VII. Aplikace reziduové věty

1. Spočtěte integrály:
a) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+\cos x}$ $(a\in\mathbb{R},\ |a|>1)$, b) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^2}$ $(a>b>0)$, c) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin^2 x}$ $(a,b>0)$,
d) $\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{1-2a\cos x+a^2}$ $(a\in\mathbb{R},\ a\neq\pm1,\ n\in\mathbb{N})$, e) $\int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x+ia)\,\mathrm{d}x$ $(a\in\mathbb{R},\ a\neq 0)$,
f) $\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}(x+a)\,\mathrm{d}x$ $(a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$, g) $\int_0^{\pi} \frac{\cos^4 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$, h)* $\int_0^{2\pi} e^{\sin x}\,\mathrm{d}x$, i)* $\int_0^{2\pi} \cos(x-\sin x)\,\mathrm{d}x$,
j)* $\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(3x-\sin x)\,\mathrm{d}x$.

NÁVOD: Vyjádřete $\sin x$ a $\cos x$ pomocí exponenciály a podle definice křivkového integrálu převeďte na integrál přes kladně orientovanou jednotkovou kružnici. Ten spočtěte dle reziduové věty. Je-li integrační interval kratší, použijte vhodné symetrie integrované funkce. V příkladech s hvězdičkou je třeba spočíst reziduum v bodě podstatné singularity.

2. Spočtěte integrály:
a) $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$ $(n\in\mathbb{N})$, b) $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$, c) $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a,b>0)$,
d) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}x$ $(a>0)$, e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\,\mathrm{d}x$, f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$ $(n\in\mathbb{N},\ n>1)$,
g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,\mathrm{d}x$.

NÁVOD: Nejprve převeďte na integrál od $-\infty$ do ∞ pomocí symetrie. Pak integrujte přes $[-R,R]\dotplus\varphi_R$, kde $\varphi_R(t)=Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$, použijte reziduovou větu a to, že integrál přes φ_R má limitu 0 pro $R\to\infty$.

3. Spočtěte integrály:
a) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ $(a>0)$, b) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x$ $(a>0)$, c) $\int_0^{\infty} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x$ $(a,b>0)$,
d) $\int_0^{\infty} \frac{\sin\pi x}{x^3-x}$, e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\pi x}{x^2+x}$, f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-8}{4x^2-1}\cos\pi x\,\mathrm{d}x$.

NÁVOD: Nejprve převeďte na integrál od $-\infty$ do ∞ pomocí symetrie. Pro případ e): Integrujte funkci $\frac{e^{i\pi z}}{z^2+z}$ podél křivky $[-R,-1-r]\dotplus\phi_r\dotplus[-1+r,-r]\dotplus\psi_r\dotplus[r,R]\dotplus\eta_R$, kde $R>1$ a $r\in(0,\frac12)$, $\phi_r(t)=-1+re^{-it}$, $t\in[-\pi,0]$, $\psi_r(t)=re^{-it}$, $t\in[-\pi,0]$, $\eta_R(t)=Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$. Zkoumejte limitu pro $R\to\infty$ a $r\to0+$. Ukažte, že integrál přes η_R má pro $R\to\infty$ limitu 0 (Jordanovo lemma) a spočtěte limitu integrálů přes ϕ_r a ψ_r pomocí reziduí v 0 a v -1. Na závěr uvažte imaginární část. V ostatních případech postupujte analogicky.

4. Spočtěte integrály:
a) $\int_0^{\infty} \frac{x^a}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ $(a\in(-1,1))$, b) $\int_0^{\infty} \frac{x^a}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$ $(a\in(-1,3))$, c) $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^a(x+b)}$ $(a\in(0,1),\ b>0)$,
d) $\int_0^{\infty} \frac{x^a}{(x+b)(x+2b)}$, $(|a|<1,\ b>0)$.

NÁVOD pro $a\notin\mathbb{Z}$: Proveďte substituci $x=e^y$, výslednou funkci integrujte přes obvod obdélníka o vrcholech $-R$, R, $R+2\pi i$, $-R+2\pi i$ a uvažte limitu pro $R\to\infty$.

5. Spočtěte integrály:
a) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x$, b) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, c) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}$, d) $\int_0^{\infty} \frac{\ln^k x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ $(k\in\mathbb{N})$.

