Schröderova-Cantorova věta	25
7. ★ Poznámka o nekonečné množině	26
8. Množiny zobrazení	27
9. Rozklady množin, ekvivalence	28
10. ★ Počet rozkladů konečné množiny	30
11. Částečně uspořádané množiny, pojem svazu	33
12. ★ Konečné distributivní svazy	38
13. Orientovaný graf, pologrupa cest	44
14. Pologrupy a monoidy	45
15. ★ Konečné automaty	49
16. ★ Kategorie	52
II. PŘIROZENÁ ČÍSLA, INDUKCE	55
1. Připomeňme dobré uspořádání a indukci	55
2. Binomické koeficienty a posloupnosti celých čísel	62
3. Aritmetické posloupnosti vyšších řádů	68
4. Součty mocnin přirozených čísel	70
5. ★ Katalánská čísla	74
6. Každý má svou posloupnost	78
7. Charakteristické funkce	82
8. Závěrečná cvičení	84
III. CELÁ ČÍSLA, DĚLITELNOST	91
1. Role celých čísel	91
2. Základní struktura	95
3. Eukleidův algoritmus	98
4. Svazy dělitelů	103

5. Diofantické rovnice	106
6. Nezáporná řešení diofantických rovnic	110
7. Soustava lineárních diofantických rovnic	115
8. Zápis celých čísel	121
9. Kongruence modulo n (zbytková reprezentace čísel)	124
10. Prvočísla	135
11. ★ Mersennova čísla, dokonalá čísla	142
12. Direktní součiny cyklických grup	146
13. Kódování, kryptografický systém R.S.A.	150
IV. RACIONÁLNÍ A REÁLNÁ ČÍSLA	161
1. Racionální čísla, zlomky	162
2. Reprezentace racionálních čísel v číselné soustavě o základu B	171
3. Racionální trojúhelník à la Pascal	176
4. Reálná čísla	181
5. Trochu více o řetězových zlomcích	183
6. ★ Aplikace řetězových zlomků na Pellovu rovnici	188
7. Kongruence v \mathbb{R}	191
8. ★ Stručně o p -adických číslech	192
9. Několik poznámek	200
V. KOMPLEXNÍ ČÍSLA A ROVINNÁ GEOMETRIE	203
1. Trocha historie	203
2. Pole komplexních čísel	207
3. Geometrická reprezentace komplexních čísel	212
4. Eulerův exponenciální tvar komplexních čísel, Moivreova věta	221
5. Geometrie komplexních čísel	226
6. ★ Petrovy mnohoúhelníky	245
7. Izometrie roviny	256
8. Kvaterniony	261
9. ★ Duální a dvojná čísla, aritmetizace roviny a prostoru	267
VI. ALGEBRAICKÉ STRUKTURY – SHRUTÍ	269
1. Pologrupy a grupy	269
2. Okruhy a pole	271
3. Algebry cest	279

VII. POLYNOMY	283
1. Základní definice a vlastnosti	283
2. Eukleidovské dělení	289
3. Dělitelnost	299
4. Kongruence	309
5. ★ Diskrétní Fourierova transformace	320
6. Polynomy nad \mathbb{Z} a nad \mathbb{Q}	323
7. Polynomy více neurčitých, symetrické funkce	328
8. ★ Závěrečná cvičení, poznámky	333
VIII. GRUPY	341
1. Symetrické grupy \mathcal{S}_n	341
2. Dihedrální grupy \mathcal{D}_{2n}	349
3. Základy teorie grup	355
4. Abelovské grupy	374
5. Akce grupy na množině	380
6. Sylowovy věty	390
7. Polodirektní součin	396
IX. OKRUHY A POLE	413
1. Několik příkladů	413
2. ★ Algebry cest – aplikace	415
3. Zopakování základních faktů	421
4. Dělitelnost v oborech integrity	432
5. Rozšíření polí	439
6. Kořenová rozšíření, řešitelnost algebraických rovnic v radikálech	445
7. Konstrukce pravítkem a kružítkem (Eukleidovské konstrukce)	453
8. Základní věta algebry (Věta Argandova-d'Alembertova)	456
Výsledky některých cvičení	459
Literatura	462
Index věcný	463
Index jmenný	476