10. Afinní a euklidovský prostor

Definice 10.1. ***Afinním prostorem*** *$A = A(V)$ nad vektorovým prostorem V rozumíme trojici $(A, V, +)$, kde A je množina, jejíž prvky nazýváme* **body**, *V je vektorový prostor, $+$ je operace, která bodu a vektoru přiřadí bod: $+ : A \times V \to A$, splňující následující axiomy:*

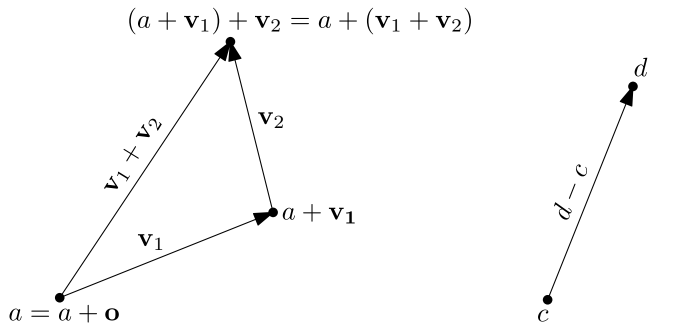
(i) $a + \mathbf{o} = a$ *(pro libovolný bod $a \in A$)*

(ii) $a + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (a + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ *(pro libovolný bod $a \in A$ a vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$)*

(iii) Ke každé dvojici bodů $a, b \in A$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{v} \in V$, pro který $a + \mathbf{v} = b$. Tento vektor značíme $b - a$.

Euklidovským prostorem *$E(V)$ rozumíme afinní prostor spolu se skalárním součinem $\cdot$ na V (neboli euklidovský prostor je afinní prostor nad unitárním prostorem).*

Dimenzí *afinního nebo euklidovského prostoru rozumíme dimenzi příslušného vektorového prostoru.*



Obrázek 1: Afinní prostor.

Axiom (ii) říká, že ve výrazech typu $a + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots$ nemusíme psát závorky. Z axiomů (i) a (iii) vidíme, že $a - a = \mathbf{o}$. Z axiomu (iii) vyplývá, že $a + (b - a) = b$ pro libovolné dva body a, b.

Základním příkladem afinního prostoru je prostor $A(T^n)$. Body i vektory jsou uspořádané n-tice prvků T. Operace sčítání bodu a vektoru je definována jako obvyklé sčítání n-tic. Vezmeme-li navíc na vektorovém prostoru T^n „běžný“ skalární součin, máme základní příklad euklidovského prostoru – prostor $E(T^n)$.

Z kapitoly o homomorfismech vektorových prostorů víme, že každý vektorový prostor dimenze n je izomorfní aritmetickému prostoru T^n. Trochu vágně řečeno, jediný vektorový prostor dimenze n je, až na izomorfismus (tj. přeznační prvků), T^n. Prostory z předchozího odstavce mají podobnou roli v afinních (euklidovských) prostorech: Uvidíme, že jediný afinní (resp. euklidovský) prostor dimenze n je, až na afinní (resp. izometrický) izomorfismus, prostor $A(T^n)$ (resp. $E(T^n)$).

V libovolném afinním prostoru platí následující vztahy, která jsou v afinním prostoru $A(T^n)$ zřejmé.

Pozorování 10.2. *Nechť $A(V)$ je afinní prostor, $a, b, c, d \in A$ body, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vektory. Pak*

(i) $(a + \mathbf{u}) - (b + \mathbf{v}) = (a - b) + \mathbf{u} - \mathbf{v}$,

(ii) $(a - b) + (c - d) = (a - d) + (c - b)$,

(iii) $(a - b) + (b - c) = a - c$.

Důkaz. Pozorování lze snadno dokázat přímo z definice (viz cvičení), nebo lze výpočet převést na výpočet v $A(T^n)$ (kde jsou tvrzení zřejmá) využitím nějaké soustavy souřadnic (viz níže). $\square$

Podprostory

Definice 10.3. *Nechť $A(V)$ je afinní (resp. euklidovský) prostor. Říkáme, že $B(W)$ je* ***podprostorem*** *$A(V)$, pokud $B \subseteq A$, $W \subseteq V$, W je (vektorovým) podprostorem V, B je uzavřená na sčítání bodu a vektoru z W a rozdíl libovolných dvou bodů z B je vektor ve W. Jinými slovy, $B(W)$ je podprostor $A(V)$, pokud tvoří se zúženými operacemi prostoru $A(V)$ afinní (euklidovský) prostor. Je-li $b \in B$ libovolný bod, pak*

$$B = b + W = \{b + \mathbf{w} |\ \mathbf{w} \in W\}.$$

Naopak, pro libovolný bod $b \in A$ a podprostor $W \subseteq V$ je $B(W)$, kde $B = b+W$, podprostorem $A(V)$.

