

[2b]

1. Uvažujte funkci

$$f(x) = \sin(\ln(x^2) - \ln|x|).$$

- i. Určete definiční obor f .
- ii. Rozhodněte, zda je funkce f na svém definičním oboru lichá, nebo sudá, nebo ani lichá ani sudá.
- iii. Rozhodněte, zda je funkce f na svém definičním oboru periodická. Pokud ano, najděte nejmenší periodu.
- iv. Rozhodněte, zda je funkce f na svém definičním oboru omezená, či neomezená.

Řešení.

- i) Argumenty logaritmů musí být kladné, což vede na podmítku $x \neq 0$, tj. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- ii) Protože $x \in D_f$ právě když $-x \in D_f$ a

$$f(-x) = \sin(\ln((-x)^2) - \ln|-x|) = f(x),$$

funkce f je sudá.

- iii) V první řadě je dobré si všimnout, že

$$f(x) = \sin(\ln|x|)$$

(toho si všimli asi jen 3 lidi). Funkce $y \mapsto \sin y$ je 2π -periodická, takže $\sin(g(x))$ může být periodická jen když g "roste pořád stejně rychle", tj. $g(x) = ax + b$. To logaritmus není. Představte si graf sinu - pokud do argumentu dáte jinou funkci než lineární, začne se graf někde "zahušťovat", nebo "prodlužovat". To mi jako zdůvodnění bohatě stačilo. Pokud byste trvali na formálním důkazu, nechť např. $x > 0$ a pro spor nechť existuje $T > 0$ tak, že $f(x+T) = f(x)$ pro všechna $x > 0$. To vede na

$$\sin \frac{\ln(x+T) - \ln x}{2} \cos \frac{\ln(x+T) + \ln x}{2} = 0,$$

takže

$$\ln(1 + \frac{T}{x}) = 2k\pi$$

nebo

$$\ln(2x+T) = (2k+1)\pi.$$

Alespoň jedna z těchto rovností tedy musí platit pro všechna $x > 0$, což není možné, protože logaritmus je prostá funkce.

- iv) Obor hodnot sinu je $[-1, 1]$.

[1b]

2. Nalezněte všechna $z \in \mathbb{C}$ která řeší rovnici

$$z^6 + 8i = 0.$$

Řešení.

Čísla z a $-8i$ přepíšeme v gon. tvaru, takže dostaneme

$$|z|^6 (\cos \alpha + i \sin \alpha)^6 = 8(\cos(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) + i \sin(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi))$$

a po odmocnění tedy

$$z_k = \sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3})), \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

[3b] 3. Metodou matematické indukce dokažte následující trvzení:

$$\text{Pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ platí: } \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n}.$$

Řešení.

$LHS(1) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$, $RHS(1) = 2$ Nerovnost $\frac{3+\sqrt{2}}{2} > 2$ je ekvivalentní s $\sqrt{2} > 1$, což je pravda.

Nechť tvrzení platí pro n , kde $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} LHS(n+1) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \\ &\stackrel{I.P.}{>} 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \\ &> 2\sqrt{n} + \frac{2}{\sqrt{2n+2}} \\ &= 2\sqrt{n} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

Zbývá tedy ověřit zda platí

$$2\sqrt{n} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}} > RHS(n+1) = 2\sqrt{n+1}.$$

Vynásobením $\sqrt{n+1}/2$ zjistíme, že to je ekvivalentní s

$$\sqrt{n(n+1)} > n+1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a umocněním

$$n^2 + n > n^2 + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)n + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

a elementárními úpravami

$$n > \frac{\sqrt{2}-1}{2},$$

což platí, protože $\frac{\sqrt{2}-1}{2} < \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \leq n$.

[1b] 4. Určete jaké množině se rovná následující průnik:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\left\{ -\frac{1}{n} \right\} \cup \left(0, 1 + \frac{1}{n} \right) \right).$$

Váš odhad ověřte důkazem.

Řešení.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$, izolovaný bod $-\frac{1}{n}$ patří jen do jedné z množin $\{-\frac{1}{k}\} \cup (0, 1 + \frac{1}{k})$, $k \in \mathbb{N}$, a tedy

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\left\{ -\frac{1}{n} \right\} \cup \left(0, 1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 + \frac{1}{n} \right) =: P.$$

Zřejmě platí $(0, 1] \subset (0, 1 + \frac{1}{n})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $(0, 1] \subset P$. Zkusme dokázat i obrácenou inkluzi. Nechť $x \in P$. Pokud by $x \leq 0$, pak x nepatří do žádné z množin $(0, 1 + \frac{1}{n})$. Pokud by $x > 1$, potom $x \notin (0, 1 + \frac{1}{n})$, pokud $n > \frac{1}{x-1}$, což je opět spor.

[1b]

5. Nechť

$$M = \{x \in \mathbb{R}; |x+2| < |x| \leq 2\}.$$

Určete $\sup M$, $\inf M$, $\max M$ a $\min M$ (nemusíte ověřovat).

Řešení.

Z grafu lze snadno uhodnout, že $M = [-2, -1)$, a tedy $\sup M = -1$, maximum neexistuje, $\inf M = \min M = -2$.

[2b]

6. Bud'

$$S = \left\{ \frac{n(-1)^n}{n+1}; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dokažte, že $\sup S = 1$.

Řešení.

Číslo 1 je horní mez S , protože

$$\frac{n(-1)^n}{n+1} \leq \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

Bude to také nejmenší horní mez, pokud ke každému $\varepsilon > 0$, najdu $n \in \mathbb{N}$ tak, že platí

$$\frac{n(-1)^n}{n+1} > 1 - \varepsilon.$$

Pokud n volím sudé, pak stačí

$$\frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon,$$

což je ekvivalentní

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Takové n zřejmě existuje.