Řešení testů, lineární algebra 09/10 zima

Test 1. ze dne 7.10.2009. Určete všechna řešení následující soustavy rovnic nad tělesem racionálních čísel

(a)

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -2 & 4 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & -2 & 3 & 8 & 9 & 11 \\ -1 & 1 & -3 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

(b)

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -2 & 2 & -6 & -2 & 8 & -6 \\ 2 & -2 & 3 & 8 & 9 & 11 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Řešení.
(a) Gaussovou eliminací převedeme matici do odstupňovaného tvaru:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -2 & 4 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & -2 & 3 & 8 & 9 & 11 \\ -1 & 1 & -3 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 8 & 9 & 11 \\ -1 & 1 & -3 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

V první úpravě jsme první řádek vynásobili číslem $\frac{1}{2}$. V druhé úpravě jsme (-2)-násobek 1. řádku přičetli k 2. a 1. řádek přičetli ke třetímu. Ve třetí úpravě jsme (-1)-násobek 2. řádku přičetli k 3.. K odstupňovanému tvaru můžeme samořejmě dospět mnoha jinými způsoby.

Označme proměnné pořadě $x_1, x_2, \dots, x_5$. Pivotní sloupce jsou první, třetí a pátý, takže parametry jsou x_2 a x_4.

Spočítáme libovolné řešení soustavy (tzv. partikulární řešení): Pro pohodlí zvolíme $x_2 = x_4 = 0$. Z poslední rovnice spočteme $x_5 = -2$. z druhé rovnice $-x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 3$, po dosazení $x_3 = -13$. Z první rovnice vyjde $x_1 = 34$. Získali jsme řešení $(34, 0, -13, 0, -2)$.

Nyní zvolíme za parametry $x_2 = 1$ a $x_4 = 0$ a dopočteme řešení **příslušné homogenní rovnice**. Vyjde $(1, 1, 0, 0, 0)$. Volbou parametrů $x_2 = 0$ a $x_4 = 1$ dostaneme řešení $(-7, 0, 2, 1, 0)$.

Množina všech řešení dané soustavy je

$$\{(34, 0, -13, 0, -2) + s(1, 1, 0, 0, 0) + t(-7, 0, 2, 1, 0) : s, t \in \mathbb{Q}\}$$

(b) Vyjde stejně.

Test 2. ze dne 21.10.2009. Určete všechna řešení následující soustavy rovnic nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

(a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

(b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Řešení.

(a) vyjde stejně jako (b)

(b) Gaussovou eliminací převedeme soustavu do odstupňovaného tvaru:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. úprava: trojnásobek prvního řádku přičítáme k druhému a dvojnásobek prvního řádku přičítáme k poslednímu; 2. úprava: dvojnásobek druhého řádku přičítáme k třetímu.

Parametry jsou druhá a čtvrtá proměnná. Partikulární řešení je např. $(1, 0, 4, 0)$. Báze řešení homogenní soustavy je $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 4, 1)$. Množina všech řešení je

$$\{(1, 0, 4, 0)+s(1, 1, 0, 0)+t(1, 0, 4, 1) : s, t \in \mathbb{Z}_5\} = (1, 0, 4, 0)+\langle(1, 1, 0, 0), (1, 0, 4, 1)\rangle.$$

(Soustava má tedy 25 řešení.)

Test 3. ze dne 4.11.2009. Zjistěte, zda jsou následující vektory z prostoru $\mathbb{Z}_3^4$ lineárně závislé. Pokud ano, vyjádřete některý z těchto vektorů jako lineární kombinaci ostatních.

(a) $(2, 1, 0, 2), (1, 1, 2, 2), (1, 0, 1, 2), (2, 2, 1, 2)$

(b) $(1, 2, 0, 1), (2, 2, 1, 1), (2, 0, 2, 1), (1, 1, 2, 1)$

Řešení.
(a) zjistíme, zda existují čísla $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3$, alespoň jedno nenulové, pro která

$$a(2,1,0,2) + b(1,1,2,2) + c(1,0,1,2) + d(2,2,1,2) = (0,0,0,0).$$

Rozepsáním do složek dostaneme homogenní soustavu rovnic, kterou řádkovými úpravami převedeme do odstupňovaného tvaru.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soustava má netriviální řešení např. $(2,2,1,1)$, tedy vektory jsou lineárně závislé. Navíc jsme zjistili, že

$$2 \cdot (2,1,0,2) + 2 \cdot (1,1,2,2) + 1 \cdot (1,0,1,2) + 1 \cdot (2,2,1,2) = (0,0,0,0).$$