NÁVOD: Pro $0<r<R$ a $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ uvažme křivku $(\dot{-}\,\phi_{r,\alpha})\dotplus[re^{i\alpha},Re^{i\alpha}]\dotplus\phi_{R,\alpha}\dotplus[Re^{-i\alpha},re^{-i\alpha}]$, kde $\phi_{r,\alpha}=re^{it}$, $t\in[\alpha,2\pi-\alpha]$. Dále nechť $A(z)\in\operatorname{Arg}(z)\cap[0,2\pi)$ a $L(z)=\ln|z|+iA(z)$ pro $z\neq0$. Pro příklad d) integrujte funkci $\frac{L^k(z)}{1+z^2}$ přes uvedenou křivku. Proveďte limitní přechod pro $\alpha\to0+$ a pak pro $r\to0+$ a $R\to\infty$ a odvoďte rekurentní vztah pro uvedený integrál v závislosti na k. Pro ostatní případy integrujte analogickou funkci, v níž bude $L^2(z)$.

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** a) $\frac{2\pi\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2-1}}$, b) $\frac{2\pi a}{(\sqrt{a^2-b^2})^3}$, c) $\frac{\pi}{\sqrt{a(a+b)}}$, d) $\frac{\pi}{|a^2-1|}\cdot(\min\{|a|,\frac{1}{|a|}\})^n$, e) $\pi i\operatorname{sgn} a$, f) $-2\pi i\operatorname{sgn}\operatorname{Im} a$, g) $2\pi(\sqrt{2}-\frac{5}{4})$, h) $2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(n!)^2}$, i) $2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(2n+1)(2n+2)-1}{2^{4n+3}(2n+1)!(2n+2)!}$, j) $\frac{\pi}{3}$. **2.** a) $\frac{\pi}{2^{2n-1}}\cdot\binom{2n-2}{n-1}$, b) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, c) $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$, d) $\frac{\pi}{16a^3}$, e) $-\frac{\pi}{27}$, f) 0 pro n liché, $\frac{2\pi}{n}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$ pro n sudé, g) $\frac{5}{12}\pi$. **3.** a) $\frac{\pi e^{-a}}{2a}$, b) $\frac{\pi e^{-a}}{4a^3}(a+1)$, c) $\frac{\pi}{2}(2^{-ab}-1)$, d) $-\pi$, e) 2π, f) 4π. **4.** a) $\frac{\pi}{2}$ pro $a=0$, $\pi\frac{\sin\frac{\pi a}{2}}{\sin\pi a}$ pro $a\neq 0$, b) 2 pro $a=1$, $-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{a-1}{\cos\frac{\pi a}{2}}$ pro $a\neq 1$, c) $\frac{\pi}{b^a\sin\pi a}$, d) $(2^a-1)\frac{\pi\sin\ln 2}{4\cosh\frac{\pi}{2}}$ pro $a\neq 0$, $-\frac{\ln 2}{b}$ pro $a=0$. **5.** a) $-\frac{1}{2}$, b) 0, c) $-\frac{1}{4}\pi$, d) $I_{2k+1}=0$, $I_0=\frac{\pi}{2}$, $I_{2k}=-\frac{1}{2k+1}((-1)^{k+1}\frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}}(3^{2k+1}-1)+\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j}\binom{2k+1}{2j}(2\pi)^{2k-2j}I_{2j})$.

==

VIII. DALŠÍ APLIKACE REZIDUOVÉ VĚTY

1. Najděte součty řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+a^4}$, $a\in\mathbb{C}$; b) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(a+n)^2}$, $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$; c) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^2}$, $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$; f) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$; g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$, $a\in\mathbb{C}$, $ia\notin\mathbb{Z}$;

h) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{k-c}$, $c\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$; i) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{(-1)^k}{k-c}$, $c\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