Důkaz. Dokážeme nejprve druhé tvrzení. Musíme ukázat, že

1. součet bodu $b + \mathbf{w}_1 \in b + W$ a vektoru $\mathbf{w}_2$ je bod v $b + W$. To platí, protože $(b + \mathbf{w}_1) + \mathbf{w}_2 = b + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)$ (axiom (i)).
2. rozdíl dvou bodů $b+\mathbf{w}_1, b+\mathbf{w}_2 \in b+W$ je vektor ve W. To platí, protože $(b+\mathbf{w}_1) - (b+\mathbf{w}_2) = (b - b) + (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) = \mathbf{o} + (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 \in V$ (podle Pozorování, bod (ii), poznámce za definicí afinního prostoru a axiomu (i)).

První tvrzení: Součet bodu z B a vektoru z W je bod z B, tedy $b+W \subseteq B$. Je-li $a \in B$ libovolný bod, pak $a - b \in W$ podle definice. Pak ale $a = b + (a - b) \in b + W$ (podle poznámky za definicí afinního prostoru). Čili $B \subseteq b + W$. $\square$

Chápeme-li T^n jako vektorový prostor, pak podprostory jsou „rovné útvary" (přímky, roviny, ...) procházející počátkem. Podprostory afinního prostoru $A(T^n)$ jsou „rovné útvary", které počátkem procházet nemusí.

Afinní prostor dimenze 0 je bod. Afinnímu prostoru dimenze 1 říkáme **přímka**, afinnímu prostoru dimenze 2 říkáme **rovina**. Podprostoru dimenze $n-1$ v afinním prostoru dimenze n říkáme **nadrovina**.

Při zadání afinního podprostoru většinou uvádíme pouze množinu B a říkáme, že B je podprostor $A(V)$.

Příklad. Množina $B = (1, 2, 3) + \langle(4, 5, 6)\rangle = \{(1, 2, 3) + t\cdot(4, 5, 6)|\ t \in R\} = \{(1+4t, 2+5t, 3+6t)|\ t \in R\}$ je podprostor afinního prostoru R^3. Je to přímka, protože $\dim(W) = \dim\langle(4, 5, 6)\rangle = 1$.

Množina $B = (1, 2, 3) + \langle(4, 5, 6), (7, 8, 9)\rangle$ je rovina a zároveň nadrovina v R^3, protože $\dim(W) = \dim\langle(4, 5, 6), (7, 8, 9)\rangle = 2$.

Soustavy souřadnic, jejich transformace

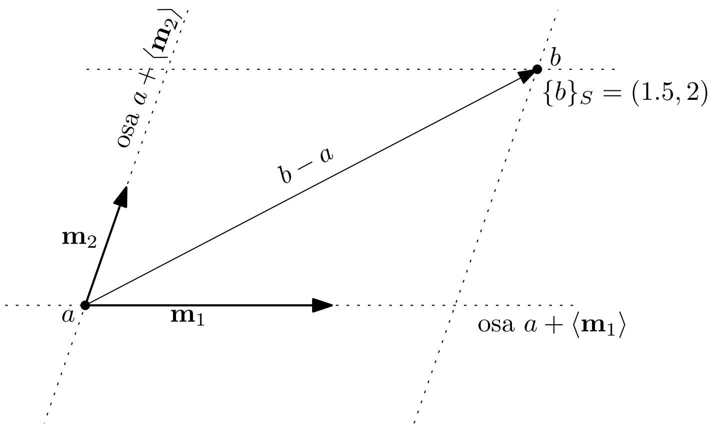
Soustavou souřadnic v afinním prostoru $A(V)$ rozumíme množinu $S = \{a, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_n\}$, kde $a \in A$ a $M = \{\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_n\}$ je báze V.
Kartézkou soustavou souřadnic v euklidovském prostoru $E(V)$ rozumíme soustavu souřadnic $S = \{a, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_n\}$, kde $M = \{\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_n\}$ je ortonormální báze V.
Bod a se nazývá **počátek soustavy souřadnic**. Přímky $a + \langle \mathbf{u}_i \rangle$ se nazývají **souřadnicové osy**.
Souřadnice bodu $b \in A$ (resp. E) v soustavě souřadnic S definujeme jako vyjádření vektoru $b - a$ v bázi M, tedy vztahem

$$\{b\}_S = \{b - a\}_M.$$

Souřadnice vektoru $\mathbf{v} \in V$ v soustavě souřadnic S definujeme jako vyjádření vektoru $\mathbf{v}$ v bázi M, tedy vztahem

$$\{\mathbf{v}\}_S = \{\mathbf{v}\}_M.$$

Zvolit soustavu souřadnic tedy znamená určit počátek – bod a, a vektory $\mathbf{m}_i$, které tvoří bázi. Kartézká soustava soustava souřadnic je taková, že vektory $\mathbf{m}_i$ mají velikost 1 a jsou navzájem kolmé.



Obrázek 2: Soustava souřadnic $S = \{a, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\}$ v $A(R^2)$. Bod b a jeho souřadnice.

