CSP seminář 14/15 letní semestr – sada 4

Relační strukturu **A** nazýváme binární, pokud obsahuje pouze unární nebo binární relace.

Problém 1. Ukažte, že pro každou relační strukturu $\mathbb{A}$ s konečně mnoha relacemi existuje binární relační struktura $\mathbb{B}$ taková, že CSP($\mathbb{A}$) $\sim_P$ CSP($\mathbb{B}$). Strategie:

- Definujte $B = A^k$, kde k je maximální arita relace v $\mathbb{A}$. Relace v $\mathbb{B}$ budou unární relace, které budou odpovídat relacím v $\mathbb{A}$ a ještě binární relace $\rho_{i,j}$ (kde $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, bude jich tedy k^2) definované $((a_1, \ldots, a_k), (b_1, \ldots, b_k)) \in \rho_{i,j} \Leftrightarrow a_i = b_j$
- Ukažte, že díky $\rho_{i,i}$ je každý n-ární polymorfismus $\mathbb{B}$ tvaru $(h_1, \ldots, h_k)$ pro nějaké $h_i : A^n \to A$, kde $(h_1, \ldots, h_k)$ značí n-ární operaci na A^k, která v i-té složce funguje jako h_i.
- Ukažte, že díky $\rho_{i,j}$ a unárním relacím je každý polymorfismus dokonce tvaru $(h, h, \ldots, h)$, kde $h \in \mathrm{Pol}(\mathbb{A})$.
- Nahlédněte, že $\mathrm{Pol}(\mathbb{B}) = \{(h, h, \ldots, h) : h \in \mathrm{Pol}(\mathbb{A})\} = \mathrm{Pol}(\mathbb{A})^k$

Je-li $R(x_1, \ldots, x_k)$ constraint, pak množinu proměnných $\{x_1, \ldots, x_k\}$ nazýváme *scope* tohoto constraintu.

Instance CSP se nazývá (k, l)-minimální (kde $1 \leq k \leq l$), pokud

- (Technická podmínka: Scope žádného constraintu neobsahuje jednu proměnnou vícekrát.)
- Každá l-tice proměnných je ve scopu nějakého constraintu.
- Pokud W je nanejvýš k-prvková posloupnost proměnných a C_1, C_2 jsou constrainty, jejichž scope obsahuje W, pak projekce C_1 a C_2 na W se shodují.

Instance je k-minimální, pokud je (k, k)-minimální.

Instance se nazývá *triviální*, pokud obsahuje „prázdný" constraint, tedy constraint tvaru $R(...)$, kde $R = \emptyset$. Dvě instance jsou *ekvivalentní*, pokud mají stejnou množinu řešení.

Problém 2. Ukažte, že pro pevná k, l existuje polynomiální algoritmus, který každou instanci CSP($\mathbb{A}$) převede na ekvivalentní (k, l)-minimální instanci CSP($\mathbb{B}$), kde $\mathbb{B}$ je pp-definovatelná z $\mathbb{A}$.

Instanci vzniklou vaším algoritmem nazveme (k, l)-minimální instance *příslušná* původní instanci.

Řekneme, že CSP($\mathbb{A}$) má (relační) šířku (k, l), pokud pro libovolnou instanci I problému CSP($\mathbb{A}$) platí: pokud je (k, l)-minimální instance příslušná I netriviální, pak má I řešení. Řekneme, že CSP($\mathbb{A}$) má konečnou šířku, pokud existuje (k, l), že CSP($\mathbb{A}$) má šířku (k, l). (Speciálně, CSP($\mathbb{A}$) je v P.)

Problém 3. (Zobecnění HORN-SATu) Operaci $f : A^n \to A$ nazýváme TSI (totally symmetric idempotent), pokud je idempotentní a platí $\{a_1, \ldots, a_n\} = \{b_1, \ldots, b_k\} \Rightarrow f(a_1, \ldots, a_n) = f(b_1, \ldots, b_n)$. Idempotentní množinová funkce na A je zobrazení $t : P(A) \to A$ (kde $P(A)$ značí množinu neprázdných podmnožin množiny A), která splňuje $t(\{a\}) = a$ pro každé $a \in A$.

Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní pro každou relační strukturu $\mathbb{A}$, která obsahuje všechny singletony.

(i) $\mathrm{Pol}(\mathbb{A})$ obsahuje pro každé n TSI arity n.

(ii) Existuje idempotentní množinová funkce t na A splňující následující podmínku. Pro každou relaci R v $\mathbb{A}$ (řekněme arity k) a libovolné $A_1, \ldots, A_k \subseteq A$, pokud $S = R \cap (A_1 \times \cdots \times A_k)$ je subdirektní v $A_1 \times \cdots \times A_k$ (tj. projekce S na i-tou souřadnici je rovná A_i), pak $(t(A_1), \ldots, t(A_k)) \in R$.

(iii) CSP($\mathbb{A}$) má šířku 1.

Nápověda: Napřed ukažte (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Pro důkaz (ii) $\Rightarrow$ (iii) použijte množinovou funkci na příslušnou 1-minimální instanci. Pro důkaz (iii) $\Rightarrow$ (ii) formulujte podmínku jako instanci CSP, o které dokažte, že příslušná 1-minimální instance je netriviální (to je myslím nejtěžší část).

Problém 4. (Zobecnění 2-SATu) Operaci $f : A^n \to A$ nazýváme NU (near unanimity), pokud $f(a, \dots, a, b, a \dots, b) = a$ pro libovolná $a, b \in A$ a libovolnou pozici b.

Je-li I instance CSP s množinou proměnných V, pak zobrazení $z : W \to A$, kde $W \subseteq V$, nazveme částečným řešením, pokud splňuje všechny constrainty, jejichž scope je obsažen v W. Říkáme, že CSP($\mathbb{A}$) má striktní šířku (k, l), pokud pro libovolnou instanci CSP($\mathbb{A}$), příslušná (k, l)-minimální instance splňuje následující: každé částečné řešení $z : W \to A$, kde $|W| \geq k$, lze rozšířit na řešení.

Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní pro každé $k \geq 2$ a každou relační strukturu $\mathbb{A}$, která obsahuje všechny singletony.

(i) Pol($\mathbb{A}$) obsahuje NU arity k.

(ii) CSP($\mathbb{A}$) má striktní šířku $(k, k + 1)$

Problém 5. (3-LIN($\mathbb{Z}_2$) nemá konečnou šířku). Označme $\mathbb{A} = (\{0, 1\}, R_0, R_1, \{0\}, \{1\})$, kde $R_i = \{(x, y, z) : x + y + z \mod 2 = i\}$. Ukažte, že CSP($\mathbb{A}$) nemá konečnou šířku.