Metrické prostory, Banachova věta o kontrakci

Na cvičení jsem připomněl nejzákladnější metrické prostory. Předně, každý normovaný prostor je metrický, protože $\varrho(x, y) = \|x - y\|$ definuje metriku, tj. zobrazení $\varrho : X \times X \to [0, +\infty)$ splňující

$$\begin{aligned}
&\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\
&\varrho(x, y) = \varrho(y, x) \\
&\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)
\end{aligned}$$

pro všechny $x, y, z \in X$. Zajímá nás, jak je to s jejich úplností, tj. jestli každá Cauchyovská posloupnost je konvergentní v daném prostoru. Připomínám, že Cauchyovskost se týká jen členů posloupnosti, kdežto konvergence navíc požaduje existenci nějaké limity.

i) Eukleidovské prostory $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, s metrikou

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2}.$$

Úplnost $\mathbb{R}^d$ jste nejspíš měli loni.

ii) Metrický prostor racionálních čísel $\mathbb{Q}$ s metrikou výše není úplný, viz příklad 3 níže. (Zúplnění $\mathbb{Q}$ je $\mathbb{R}$).

iii) Prostory diferencovatelných reálných funkcí $C^n([a, b])$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Pro $f \in C^n([a, b])$ definujme

$$\|f\|_i := \sup_{x \in [a,b]} |f^{(i)}(x)|, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Funkcionály $\|\cdot\|_i$, $i \geq 1$, jsou jen seminormy, tj. může se stát, že $\|f\|_i = 0$, i když $f \neq 0$ (viz např. $\|5\|_1 = 0$). Funkcionál

$$\sum_{i=0}^{n} \|f\|_i \tag{1}$$

pak definuje normu na $C^n([a, b])$, vzhledem ke které je úplný. Pro prostor spojitých funkcí $C^0([a, b])$ to plyne z tvrzení, že stejnoměrná konvergence zachovává spojitost. Ostatní případy se převedou na tento.

iv) Pokud v (1) nějaký člen vynechám, můžu vykonvergovat z prostoru, tj. ztrácím úplnost. To jsem se snažil ilustrovat tím obrázkem s tím špičatým kopcem - pomocí vhodné posloupnosti v C^1, která konverguje (jen) v normě $\|\cdot\|_0$ se dostanu (jen) do C.

v) Prostor hladkých funkcí $C^\infty([a, b])$. Z předchozího protipříkladu je vidět, že tento prostor s metrikou danou (1) nemůže být úplný pro žádné n. Nicméně, metrika, vzhledem, ke které je úplný, existuje a můžete si zkusit ověřit, že se dá definovat takto:

$$d(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|f - g\|_k}{1 + \|f - g\|_k}.$$

Za zmínku taky stojí, že z uvedených příkladů to je jediný prostor, kde neexistuje norma, vzhledem ke které by byl úplný. Proto jsem Banachovu větu připomněl pro úplné metrické prostory a ne jen Banachovy prostory (i když důkaz je stejný).

Věta 1 (Banach). *Nechť (X, ϱ) je neprázdný a úplný metrický prostor. Buď $T : X \to X$ kontrakce, tj. existuje $K \in (0, 1)$ tak, že*

$$\varrho(Tx, Ty) \leq K \varrho(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Pak existuje právě jeden bod $x \in X$ (pevný bod) tak, že $Tx = x$.

Poznámka 2. Někdo se ptal, v čem je rozdíl když "$\leq K$" nahradím "$<$." Je to v podstatě ten samý rozdíl jako když pro nějakou reálnou posloupnost máte odhad $x_n < 1$ vs. $x_n \leq K$, $K < 1$. Co je přísnější podmínka? No to druhý, protože to říká, že pod jedničkou je ještě nějaký pás, do kterého se žádný člen posloupnosti nedostane. Takže ty podmínky jsou stejné jen když nemůžu použít posloupnosti, tj. když X bude mít konečný počet prvků.