U vektorových prostorů víme, že $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\}_M = \{\mathbf{v}_1\}_M + \{\mathbf{v}_2\}_M$ a $\{t \cdot \mathbf{v_1}\}_M = t \cdot \{\mathbf{v}_1\}_M$ pro libovolnou bázi M, vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ a $t \in T$. Operace ve V tedy „můžeme provádět v $A(T^n)$“ přejdeme-li od vektorů k jejich vyjádření v bázi M. Podobná situace je u afinních prostorů – všechny operace v afinním prostoru „můžeme provádět v $A(T^n)$“ přejdeme-li od vektorů a bodů k jejich vyjádření vzhledem k soustavě souřadnic S:

Tvrzení 10.4. *Mějme afinní prostor $A(V)$ a jeho soustavu souřadnic S. Pro libovolné vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, body $b, c \in A$ a prvek $t \in T$ platí:*

$$\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\}_S = \{\mathbf{v}_1\}_S + \{\mathbf{v}_2\}_S, \quad \{t \cdot \mathbf{v}_1\}_S = t \cdot \{\mathbf{v}_1\}_S, \quad \{b + \mathbf{v}_1\}_S = \{b\}_S + \{\mathbf{v}_1\}_S, \quad \{b - c\}_S = \{b\}_S - \{c\}_S.$$

Je-li $E(V)$ euklidovský prostor a S kartézká soustava souřadnic, pak pro libovolné vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ platí

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \{\mathbf{v}_1\}_S \cdot \{\mathbf{v}_2\}_S.$$

Důkaz. Snadné. $\square$

Z prvního semestru víme, jak se mění souřadnice vektorů při přechodu od báze k bázi. Nyní spočítáme, jak se mění souřadnice bodů při přechodu od soustavy souřadnic k jiné soustavě.

Tvrzení 10.5. *Mějme dvě soustavy souřadnic $S = \{a, \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_n\}$ a $S' = \{a', \mathbf{m'}_1, \dots, \mathbf{m'}_n\}$ v afinním prostoru $A(V)$ dimenze n. Označme P matici přechodu od báze $M = \{\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_n\}$ k bázi $M' = \{\mathbf{m'}_1, \dots, \mathbf{m'}_n\}$ (tedy $P = \{id\}^M_{M'}$). Pak pro libovolný bod $b \in A$ a vektor $\mathbf{v} \in V$ platí*

$$\{b\}_S = \{a'\}_S + \{b\}_{S'} P^T,$$
$$\{\mathbf{v}\}_S = \{\mathbf{v}'\}_{S'} P^T.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}\{b\}_S = \{b - a\}_M = \{(b - a') + (a' - a)\}_M = \{a' - a\}_M + \{b - a'\}_M = \\ = \{a'\}_S + \{b - a'\}_{M'} P^T = \{a'\}_S + \{b\}_{S'} P^T.\end{aligned}$$

$\square$

Příklad. V afinním prostoru R^2 máme dány soustavy souřadnic

$$S = \{a, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\} = \{(1, 1), (1, 2), (-2, 3)\}, \quad S' = \{a', \mathbf{m'}_1, \mathbf{m'}_2\} = \{(-4, 5), (5, 3), (-7, 14)\}.$$

Napište vzorečky na výpočet vyjádření bodu $b \in R^2$ (resp. vektoru $\mathbf{v}$) v soustavě souřadnic S máme-li dané vyjádření v soustavě souřadnic S'

Řešení. Najdeme nejprve matici přechodu P od $M = \{(1, 2), (-2, 3)\}$ k $M' = \{(5, 3), (-7, 14)\}$ metodou z kapitoly o homomorfismech:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 3 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & 5 & -7 \\ 0 & 7 & -7 & 28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

Tedy

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Spočítáme ještě $\{a'\}_S = \{a' - a\}_M = \{(-5, 4)\}_M$:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 7 & 14 \end{array}\right),$$

tedy $\{a'\}_S = (-1, 2)$.

Mějme bod $b \in R^2$, jehož vyjádření v S' je $\{b\}_{S'} = (x', y')$. Pak vyjádření b v S spočteme podle přechozího tvrzení

$$\{b\}_S = (x, y) = (-1, 2) + (x', y')P^T = (-1, 2) + (x', y') \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

takže

$$x = -1 + 3x' + y', \quad y = 2 - x' + 4y'.$$

Máme-li vektor $\mathbf{v} \in R^2$ jehož vyjádření v S' je $\{\mathbf{v}\}_{S'} = (x', y')$, pak $\{\mathbf{v}\}_S = (x, y)$ spočteme