Z tohoto vztahu můžeme vyjádřit dokonce kterýkoliv zadaný vektor jako lineární kombinaci ostatních. Vyjádříme například vektor $(2,1,0,2)$:

$$(2,1,0,2) = 2 \cdot (1,1,2,2) + 1 \cdot (1,0,1,2) + 1 \cdot (2,2,1,2).$$

Test 4. ze dne 11.11.2009. Najděte nějakou bázi podprostoru U vektorového prostoru $\mathbb{Z}_2^5$ a doplňte nalezenou bázi U na bázi $\mathbb{Z}_2^5$.

(a) $U = \langle (1,1,0,1,1), (1,0,1,0,1), (1,0,1,1,0), (1,0,1,1,1), (1,1,0,0,0) \rangle$

(b) $U = \langle (1,0,1,1,1), (1,1,0,0,1), (1,1,0,1,0), (1,1,0,1,1), (1,0,1,0,0) \rangle$

Řešení. (b) Napíšeme vektory do řádků matice a řádkovými úpravami převedeme matici do odstupňovaného tvaru. Řádkové úpravy nemění lineární obal řádků.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nenulové řádky matice v odstupňovaném tvaru jsou lineárně nezávislé. Lineární obal nenulových řádků je stejný jako lineární obal řádků původní matice (protože řádkové úpravy nemění lineární obal řádků, jak již bylo řečeno). Báze U je tedy například posloupnost

$$(1,0,1,1,1),(0,1,1,1,0),(0,0,0,1,1),(0,0,0,0,1).$$

Nalezenou bázi U lze doplnit na bázi $\mathbb{Z}_2^5$ například vektorem $(0,0,1,0,0)$. Vzniklá pětice vektorů je skutečně bází, protože je lineárně nezávislá (a každá lineárně nezávislá pětice vektorů v prostoru dimenze 5 je bází). To lze vidět například tak, že posloupnost $(1,0,1,1,1),(0,1,1,1,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,1),(0,0,0,0,1)$ tvoří řádky matice v odstupňovaném tvaru.

Test 5. ze dne 18.11.2009. V závislosti na parametrech $a,b \in \mathbb{Z}_3$ určete dimenzi prostoru $U \leq \mathbb{Z}_3^3$.

(a) $U = \langle (a,1,2),(1,b,2),(1,2,1) \rangle$

(b) $U = \langle (a,2,1),(2,b,1),(2,1,2) \rangle$

Řešení.

(a) Dimenze U je rovna hodnosti matice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & b & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elementární řádkové ani sloupcové úpravy nemění hodnost matice.

$$h(A) = h\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & b & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= h\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & b+2 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}.$$

(V první úpravě jsme proházeli sloupce, v druhé řádky, v třetí jsme vyeliminovali první sloupec.)

Pokud $b \neq 1$ a $a \neq 2$, je poslední matice v odstupňovaném tvaru a její hodnost je rovna počtu nenulových řádků, tedy $h(A) = \dim U = 3$. Pokud $a = 2$ je matice rovněž v odstupňovaném tvaru nezávisle na b (i když pro $b = 1$ vypadají stupně jinak než v případě $b \neq 1$), takže $h(A) = \dim U = 2$. Pokud $b = 1$ je

$$h\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & b+2 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde v poslední úpravě jsme $-\frac{a+1}{2}$-násobek druhého řádku přičetli ke třetímu (poznámka: $-\frac{a+1}{2} = a+1$). Opět $h(A) = \dim U = 2$.

Shrnutí: Pokud $a = 2$ nebo $b = 1$ je $\dim U = 2$, jinak je $\dim U = 3$.

(b) Vyjde, že v případě $a = 1$ nebo $b = 2$ je $\dim U = 2$, jinak je $\dim U = 3$.

Test 6. ze dne 25.11.2009. Spočítejte A^{-1}, kde A je následující matice nad $\mathbb{Z}_5$:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Vyjde

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Budeme postupovat podle algoritmu vysvětleného na cvičení: $(A|E) \sim \ldots \sim (E|A^{-1})$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Úpravy: 1. prohození prvních dvou řádků, 2. dvojnásobek prvního ke třetímu, 3. trojnásobek druhého k prvnímu a čtyřnásobek druhého ke třetímu, 4. dvojnásobek třetího k prvnímu a dvojnásobek třetího k druhému, 5. vynásobení prvních dvou řádků dvěma.

