

Příklady na 6. týden

Funkce komplexní proměnné

Elementární funkce

- Najděte reálnou a imaginární část hodnoty následujících funkcí:
a) $\cos(2 + i)$ b) $\sin 2i$ c) $\operatorname{tg}(2 - i)$.
- Dokažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.
- Dokažte, že pro $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí:
a) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$
b) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_2 \sin z_1$
c) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
d) $\sin(iz) = i \sinh z$
e) $\cos(iz) = \cosh z$.
- Nalezněte řešení rovnic:
a) $\sin z + \cos z = 2$ b) $\sinh z - \cosh z = 2i$
- Najděte součet $\cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \dots + \cos(\alpha + n\beta)$.
- Při zobrazení $w = z^2$, $w = u + iv$, $z = x + iy$ najděte
a) obrazy přímek $x = C$, $C \in \mathbb{R}$
b) obrazy kružnic $|z| = R > 0$
c) vzory přímek $u = C$.
- Najděte obraz kartézské souřadnicové sítě ($x = C$, $y = C$) při zobrazení $w = e^z$.
- Najděte obraz $\operatorname{Im} z = 1$ při zobrazení $w = \frac{z-1}{z+1}$.
- Najděte obraz $|z+1| = 1$ při zobrazení $w = \frac{1}{z}$.
- Najděte obraz $|z| = 2$ při zobrazení $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.
- Zjistěte, zda funkce $f(z) = |z|$ je v nějaké oblasti holomorfní.

12. Nalezněte nutné a postačující podmínky na reálné konstanty a , b a c , aby následující funkce byly holomorfní
- $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$
 - $f(z) = \cos x(\cosh y + a \sinh y) + i \sin x(\cosh y + b \sinh y)$.
13. Ukažte, že reálná funkce $f(x + iy) = f(z) = \sqrt{|xy|}$ splňuje v počátku Cauchy–Riemannovy podmínky, ale nemá tam derivaci podle z .
14. Dokažte, že platí
- $(\sinh z)' = \cosh z$
 - $(\cosh z)' = \sinh z$
 - $(\sin z)' = \cos z$
 - $(\cos z)' = -\sin z$.
15. Nalezněte holomorfní funkci (na příslušné oblasti) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, je-li
- $u(x, y) = x^2 - y^2 + e^x(x \cos y - y \sin y)$
 - $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}$
 - $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.