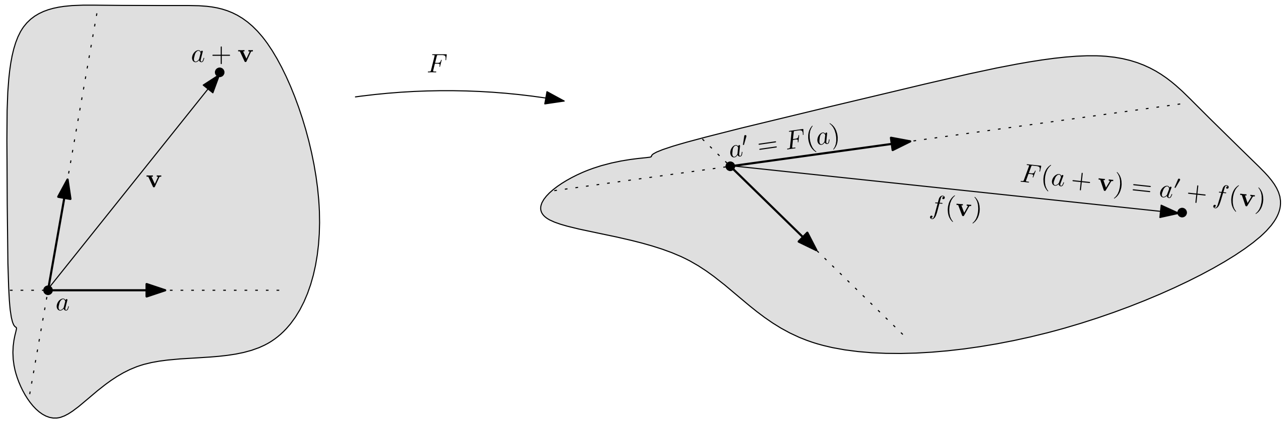
$$x = 3x' + y', \quad y = -x' + 4y'.$$

Afinní zobrazení, izometrie

Definice 10.6. *Nechť $A(V), A'(V')$ jsou afinní prostory, $a \in A, a' \in A'$ body, $f : V \to V'$ homomorfismus. Zobrazení $F : A \to A'$ definované předpisem*

$$F(a + \mathbf{v}) = a' + f(\mathbf{v})$$

nazýváme ***afinní zobrazení vytvořené homomorfismem*** *f. Je-li f monomorfismus, nazývá se F* ***regulární afinní zobrazení.*** *Je-li f izomorfismus, nazývá se F* ***afinní izomorfismus.***
Nechť $E(V), E'(V')$ jsou euklidovské prostory. Afinní zobrazení $F : E \to E'$ vytvořené homomorfismem $f : V \to V'$ se nazývá ***izometrie****, pokud f je unitární zobrazení (zachovává skalární součin). Pokud f je navíc izomorfismus, nazývá se F* ***izometrický izomorfismus.***



Obrázek 3: Afinní zobrazení z R^2 do R^2.

Afinní zobrazení je tedy určeno obrazem jednoho bodu (v definici bylo určeno $F(a) = a'$) a obrazy vektorů. Na volbě bodu a nezáleží: Je-li $F(a + \mathbf{v}) = a' + f(\mathbf{v})$, pak také $F(b + \mathbf{v}) = F(b) + f(\mathbf{v})$ pro libovolný bod $b \in A$, jak lze snadno ověřit.

Mějme afinní prostory $A(U), B(V), C(W)$. Jsou-li $F : A \to B$, $G : B \to C$ afinní zobrazení vytvořená homomorfismy $f : U \to V$, $g : V \to W$, pak složené zobrazení $GF : A \to C$ je afinní zobrazení vytvořené homomorfismem $f : U \to W$. Je-li F afinní izomorfismus, pak existuje inverzní zobrazení $F^{-1} : B \to A$ a toto F je afinní zobrazení vytvořené homomrfismem $f^{-1} : V \to U$. Ověření těchto faktů a formulaci podobných tvrzení pro euklidovské prostory přenecháme čtenáři. Všimněme si rovněž, že každá izometrie je regulární afinní zobrazení (protože unitární zobrazení je prosté).

Nyní dokážeme poznámku z první části: Jediný afinní (resp. euklidovský) prostor dimenze n je, až na afinní (resp. izometrický) izomorfismus, prostor $A(T^n)$ (resp. $E(T^n)$).

Věta 10.7. *Každý afinní prostor $A(V)$ dimenze n je afinně izomorfní aritmetickému afinnímu prostoru $A(T^n)$. Každý euklidovský prostor $E(V)$ dimenze n je izometricky izomorfní aritmetickému euklidovskému prostoru $E(T^n)$.*

Důkaz. Zvolíme libovolnou soustavu souřadnic S v prostoru $A(V)$. Zobrazení $F(b) = \{b\}_S$ je afinní izomorfismus prostorů $A(V)$ a $A(T^n)$, protože pro libovolné b je $F(b + \mathbf{v}) = \{b + \mathbf{v}\}_S = \{b\}_S + \{\mathbf{v}\}_S$, tedy F je afinní zobrazení vytvořené izomorfismem $f : V \to A(T^n)$, $f(\mathbf{v}) = \{v\}_M$. Pro euklidovský prostor zvolíme kartézkou soustavu souřadnic a zobrazení F definujeme stejně. $\square$

Parametrické a rovnicové vyjádření podprostorů $A(T^n)$

Každý podprostor B afinního prostoru $A(T^n)$ můžeme vyjádřit ve tvaru $B = a + V$, kde a je nějaký bod z B a V je podprostor T^n. Zvolíme-li nějakou bázi $M = \{m_1, \ldots, m_k\}$ prostoru V, máme

$$B = a + \langle \mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_k \rangle.$$

Tomuto vyjádření se říká **parametrické vyjádření** podprostoru B. Připomeňme, že každý bod $b \in B$ můžeme vyjádřit jako

$$b = a + t_1\mathbf{m}_1 + \ldots + t_k\mathbf{m}_k, \quad t_i \in T.$$

Vektor $(t_1, \ldots, t_k)$ je určen jednoznačně (protože M je báze), je to vlastně vyjádření bodu b v soustavě souřadnic $(a, \mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_k)$.