Takže

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Test 7. ze dne 2.12.2009. Uvažujme permutaci π nad S_9 zadanou tabulkou

(a)

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 8 & 3 & 6 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 6 & 3 & 9 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Zapište π jako složení nezávislých cyklů.

(ii) Určete znaménko π a zdůvodněte.

(iii) Spočtěte π^{-1}.

(iv) Spočtěte $(1\ 3\ 5)^{-1} \circ \pi \circ (1\ 3\ 5)$.

Řešení.

(a i) $\pi = (1927)(384)(56)$

(a ii) $zn(\pi) = 1$, protože v zápisu pomocí nezávislých cyklů je sudý počet cyklů sudé délky

(a iii) $\pi^{-1} = (1729)(348)(56)$

(a iv) $(184)(2759)(36)$

(b i) $\pi = (1728)(364)(59)$

(b ii) $zn(\pi) = 1$, protože v zápisu pomocí nezávislých cyklů je sudý počet cyklů sudé délky

(b iii) $\pi^{-1} = (1827)(346)(59)$

(b iv) $(146)(2758)(39)$

Test 8. ze dne 9.12.2009. Spočítejte determinant následující reálné matice

(a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení.

(a)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -7 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 7 & -19 & 0 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -19 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (3 \cdot (-19) - (-4) \cdot 7) = -58$$

Úpravy: (-2)-násobek druhého sloupce přičítáme ke třetímu, rozvoj podle prvního řádku, 3-násobek třetího řádku přičítáme ke druhému, rozvoj podle třetího sloupce, definice determinantu 2×2.

(b) vyjde také -58

Test 9. ze dne 16.12.2009. Spočítejte A^{ad}, $|A|$, A^{-1} pro následující matici A nad tělesem $\mathbb{Z}_7$.

(a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Vyjde

$$A^{ad} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad |A| = 6, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$A^{ad} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 6 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinant zjistíme jako prvek na místě $1, 1$ v matici $A \cdot A^{ad}$.

$$|A| = 6 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 6 = 6.$$

$$A^{-1} = \frac{A^{ad}}{|A|} = \frac{A^{ad}}{6} = 6^{-1} \cdot A^{ad} = 6 \cdot A^{ad} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Test 10. ze dne 6.1.2010.

(a) Homomorfismus $f : \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^2$ je dán vztahem

$$f((x, y, z)) = (6x + 3y + 4z, 2x + 5z), \quad x, y, z \in \mathbb{Z}_7.$$

Určete matici f vzhledem k bazím B a C, kde

$$B = (1, 2, 3), (2, 4, 2), (1, 4, 6), \quad C = (4, 4), (3, 1).$$

(b) Homomorfismus $f : \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^2$ je dán vztahem

$$f((x, y, z)) = (5x + 4y + 3z, 6x + 4z), \quad x, y, z \in \mathbb{Z}_7.$$

Určete matici f vzhledem k bazím B a C, kde

$$B = (2, 4, 6), (4, 1, 4), (2, 1, 5), \quad C = (5, 2), (3, 3).$$

Řešení.

(a) Sloupce matice $\{f\}_{B,C}$ tvoří podle definice vyjádření vektorů pořadě $f(1, 2, 3)$, $f(2, 4, 2)$ a $f(1, 4, 6)$ v bázi C. Je $f(1, 2, 3) = (3, 3)$, $f(2, 4, 2) = (4, 0)$, $f(1, 4, 6) = (0, 4)$. Vyjádření vektoru $(3, 3)$ v bázi C spočítáme řešením soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Vyjde $\{(3, 3)\}_C = (6, 0)$. Podobně spočítáme $\{(4, 0)\}_C = (3, 2)$ a $\{(0, 4)\}_C = (5, 5)$. (Všimněte si, že řešíme 3 soustavy se stejnou levou stranou, tyto soustavy lze řešit zároveň například tak, že si napíšeme tři sloupce pravých stran.) Matice f vzhledem k B a C je tedy

$$\{f\}_{B,C} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Vyjde

$$\{f\}_{B,C} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$