# Limity některých integrálů

**Limita $\int_{\varphi_R} f(z)\,\mathrm{d}z$, $R \to +\infty$.**

V první řadě, to, co jsme potřebovali na minulém cvičení, nebylo přímo Jordanovo lemma, ale jen jednoduchý odhad. Jakýkoliv křivkový integrál lze totiž odhadnout jako

$$\left|\int_\phi f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq L(\phi)M_\phi(f),$$

kde $L(\phi)$ značí délku křivky $\phi$ a

$$M_\phi(f) := \max_{t\in[a,b]} |f(\phi(t))|$$

(za předpokladu, že $f$ je spojitá). Takže, pokud $\phi$ bude nějaká část kružnice s poloměrem $R$, tj. $\phi = \varphi_R$, potom $L(\phi) = cR$, kde $c > 0$ je nějaká konstanta. Aby tedy integrál

$$\int_{\varphi_R} f(z)\,\mathrm{d}z$$

konvergoval k nule pro $R \to +\infty$, stačí aby

$$R \max_{t\in[a,b]} |f(\varphi_R(t))| \to 0, \quad R \to +\infty,$$

neboli

$$R|f(\varphi_R(t))| \rightrightarrows 0, \quad R \to +\infty,$$

stejnoměrně vzhledem k $t \in [a,b]$. To je ta podmínka, kterou jsem ověřoval.

**Limita $\int_{\varphi_R} f(z)e^{i\alpha z}\,\mathrm{d}z$, $R \to +\infty$**

Podle Jordanova lemmatu je tato limita nulová, pokud současně platí

i) $\varphi_R$ leží v horní polorovině,

ii) $\alpha > 0$,

iii) $M_{\varphi_R}(f) \to 0, \quad \mathbb{R} \to +\infty$.

Křivka $\varphi_R$ může být celá horní půlkružnice (i s krajními body), nebo nějaká její část. Důkaz je snadný, najdete ho v Kopáčkovi - Lemma 17.4. nebo na anglické wiki. V podstatě jsem ho dokazoval i na minulém cvičení, když jsem počítal $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

**Limita $\int_{\varphi_R} f(z)e^{-i\alpha z}\,\mathrm{d}z$, $R \to +\infty$**

To je jen jednoduchá modifikace předchozího. Opět je potřeba $\alpha > 0$ a konvergence maxim; jediná odlišnost je samozřejmě v tom, že nyní $\varphi_R$ musí být v dolní polorovině.

Můžete si ty verze pamatovat tak, že v integrandu se pro žádný bod na $\varphi_R$ nesmí objevit $e^x$, $x > 0$ (protože to by mohlo zkazit konvergenci). Např., pokud by $\varphi_R$ zasahovalo do horní poloroviny, pak by existoval nějaký bod $z \in \varphi_R$, pro který $\operatorname{Im} z = \varepsilon > 0$, a tedy

$$e^{-i\alpha z} = e^{-i\alpha \operatorname{Re} z} \cdot e^{\alpha\varepsilon}.$$

Toto je ale jen memotechnická pomůcka - existují další verze Jordanova lemmatu, kde se "kladná část"exponenciely může objevit. Nicméně pak je potřeba přidat poměrně silný předpoklad, aby se to uhlídalo, viz další verze.

**Limita** $\int_{\varphi_R} f(z)e^{\alpha z}\,\mathrm{d}z$**,** $R \to +\infty$

Buď $\xi > 0$. Pro každé $R > 0$ pak uvažujme část kružnice $\varphi_R(t)$, $t \in [\gamma_R, 2\pi - \gamma_R]$, kde $\gamma_R$ je úhel, pro který

$$\mathrm{Re}(Re^{i\gamma_R}) = \xi,$$

neboli

$$\cos\gamma_R = \frac{\xi}{R}.$$

Vidíme tedy, že sice $\varphi_R$ zasahuje i do pravé poloroviny, ale pro $R \to +\infty$ je $\gamma_R \to \frac{\pi}{2}$, tj. křivka se stále více blíží levé půlkružnici.

Tvrzení je, že pokud $\alpha > 0$ a

$$\lim_{z\to\infty, \mathrm{Re}\, z \le \xi} f(z) = 0,$$

pak zkoumaný integrál konverguje k nule.

Důkaz je opět poměrně přímočarý odhad, s využitím předchozího a sudosti kosinu. Za jeho předvedení na cvičení nabízím 2 body; jinak ho na vyžádání dodám.

**Limita** $\int_{\varphi_r} f(z)\,\mathrm{d}z$**,** $r \to 0+$

Na příštím cvičení budu také potřebovat znát tuto limitu, kde $f$ je holomorfní v prstencovém okolí bodu $x \in \mathbb{C}$ a $\varphi_r(t) = x + re^{it}$, $t \in [a, b]$, $a < b \in \mathbb{R}$. Pak platí

i) Pokud $f$ je holomorfní i v $x$, pak

$$\lim_{r\to 0+} \int_{\varphi_r} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

ii) Pokud $f$ má pól násobnosti 1 v $x$, pak

$$\lim_{r\to 0+} \int_{\varphi_r} f(z)\,\mathrm{d}z = i(b-a)\,\mathrm{res}_x\, f.$$

První část plyne z toho, že $f$ má na okolí $x$ primitivní funkci a druhá pak plyne z předchozí pomocí rozvoje v Laurentovu řadu. Pokud jste to náhodou neměli na přednášce, detaily dodám. Speciální případ tohoto tvrzení je cvičení 6 z příkladů na Cauchyho větu.