Příklady na 7. týden

Funkce komplexní proměnné

Křivkový integrál

Spočtěte následující křivkové integrály:

1. $\int_\varphi z \,\mathrm{d}z$, φ je polokružnice $|z| = 1$, z bodu $(1,0)$ do $(-1,0)$ přes horní polorovinu.

2. $\int_\varphi (z-a)^n \,\mathrm{d}z$, φ je kladně orientovaná kružnice $|z-a| = R$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$.

3. $\int_\varphi |z| \,\mathrm{d}z$, φ je průvodič bodu $2 - \mathrm{i}$.

4. $\int_\varphi \frac{z}{\overline{z}} \,\mathrm{d}z$, φ je kladně orientovaný obvod horního mezikruží se středem v počátku a poloměry 1 a 2.

5. Jakých hodnot může nabývat $\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z^2+9}$, je-li φ uzavřená křivka, která neprochází body $\pm 3\mathrm{i}$.

6. Vypočtěte $\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z(z^2-1)}$, je-li φ kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ a středu
   a) 1 b) 0 c) -1

7. Vypočtěte $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\varphi \frac{\mathrm{e}^z \,\mathrm{d}z}{z(z-1)^3}$, je-li φ kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{3}{2}$ a středu
   a) -1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$

8. Vypočtěte $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\varphi \frac{\mathrm{e}^z \,\mathrm{d}z}{z^2+a^2}$, je-li $\varphi : 2a\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$.