NÁVOD: Pro případ c) uvažte funkci $f(z)=\frac{\pi\operatorname{cotg}\pi z}{(a+z)^2}$, aplikujte reziduovou větu na integrál z f podél kružnice o středu 0 a poloměru $n+\frac{1}{2}$ a uvažte limitu pro $n\to\infty$. Použijte fakt, že funkce $\pi\operatorname{cotg}\pi z$ je na těchto kružnicích stejně omezená. Pro případ b) postupujte analogicky, jen místo $\pi\operatorname{cotg}\pi z$ použijte funkci $\frac{\pi}{\sin\pi z}$. V případě h) postupujte podobně jako v případě c), s tím, že ukážete, že integrál přes uvedené kružnice z funkce $\pi\operatorname{cotg}\pi z(\frac{1}{z-c}-\frac{1}{z})$ má limitu nula, přičemž je stejný jako integrál z $\pi\operatorname{cotg}\pi z\cdot\frac{1}{z-c}$, protože integrál z $\pi\operatorname{cotg}\pi z\cdot\frac{1}{z}$ je nulový (jde o $2\pi i$-násobek absolutního členu Laurentovy řady liché funkce $\pi\operatorname{cotg}\pi z$ v nějakém mezikruží o středu 0).

2. Spočtěte integrály:

a) $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. (NÁVOD: Integrujte funkci $\frac{1-e^{2iz}}{z^2}$ podél křivky $[r,R]\dotplus\varphi_R\dotplus[-R,-r]\dotplus(\dot{-}\varphi_r)$, kde $\varphi_r(t)=re^{it}$, $t\in[0,\pi]$.)

b) $\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. (NÁVOD: Podél křivky z a) integrujte funkci $\frac{1-e^{iz}}{z^2}$.)

c) $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,\mathrm{d}x$ $(a,b>0)$. (NÁVOD: Integrujte funkci e^{-az^2} podél obvodu obdélníka s vrcholy $-R$, R, $R+i\frac{b}{2a}$, $-R+i\frac{b}{2a}$. Použijte znalost $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$.)

d) $\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$ $(p>1)$. (NÁVOD: Je-li $p\in\mathbb{N}$, integrujte funkci $\frac{1}{1+z^p}$ podél křivky $[0,R]\dotplus\varphi_R\dotplus[R\exp(\frac{2\pi i}{p}),0]$, kde φ_R je příslušný oblouk kružnice o středu 0. V obecném případě je třeba integrovat funkci $\frac{1}{1+\exp(pL(z))}$, kde $L(z)\in\operatorname{Log}(z)$ je takové, že $\operatorname{Im}L(z)\in[-\varepsilon,2\pi-\varepsilon)$, kde $\varepsilon>0$ je dost malé ($\varepsilon<2\pi(1-\frac{1}{p})$), a kolem bodu 0 je třeba přidat oblouk kružnice jako v příkladu VII/5.)

e) $\int_0^{\infty}\frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$. (NÁVOD: Integrujte funkci $\frac{z}{z^4+1}$ přes křivku jako v případě d) pro $p=4$.)

f) $\int_0^{\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}\,\mathrm{d}x$ $(a,b\in\mathbb{R})$. (NÁVOD: Integrujte funkci $\frac{e^{2iaz}-e^{2ibz}}{z^2}$ přes křivku z a).)

g) $\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x$. (NÁVOD: Integrujte funkci $\frac{3e^{iz}-e^{3iz}}{z^3}$ přes křivku z a).)

- -

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** a) $\frac{\pi^2}{6}$ pro $a=0$, $\frac{\pi}{2a\sqrt{2}}\cdot\frac{\sinh\pi a\sqrt{2}-\sin\pi a\sqrt{2}}{\cosh\pi a\sqrt{2}-\cos\pi a\sqrt{2}}$ jinak; b) $\frac{\pi^2\cos\pi a}{\sin^2\pi a}$, c) $\frac{\pi^2}{\sin^2\pi a}$, d) $\frac{\pi^2}{6}$, e) $-\frac{\pi^2}{12}$, f) $\frac{2\pi}{3}\operatorname{tgh}\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$, g) $\frac{1}{2a^2}(1+\frac{\pi a}{\sin\pi a})$, h) $-\pi\operatorname{cotg}\pi c$, i) $-\frac{\pi}{\sin\pi c}$. **2.** a) $\frac{\pi}{2}$, b) $\frac{\pi}{2}$, c) $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp(-\frac{b^2}{4a})$, d) $\frac{\pi/p}{\sin(\pi/p)}$, e) π, f) $\pi(b-a)$, g) $\frac{\pi}{8}$.