No a to, že ta věta s "$<$" neplatí je vidět např. když si vezmete $Tx = x + \frac{1}{x}$ na $[1, \infty)$. Pak

$$|Tx - Ty| = \left|1 - \frac{1}{xy}\right| |x - y| < |x - y|$$

(a nejde to odhadnout líp), ale $x = x + \frac{1}{x}$ nemá v $[1, \infty)$ řešení. Pokud byste uvažovali jen kompakty (v $\mathbb{R}^d$ to jsou omezené uzavřené množiny), věta platí i s "$<$". To je ale důsledek úplně jiné věty o pevném bodu, a to Schauderovy. Ta vůbec nepotřebuje kontrakci, stačí spojitost a to, že zobrazuje zvolený kompakt do sebe. Existuje mnoho jiných a ještě obecnějších vět o pevném bodě.

Příklad 3. Najít limitu $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$.

Kandidáti na limitu musí řešit $L = \frac{L}{2} + \frac{1}{L}$, takže $L = \pm\sqrt{2}$. Pokud vezmeme $x \in [1, 2]$, pak také $Tx := \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \in [1, 2]$. Navíc

$$|Tx - Ty| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right| |x - y| \leq \frac{1}{2}|x - y| \quad \forall x, y \in [1, 2].$$

Použitím Banachovy věty získáváme existenci limity. Případ $L = -\sqrt{2}$ by byl analogický.

Příklad 4. Existence řešení $x = \cos x$.

Zde bych jen připomněl ten odhad. Z grafu je jasné, že hledaný kořen x^* leží v $(0, \frac{\pi}{2})$. Proto existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $x^* < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Pak

$$|\cos x - \cos y| = \left|\int_y^x \sin z \,\mathrm{d}z\right| \leq \sin(\tfrac{\pi}{2} - \varepsilon) \left|\int_y^x\right| = (\cos\varepsilon)\, |x - y| \quad \forall x, y \in [0, \tfrac{\pi}{2} - \varepsilon].$$

Nebo můžete zvolit $X = [0, 1]$:-)

Řady

Neříkám, že ty kritéria budete někdy potřebovat, ale když se to náhodou stane, je dobrý aspoň vědět, že existujou. Připomínám, že jsou to kritéria pro řady se členy, které můžou měnit znaménko a taky, že úplná analogie těch kritérií platí pro stejnoměrnou konvergenci.

Věta 5 (Abel-Dirichlet)**.** *Nechť platí jedna z podmínek:*

(A) Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentní a $\{b_k\}$ je omezená, monotonní.

(D) Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ má omezenou posloupnost částečných součtů a $\{b_k\}$ je klesající s limitou 0.

Pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje.

Všimněte si, že Leibnizovo kritérium je speciální případ Dirichletova.

Důkaz stojí na lemmatu, co jsem dal za DÚ, tj. vyjádřit

$$\sum_{k=M}^{N} a_k b_k \quad \text{pomocí} \quad \sum_{k=M}^{N} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)(b_k - b_{k+1}).$$

Další DU bylo najít podmínky pro x, aby posloupnosti

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right\}_n \quad \text{a} \quad \left\{\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right\}_n$$

byly omezené.

Příklady, k tomu jsou

i) $\sum_{n=1} \frac{\sin n}{n^\alpha}$

ii) $\sum_{n=1} \arctan(n) \frac{n^2+1}{n^\alpha} \cos nx$

V prvním se použije (D), ve druhým 2x (A) a pak (D).

To ostatní

Co jsem nestihl připomenout a nechávám na vás jsou mocninné a Taylorovy řady a aplikace např. k nalezení řešení ODR (něco jako Besselova rovnice třeba). A pak funkce více proměnných. K variačnímu počtu, co budete dělat, je dobrý si připomenout záležitosti kolem derivace ve směru.