Dodatek ke cvičení 23.10.

Příklad 5

Vezmu

$$y_n(x) = (\arctan n)^{-1} \arctan(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak

$$y_n'(x) = \frac{n}{\arctan n} \frac{1}{1+n^2x^2}.$$

Někdo hlásil, že bychom měli použít per partes a měl pravdu:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x^2 y'(x)^2 \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{(\arctan n)^2} \int_{-1}^{1} x \frac{n^2 x}{(1+n^2x^2)^2} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(\arctan n)^2} \left(\left[x \frac{-1}{2(1+n^2x^2)} \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{-1}{2(1+n^2x^2)} \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{2(\arctan n)^2} \left(\frac{-1}{1+n^2} - \frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{n}(\arctan n - \arctan(-n)) \right) \\
&= \frac{1}{(\arctan n)^2} \left(\frac{\arctan n}{n} - \frac{1}{1+n^2} \right) \to 0
\end{aligned}$$

pro $n \to \infty$. Vidíme tedy, že infimum daného funkcionálu je 0, ale funkce, pro které je nulový, jsou buď nespojité, nebo nesplňují okrajové podmínky.

Dopočtení řetězovky

Obecná formulace: Hledáme funkci y jako extremálu funkcionálu

$$\frac{1}{\varrho g} E = \int_0^d (y - \lambda) \sqrt{1 + y'^2} \,\mathrm{d}x$$

při okrajových podmínkách $y(0) = h_1$, $y(d) = h_2$ a vazbě

$$l = \int_0^d \sqrt{1 + y'^2} \,\mathrm{d}x.$$

Vyřešením speciálního tvaru Euler-Lagrangeových rovnic (nezávislost na x) se dostaneme k řešení

$$y(x) = \lambda + c_1 \cosh \frac{x + c_2}{c_1}, \quad x \in [0, d],$$

kde $c_1 > 0$ ze zřejmých důvodů.

Dosadíme y do okrajových podmínek, odečteme rovnice od sebe, použijeme součtové vzorce a dostaneme tak

$$h_2 - h_1 = 2c_1 \sinh \frac{\frac{d}{2} + c_2}{c_1} \sinh \frac{\frac{d}{2}}{c_1}.$$

Dále, použitím vazby, spočtením integrálu a použitím součtových vzorců obdržíme

$$l = 2c_1 \cosh \frac{\frac{d}{2} + c_2}{c_1} \sinh \frac{\frac{d}{2}}{c_1}.$$

Poslední dvě rovnice nejprve vydělíme a pak umocníme a odečteme. Tak dostaneme

$$\frac{h_2 - h_1}{l} = \tanh \frac{\frac{d}{2} + c_2}{c_1} \tag{1}$$

a

$$l^2 - (h_2 - h_1)^2 = 4c_1^2 \sinh^2 \frac{\frac{d}{2}}{c_1} \tag{2}$$

Rovnice (2) obsahuje jedinou neznámou, zbývá navrhnout vhodný numerický výpočet. Označím-li $z := \frac{d}{2c_1}$ a

$$M := \frac{\sqrt{l^2 - (h_2 - h_1)^2}}{d} \geq 1,$$

pak (2) lze přepsat jako

$$\frac{\sinh z}{z} = M.$$

Vypadá to, že pro $z_0 >> 0$ by měla fungovat např. Newtonova metoda

$$z_{k+1} = z_k - \frac{\sinh z_k - M z_k}{\cosh z_k - \frac{\sinh z_k}{z_k}}.$$

Tím dostanu nějaký kořen z^*. Pak $c_1 = \frac{d}{2z^*}$. Konstantu c_2 spočtu z (1):

$$c_2 = c_1 \operatorname{arctanh} \frac{h_2 - h_1}{l} - \frac{d}{2} = \frac{c_1}{2} \ln \frac{l + h_2 - h_1}{l - h_2 + h_1} - \frac{d}{2}.$$

A konečně, např. z první okrajové podmínky dostávám

$$\lambda = h_1 - c_1 \cosh \frac{c_2}{c_1}.$$

Test: $h_1 = 1$, $h_2 = 7$, $d = 4$, $l = 10$.
Pak $M = \frac{\sqrt{100-36}}{4} = 2$ a

$$c_1 \approx 0.91856.$$

Dále

$$c_2 = c_1 \ln 2 - 2 \approx -1.3633$$

a

$$\lambda = 1 - c_1 \cosh \frac{c_2}{c_1} \approx -1.13014.$$

Odkaz na graf.

Poznámka k příkladu 16

Někdo tvrdil, že lze nalézt nějaké další extremály. To je nejspíš tím, že řešil rovnici $y'' + \lambda y = 0$ v komplexním oboru, ale nemůžu to zaručit, protože jsem to nepočítal.

Domácí úkoly

DU 1) Vyšetřit $\to$ a $\rightrightarrows$ pro posloupnost funkcí

$$x^n - x^{n+1}, \quad x \in [0, 1].$$

DU 2) Vyšetřit $\to$ a $\rightrightarrows$ pro posloupnost funkcí

$$(\ln x) \sin \frac{x}{n(1 + x^2)}, \quad x \in (0, \infty).$$