

Henri Lebesgue a jeho integrál

Fubiniho věta, věta o substituci

1. Převedte $\int_{\Omega} f(x+y) dx dy$ na jednoduchý integrál, jestliže f je spojitá a $\Omega = \{(x, y); |x| + |y| \leq 1\}$.
2. Převedte $\int_{\Omega} f(x \cdot y) dx dy$ na jednoduchý integrál, jestliže f je spojitá a Ω je ohraničeno křivkami $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$ a $x, y > 0$.
3. Přepište $\int_0^1 (\int_y^1 f(x) dx) dy$ pomocí jednoho integrálu.
4. Určete plošný obsah části roviny omezené následujícími křivkami:
 - a) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$
 - b) $(x^3 + y^3)^2 = xy$
 - c) $x + y = a$, $x + y = b$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$, $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$
5. Určete objem tělesa omezeného následujícími plochami:
 - a) $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $a \geq R\sqrt{2} > 0$
 - b) $z = xy$, $z = 0$, $x + y + z = 1$
 - c) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$
 - d) $z = e^{-(x^2+y^2)}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$
 - e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $a, b, c > 0$
 - f) $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $a, b, c > 0$
 - g) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$
6. Spočítejte následující integrály:
 - a) $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$
 - b) $\int_{\Omega} x^{-p}y^{-q} dx dy$, $\Omega = \{(x, y); xy \geq 1, x \geq 1\}$
 - c) $\int_{\Omega} (x+y)^{-p} dx dy$, $\Omega = \{(x, y); x+y \geq 1, 0 \leq x \leq 1\}$
7. Najděte souřadnice hmotného středu homogenní desky ohraničené $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x, y, a > 0$.
8. Najděte momenty setrvačnosti I_x a I_y homogenní desky s hustotou $\rho = 1$ ohraničené $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, $x = 0$, $y = 0$, $0 \leq x \leq a$.

9. Najděte souřadnice hmotného středu homogenního tělesa ohraničeného $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$, $a, b, c > 0$.
10. Kruhový válec s osou ve směru osy z kartézských souřadnic je naplněn plynem, jehož hustota se řídí barometrickou formulí

$$\varrho = \varrho_0 \exp\left(-\frac{\varrho_0}{p_0} g z\right),$$

kde p_0 je tlak na spodní základně $z = 0$, g je tíhové zrychlení. Výška válce je h , poloměr R . Určete hmotnost vzduchu ve válci.