Z podprostory $A(T^n)$ jsme se již setkali při řešení soustavy rovnic. Uvažujme soustavu k rovnic o n neznámých $Ax^T = b$, kde $h(A) = k = h(A|b)$, tj. žádná z rovnic není „nadbytečná“ a soustava má řešení. Množina všech řešení je $v_p + \mathrm{Ker}(A)$, kde $v_p \in T^n$ je libovolné řešení soustavy, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - k$. Takže množina všech řešení je podprostor $A(T^n)$ dimenze $n - k$. Proto soustavě

$$Ax^T = b$$

říkáme **rovnicové vyjádření** podprostoru $v_p + \mathrm{Ker}(A)$.

Přechod od rovnicového vyjádření k parametrickému je zřejmý:

Příklad. Určete parametricky podprostor $B \subseteq R^5$ daný rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 - x_5 &= 4 \end{aligned}$$

Řešení. Máme vlastně pouze vyřešit danou soustavu rovnic. Gaussovou eliminací vypočteme

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right).$$

Tedy B můžeme vyjádřit parametricky např. takto (při počítání báze řešení homogenní soustavy volíme parametry na 2., 4. a 5. místě, volíme postupně $(0,0,2), (0,2,0), (1,0,0)$, aby řešení vyšlo „hezky“)

$$B = (2,0,1,0,0) + \langle (1,0,5,0,2), (-1,0,-1,2,0), (-2,1,0,0,0) \rangle.$$

Mějme nyní naopak parametrické vyjádření $B = a + V = a + \langle \mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_k \rangle$ a chceme podprostor B vyjádřit rovnicově. Tedy hledáme soustavu $n - k$ rovnic o n neznámých $Ax^T = b^T$, jejímž řešením je právě množina B. Jinými slovy chceme, aby $\mathrm{Ker}(A) = V$ a aby partikulárním řešením byl bod a. To jsme se naučili v kapitole o lineárních formách a duálech. Napíšeme vektory $\mathbf{m}_1 \ldots \mathbf{m}_k$ do řádků matice

C a do řádků matice A napíšeme nějakou bázi $\mathrm{Ker}(C)$. Pak máme $\mathrm{Ker}(A) = V$. Vektor pravých stran určíme, aby soustavu řešil bod a – zvolíme $b = Aa^T$.

Příklad. Najděte nějaké rovnicové vyjádření podprostoru $B \subseteq R^5$ daného parametricky

$$B = (2,0,1,0,0) + \langle (1,0,5,0,2), (-1,0,-1,2,0), (-2,1,0,0,0) \rangle.$$

Řešení. Postupujeme podle návodu nad příkladem. Vyřešíme hommogenní soustavu rovnic s maticí C:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 10 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 10 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}(C) = \langle (-1,-2,-1,0,2), (5,10,-1,2,0) \rangle$$

Rovnicové vyjádření B bude

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_5 &= b_1 \\ 5x_1 + 10x_2 - x_3 + 2x_4 &= b_2 \end{aligned}$$

Pravou stranu určíme, aby zadané soustavě vyhovoval bod $(2,0,1,0,0)$, tedy $b_1 = -3, b_2 = 9$. Rovnicové vyjádření B je tedy například:

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_5 &= -3 \\ 5x_1 + 10x_2 - x_3 + 2x_4 &= 9 \end{aligned}$$

Všimněme si ještě geometrického významu řádků v rovnicovém vyjádření $Ax^T = b^T$ podprostoru $a+V$ euklidovského prostoru $E(R^n)$. V euklidovském prostoru $E(R^n)$ je $\mathrm{Ker}(A)$ rovno ortogonálnímu doplňku lineárního obalu řádků matice A. Tedy v řádcích matice A máme bázi ortogonálního doplňku prostoru V. Jinými slovy, lineární obal řádků matice A je přesně množina vektorů kolmých na V. Tomuto prostoru se proto také říká **normálový prostor**, libovolnému nenulovému prvku tohoto prostoru říkáme **normálový vektor**. V případě, že $a + V$ je nadrovina, tj. $\dim(V) = n - 1$, pak normálový prostor má dimenzi 1, tedy normálový vektor je určen jednoznačně až na násobek.

Příklad. $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2$ je rovnicový popis roviny $(1,0,0) + \langle (-2,0,1), (3,2,0) \rangle$ v R^3. Vektor $(2,-3,4)$ je normálový vektor. Normálový prostor je $\langle (2,-3,4) \rangle$.

