Pozorně si přečtěte zadání, zejména nad kterým tělesem se počítá. Test odevzdávejte i se zadáním. Můžete používat jakékoliv zdroje, kromě pomoci ostatních studentů.

Maximum je 29 bodů. K výsledku se přičte polovina z bodů za domácí úlohy 1-5, tj. max. 10 bodů. Celkově je třeba alespoň 23 bodů.

Příklad 1. (4 body) Určete levý a pravý vrchol, hodnost a nulitu bilineární formy $f : \mathbb{Z}_5^3 \times \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5$, jejíž matice vzhledem ke kanonické bázi je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. (4 body) Matice bilineární formy $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vzhledem k bázi B je A. Určete matici f vzhledem k bázi C, je-li

$$B = \{(0,2),(1,1)\}, \quad C = \{(1,1),(0,1)\}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Příklad 3. (4 body) Určete signaturu bilineární formy $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, jejíž matice vzhledem k jisté bázi je

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 4. (9 bodů) Uvažujme bilineární formu $f : \mathbb{Z}_5^4 \times \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5$, jejíž matice vzhledem ke kanonické bázi je

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) (2 body) Najděte vrchol f.

(b) (1 bod) Najděte bázi B nějakého doplňku nalezeného vrcholu a určete matici $g = f|\langle B \rangle$ vzhledem k B.

(c) (4 body) Najděte polární bázi g (**nepoužívejte metodu symetrických úprav**).

(d) (2 body) Najděte polární bázi P bilineární formy f. Určete matici f vzhledem k P, hodnost a nulitu f.

Příklad 5. (8 bodů) Uvažujme vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ v unitárním prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem.

$$\mathbf{v}_1 = (2,1,-2), \mathbf{v}_2 = (0,1,-1), \mathbf{v}_3 = (0,-2,0).$$

(a) (4 body) Najděte ortogonální bázi $\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \mathbf{o}_3$ prostoru $\mathbb{R}^3$ takovou, že $\langle \mathbf{o}_1, \ldots, \mathbf{o}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i \rangle$ pro $i = 1, 2, 3$.

(b) (2 bod) Najděte ortonormální bázi $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ takovou, že $\mathbf{n}_i \in \langle \mathbf{o}_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$.

(b) (1 bod) Určete ortogonální projekci vektoru $\mathbf{v}_3$ na prostor $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.

(c) (1 bod) Určete ortogonální doplněk prostoru $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ v prostoru $\mathbb{R}^3$.