

1. Najděte nejmenší přirozené číslo  $x$ , které (současně) splňuje

$$x \equiv 0 \pmod{2}$$

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

$$x \equiv 3 \pmod{7}$$

**Řešení.** 164 (použijte se libovolný algoritmus na ČVZ)

2. Spočítejte poslední cifru čísla  $2^{3^{2^{3^{2^3}}}}$  v desítkovém zápisu.

**Řešení.**  $3^{2^{\dots}} \equiv (-1)^{2^{\dots}} = 1 \pmod{4}$  a  $\phi(5) = 4$ , tedy  $2^{3^{2^{\dots}}} \equiv 2^{3^{2^{\dots}} \pmod{4}} = 2 \pmod{5}$ . Protože navíc  $2^{3^{\dots}} \equiv 0 \pmod{2}$ , je  $2^{3^{\dots}} \equiv 2 \pmod{10}$ , takže poslední cifra je 2

3. Spočítejte počet prvků řádu 4 v grupě  $\mathbb{Z}_{12}$ .

**Řešení.** Jsou 2 - prvky 3 a 9.

4. Spočítejte počet prvků řádu 3 v grupě  $\mathbb{Z}_7^*$ .

**Řešení.** Jsou 2 - prvky 2, 4.

5. Rozhodněte, zda svaz  $N_5$  (diamant) je

- (a) distributivní
- (b) modulární

**Řešení.** (a) NE (b) NE

6. Rozhodněte, zda svaz  $M_3$  (pentagon) je

- (a) distributivní
- (b) modulární

**Řešení.** (a) NE (b) ANO

7. Spočítejte počet podsvazů (tj. podalgeber) svazu  $M_3$  (prázdná množina je podalgebrou).

**Řešení.** Označme nejmenší prvek 0, největší 1 a zbylé  $a, b, c$ . Podsvazů je  $2^0 - \emptyset$ , všech pět jednoprvkových podmnožin, srovnatelné dvojice prvků (hrany, dvojice  $\{0, 1\}$ ), lineárně uspořádané trojice ( $\{0, a, 1\}$ ,  $\{0, b, 1\}$ ,  $\{0, c, 1\}$ ), čtveřice obsahující 0 a 1 a celé  $M_3$ .

8. Spočítejte počet kongruencí svazu  $N_5$  (včetně triviálních).

**Řešení.** Označme prvky svazu  $0, 1, a, b, c$ , kde  $0 < a < 1$  a  $0 < b < c < 1$ . Pokud jsou dva prvky  $x, y$  v libovolném svazu ekvivalentní v nějaké kongruenci  $\sim$ , pak všechny prvky mezi  $x \wedge y$  a  $x \vee y$  leží v jedné  $\sim$ -třídě (viz domácí úkol). Dále, pokud  $0 \sim a$ , pak  $b \sim c \sim 1$ . Pokud  $c \sim 1$ , pak  $0 \sim a$ . Z těchto a symetrických pozorování dostáváme jediné kandidáty na kongruence – triviální,  $|0a|bc1|$ ,  $|a1|0bc|$  a  $|bc|0|1|a|$ . Všechny tyto ekvivalence jsou kongruencemi, takže  $N_5$  má 5 kongruencí.