Vzájemná poloha podprostorů v afinním prostoru

Definice a tvrzení 10.8. *Nechť $B(U)$ a $C(W)$ jsou podprostory afinního prostoru $A(V)$. Říkáme, že $B(U)$ a $C(W)$ jsou*

- ***rovnoběžné**, pokud $U \subseteq W$ nebo $W \subseteq U$;*
- ***různoběžné**, pokud mají alespoň jeden společný bod a nejsou rovnoběžné;*
- ***mimoběžné**, pokud nemají společný bod a nejsou rovnoběžné.*

Pokud $B \cap C \neq \emptyset$, pak

$$B \cap C = d + (U \cap W), \qquad \text{kde } d \in B \cap C \text{ je libovolný bod.}$$

*Průniku $B \cap C$ někdy říkáme **průsečík** B **a** C, je to největší afinní podprostor $A(V)$, který je obsažen v obou podprostorech.*

Důkaz tvrzení, viz cvičení.

Pro ověření rovnoběžnosti dvou podprostorů si všimněme, že vztah $W \subseteq W'$ platí právě tehdy, když $\dim(W \vee W') = \dim(W')$. Podobně $W' \subseteq W$ právě tehdy, když $\dim(W \vee W') = \dim(W)$.

Příklad. Určete, zda jsou podprostory $B = b + W, B' = b' + W' \subseteq Z_5^4$ rovnoběžné:

$$B = (1,2,3) + \langle (1,0,4) \rangle, \quad B' = (3,0,1) + \langle (1,4,3), (2,4,2) \rangle$$

Řešení. Zřejmě $\dim(W) = 1$. Určíme $\dim(W')$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dim(W') = 2$$

Určíme $\dim(W \vee W')$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dim(W \vee W') = 2.$$

Je tedy $W \subseteq W'$, podprostory B a B' jsou rovnoběžné.

Následuje kriterium na rozlišení různoběžných a mimoběžných podprostorů:

Tvrzení 10.9. *Nechť $B(U)$ a $C(W)$ jsou nerovnoběžné podprostory afinního prostoru $A(V)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Podprostory B a C jsou různoběžné;
(ii) Pro každé $b \in B, c \in C$ je $b - c \in U \vee W$;
(iii) Existují $b \in B, c \in C$ je $b - c \in U \vee W$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Vezmeme libovolný bod $d \in B \cap C$. Vektor $b - d$ leží v U, vektor $d - c$ leží v W podle definice podprostou (uzavřenost na odčítání). Tedy $b - c = (b - d) + (d - c) \in U \vee W$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) je zřejmé.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Protože $b - c \in U \vee W$, máme $b - c = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, kde $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{w} \in W$. Bod $b - \mathbf{u} = c + \mathbf{w}$ leží v B i v C. $\square$

Pro praktické počítání je užitečná podmínka (iii) spolu s pozorováním, že $b - c \in U \vee W$ právě tehdy, když $\dim(\langle b - c\rangle \vee U \vee W) = \dim(U \vee W)$.

Mějme dvě mimoběžné přímky p, q v afinním prostoru dimenze 3. Přímku $r = c + \langle \mathbf{w}\rangle$, která protíná obě přímky, nazýváme **příčkou mimoběžek** p **a** q **ve směru** $\mathbf{w}$.

Tvrzení 10.10. *Nechť $p = a + \mathbf{u}$ a $q = b + \mathbf{v}$ jsou mimoběžné přímky v afinním prostoru $A(V)$ dimenze 3 a $\mathbf{w} \in V$ nenulový vektor. Pak příčka mimoběžek p a q ve směru $\langle \mathbf{w}\rangle$ existuje právě tehdy, když $\mathbf{w} \notin \langle \mathbf{u}\rangle \vee \langle \mathbf{v}\rangle$. V tomto případě je určena jednoznačně.*

Důkaz. Uvažujme rovinu $\rho = a + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle$. Pokud r je příčka p a q se směrem $\mathbf{w}$, pak r leží v rovině ρ a protíná q. Protože $b \notin \rho$ (to plyne z toho, že p a q jsou mimoběžné), musí nutně $\mathbf{w} \notin \langle \mathbf{u}\rangle \vee \langle \mathbf{v}\rangle$ (jinak by se q a ρ neprotly). V tomto případě je průnikem ρ a q jediný bod d (protože $(\langle \mathbf{u}\rangle \vee \langle \mathbf{v}\rangle) \cap \langle \mathbf{w}\rangle = \{\mathbf{o}\}$. Tedy příčka r je určena jednoznačně: $r = d + \langle \mathbf{w}\rangle$. $\square$

Přímky p a q jsou mimoběžné, pokud nejsou rovnoběžné (to nastane právě tehdy, když $\dim\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 2$) a nejsou různoběžné (to nastane právě tehdy, když $\dim\langle \mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle > \dim\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$). Dohromady, p a q jsou mimoběžné, právě když $\dim\langle \mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 3$.

Podmínka $\mathbf{w} \in \langle \mathbf{u}\rangle \vee \langle \mathbf{v}\rangle$ je splněna, právě když $\dim\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \dim\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$.

