2. Test 06/07 zimní semestr

Příklad 1. *Spočtěte determinant následující reálné matice.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešení.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -2 & -5 \\ -11 & 4 & 1 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & -5 \\ -11 & 1 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -5 & -2 & -7 \\ -10 & 1 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ -10 & -12 \end{vmatrix} = -3 \cdot (60 - 70) = 30$$

Nejprve jsme upravili 4. sloupec, potom rozvinuli podle 4. sloupce, upravili 1. řádek, rozvinuli podle něj, pak opět první řádek a rozvoj.

Poznámky.

- Úpravy typu přičtení prvního řádku k trojnásobku druhého mění determinant (je to vlastně vynásobení druhého řádku třemi a přičtení prvního). Je lepší dělat elementární úpravy.
- Někteří dělali rozvoj podle řádku, kde bylo více nenulových prvků, přesto měl rozvoj pouze jeden (náhodně vybraný?) člen.
- Někteří "zapomněli" při rozvojích na znaménko.
- Je většinou nevýhodné využívat pouze Gaussovu eliminaci nebo rozvoj. Výhodné je obojí kombinovat.

Příklad 2. *Matice automorfismu* $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ *vzhledem k bázím* $B = \{(2,1),(3,0)\}$ *a* $C = \{(4,4),(3,2)\}$ *je* $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) *Určete matici f^{-1} vzhledem ke kanonickým bazím.*

(b) *Určete $f^{-1}(x, y)$, kde $(x, y) \in \mathbb{Z}_5^2$ je libovolný vektor.*

Řešení. Ze zadání máme:

$$\underset{C}{\mathbb{Z}_5^2} \overset{f}{\underset{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}{\longleftarrow}} \underset{B}{\mathbb{Z}_5^2}, \quad \underset{k.b.}{\mathbb{Z}_5^2} \overset{\text{id}}{\underset{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\longleftarrow}} \underset{B}{\mathbb{Z}_5^2}, \quad \underset{k.b.}{\mathbb{Z}_5^2} \overset{\text{id}}{\underset{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}{\longleftarrow}} \underset{C}{\mathbb{Z}_5^2}.$$

Z obrázku

$$\underset{k.b.}{\mathbb{Z}_5^2} \overset{\text{id}}{\underset{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\longleftarrow}} \underset{B}{\mathbb{Z}_5^2} \overset{f^{-1}}{\underset{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1}}{\longleftarrow}} \underset{C}{\mathbb{Z}_5^2} \overset{\text{id}}{\underset{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}}{\longleftarrow}} \underset{k.b.}{\mathbb{Z}_5^2}$$

vidíme, že hledaná matice je

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot 1^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot 1^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

K určení invezních matic byl použit vztah $A^{-1} = A^{ad} \cdot |A|^{-1}$.

Obrázkem:

$$\underset{k.b.}{\mathbb{Z}_5^2} \overset{f^{-1}}{\underset{\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}{\longleftarrow}} \underset{k.b.}{\mathbb{Z}_5^2}.$$

Platí

$$(f^{-1}(x, y))^T = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 4y \\ 2x \end{pmatrix}$$

Tedy $f^{-1}(x, y) = (4x + 4y, 2x)$.

Poznámky.

- Na obrázcích jsou všechny komponenty (tj. prostory, báze, homomorfismus, matice) důležité. Bez některé z nich obrázek nedává žádný smysl.
- V případě matic 2×2 je nejlepší metodou na určení inverzní matice postup uvedený v řešení.
- Platí $(A|B) \sim \ldots \sim (E|A^{-1}B)$ nikoliv $(E|AB^{-1})$.

Příklad 3. *Matice endomorfismu* $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ *vzhledem k bazím* $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ *a* $C = \{(3,2,1),(2,1,0),(4,0,0))\}$ *je*

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte $\mathrm{Ker}(f)$ *a* $\mathrm{Im}(f)$ *a jejich dimenze.*

Řešení. $\mathrm{Ker}(f)$ vyjádřený v bázi B je množina všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí X. Gaussovou eliminací dostáváme

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Takže $\{\mathrm{Ker}(f)\}_B = \langle (1,0,1) \rangle$. Máme tedy

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \langle 1\cdot(1,1,1) + 0\cdot(1,1,0) + 1\cdot(1,0,0) \rangle = \\ &= \langle (2,1,1) \rangle \\ \dim(\mathrm{Ker}(f)) &= 1 \end{aligned}$$

$\mathrm{Im}(f)$ vyjádřený v bázi C je lineární obal sloupců. Eliminací zjistíme bázi tohoto lineárního obalu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Takže $\{\mathrm{Im}(f)\}_C = \langle (2,1,4),(0,2,4) \rangle$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \langle 2\cdot(3,2,1) + 1\cdot(2,1,0) + 4\cdot(4,0,0), \\ &\quad\; 0\cdot(3,2,1) + 2\cdot(2,1,0) + 4\cdot(4,0,0) \rangle = \\ &= \langle (4,0,2),(0,2,0) \rangle = \langle (2,0,1),(0,1,0) \rangle \\ \dim(\mathrm{Im}(f)) &= 2 \end{aligned}$$

Poznámky.

- Leckdo napsal dim(Im(f)) = 2 a přitom napsal, že Im je lineární obal jednoho vektoru. To je nesmysl (co je to dimenze prostoru?).
- Im v patřičné bázi je lineární obal sloupců. Žádná soustava se neřeší.
- Kdo dosud neumí řešit soustavy rovnic, ať se to rychle naučí.