Příklad. V afinním prostoru R^3 nalezněte příčku mimoběžek

$$p = a + \langle \mathbf{u}\rangle = (1, 2, -1) + \langle (1, -1, 1)\rangle, \quad q = b + \langle \mathbf{v}\rangle = (0, 9, -2) + \langle (1, 0, 0)\rangle$$

ve směru $\mathbf{w} = (1, 2, 0)$.

Řešení. Určíme nejprve $\dim\langle b - a, \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

tedy $\dim\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 3$ a p,q jsou skutečně mimoběžné. Podobně ověříme, že $\dim\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 3$, tedy příčka ve směru $\mathbf{w}$ existuje.

Spočítáme průsečík d přímky q s rovinou

$$\rho = a + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle = (1, 2, -1) + \langle (1, -1, 1), (1, 2, 0)\rangle.$$

První způsob: Bod d leží na přímce q, tedy $d = (0, 9, -2) + \alpha(1, 0, 0)$, a v rovině ρ, tedy $d = (1, 2, -1) + \beta(1, -1, 1) + \gamma(1, 2, 0)$. Rozepsáním do složek získáme soustavu tří rovnic o třech neznámých. Vyjde $\alpha = 3$. Takže $d = (3, 9, -2)$.

Druhý způsob: Spočítáme rovnicové vyjádření roviny ρ:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešením této soustavy je $\langle(-2, 1, 3)\rangle$.Dopočtením pravé strany získáme vyjádření

$$\rho : -2x + y + 3z = -3.$$

Průsečík $d = (x, y, z)$ musí ležet na přímce q, tedy $(x, y, z) = (\alpha, 9, -2)$, a v rovině ρ, tedy musí platit $-2\alpha + 9 + 3 \cdot (-2) = -3$. Takže $\alpha = 3$, $d = (3, 9, -2)$.

Hledaná příčka je $(3, 9, -2) + \langle(1, 2, 0)\rangle$.

Tvrzení 10.11. *Nechť $p = a+\mathbf{u}$ a $q = b+\mathbf{v}$ jsou mimoběžné přímky v afinním prostoru $A(V)$ dimenze 3 a $c \in A$ libovolný bod neležící na p ani q. Pak příčka mimoběžek p a q procházející bodem c existuje právě tehdy, když $c - a, c - b \notin \langle\mathbf{u}\rangle \vee \langle\mathbf{v}\rangle$. V tomto případě je určena jednoznačně.*

Důkaz. Uvažujme rovinu $\rho = a + \langle\mathbf{u}, c - a\rangle$. Pokud r je příčka p a q procházející bodem c, pak r leží v rovině ρ a protíná q. Tedy p a ρ nemohou být rovnoběžné. Zřejmě p a ρ jsou rovnoběžné, právě když $c - a \in \langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$. Symetrickou úvahou (rovinu ρ vedeme přímkou q a bodem c) zjistíme, že $c - b \notin \langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$. V případě, že $c = a, c - b \notin \langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ je průnikem ρ a q jediný bod d. Příčka r existuje a je určena jednoznačně: $r = d + \langle c - d\rangle$. Detaily přenecháme čtenáři. □

Příklad. V afinním prostoru R^3 nalezněte příčku mimoběžek

$$p = a + \langle\mathbf{u}\rangle = (3, 3, 3) + \langle(2, 2, 1)\rangle, \quad q = b + \langle\mathbf{v}\rangle = (0, 5, -1) + \langle(1, 1, 1)\rangle$$

procházející bodem $c = (4, 5, 3)$.

Řešení. Snadno ověříme, že $\dim\langle b-a, \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \dim\langle c-a, \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \dim\langle c-b, \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 3$, tedy přímky jsou skutečně mimoběžné a příčka procházející bodem c existuje. Najdeme průsečík d přímky q s rovinou procházející přímkou p a bodem c:

$$\rho = a + \langle\mathbf{u}, c - a\rangle = (4, 5, 3) + \langle(1, 2, 0), (2, 2, 1)\rangle.$$

Vyjde $d = (0, -5, 1)$. Hledaná příčka je $d + \langle c - d\rangle = (0, -5, 1) + \langle(4, 0, 4)\rangle = (0, -5, 1) + \langle(1, 0, 1)\rangle$.

Vzdálenost a úhel v euklidovských prostorech

Nechť $E(V)$ je euklidovský prostoru dimenze n. **Vzdáleností bodů** a**,** b rozumíme velikost jejich rozdílu:

$$d(a,b) := ||a-b||(= \sqrt{(a-b)(a-b)}).$$

Nechť B a C jsou podprostory $E(V)$. **Vzdáleností podprostorů** B**,** B' rozumíme nejmenší možnou vzdálenost $b \in B$ od $c \in C$:

$$d(B,C) := \min\{d(b,c) |\ b \in B, c \in C\}.$$

Úhlem vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ rozumíme číslo $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, pro něž

$$\cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{|\mathbf{u}\mathbf{v}|}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||}.$$

Úhlem podprostorů $B(U), C(W)$ rozumíme nejmenší možný úhel α vektorů $\mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W$:

$$\angle(B,C) := \min\{\angle(\mathbf{u}, \mathbf{w}) |\ \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in W\}.$$

Minima v definici vzdálenosti a úhlu dvou podprostorů se skutečně nabývá (nebudeme dokazovat). Výraz vpravo v definici úhlu dvou vektorů je v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ (Cauchyova nerovnost). Definice tedy dávají smysl. Všimněme si, že úhel dvou vektorů je stejný jako úhel jejich libovolných nenulových násobků.

Nyní se naučíme počítat vzdálenost dvou rovnoběžných podprostorů a vzdálenost dvou mimoběžek.

Tvrzení 10.12. *Mějme dva podprostory $B(U)$ a $C(W)$ euklidovského prostoru $E(V)$, $U \subseteq W$ a libovolný bod $b \in B$. Pak podprostor $b + W^\perp$ protíná podprostor C v jediném bodě c a $d(B,C) = d(b,c)$.*

Důkaz. Podprostory $b + W^\perp$ a $C = c + W$ (zde $c \in C$ je libovolný bod) nejsou mimoběžné, protože nejsou rovnoběžné ($W \cap W^\perp = \{\mathbf{o}\}$) a $b - c \in W \vee W^\perp$ ($W \vee W^\perp = V$) (použili jsme kritérium na mimoběžnost). Průnikem je tedy prostor $c + (W \cap W^\perp) = c + \{\mathbf{o}\}$. Zbývá ukázat, že vzdálenost $d(b,c)$ je nejmenší možná. Vezmeme libovolné dva body $e \in B, f \in C$ a dokážeme $d(e,f) \geq d(b,c)$. Bod $g = f + (b - e)$ leží v $C(W)$, protože $b - e \in U$ a $U \subseteq W$. Protože $g - b = f - e$, platí $d(e,f) = d(b,g)$. Vektor $c - b$ je kolmý na $c - g$, protože $c - b \in W^\perp$ a $c - g \in W$. Podle Pythagorovy věty máme $d^2(b,g) = d^2(b,c) + d^2(c,g)$, takže $d(e,f) = d(b,g) \geq d(b,c)$. $\square$

Příklad. Spočítejte vzdálenost přímky $p = x + U$ a roviny $\rho = y + W$ v $E(R^4)$:

$$p = (6,0,1,0) + \langle (1,3,-1,2) \rangle, \quad \rho = (-2,4,5,3) + \langle (1,2,3,1), (2,5,2,3) \rangle.$$

Řešení. Snadno ověříme, že $\dim(U) = 1, \dim(W) = 2, \dim(U \vee W) = 2$, takže p a ρ jsou skutečně rovnoběžné. Spočítáme $W^\perp$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Takže

$$W^\perp = \langle(-11,4,1,0),(1,-1,0,1)\rangle.$$

Řešením soustavy rovnic zjistíme, že $(x+W^\perp)\cap\rho = c = (-3,2,2,2)$. Vzdálenost p od ρ je $d(p,\rho) = d(x,c) = \sqrt{9^2+2^2+1^2+2^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

Tvrzení 10.13. *Mějme dvě mimoběžné přímky $p = b+\mathbf{u}$, $q = c+\mathbf{w}$ v euklidovském prostoru $E(V)$ dimenze 3. Pak existuje právě jedna příčka mimoběžek ve směru $\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle^\perp$. Označíme-li e, f její průsečíky s p a q, pak $d(p,q) = d(e,f)$.*

Důkaz. Exsitenci právě jedné příčka mimoběžek ve směru $\langle\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle^\perp$ nám zaručuje tvrzení 10.10 (vektory $\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v}$ tvoří bázi). Uvažujme rovinu $\rho = c + \langle\mathbf{uw}$. Protože přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ a $(e+\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle^\perp\cap\rho = f$, z přechotího tvrzení víme, že $d(e,f) = d(p,\rho)$. Protože $q\subseteq\rho$, máme $d(e,f)\le d(p,q)$. Opačná nerovnost $d(e,f)\ge d(p,q)$ je zřejmá. □

Příklad. Spočtěte vzdálenost mimoběžek $p = b+\mathbf{u}$, $q = c+\mathbf{w}$ v prostoru $E(R^3)$:

$$p = (1,-8,11)+\langle(2,3,-6)\rangle,\quad q = (8,3,13)+\langle(6,-1,12)\rangle.$$

Řešení. Snadno ověříme, že vektory $b-c,\mathbf{u},\mathbf{w}$ tvoří bázi R^3, takže přímky p a q jsou skutečně mimoběžné. Určíme $\langle\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6\\ 6 & -1 & 12\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6\\ 0 & -10 & 30\end{pmatrix},$$

takže např. $\mathbf{v} = (3,-6,-2)$. Nyní určíme průsečík f příčky mimoběžek p a q ve směru $\langle\mathbf{v}\rangle$ s přímkou q – spočítáme $f = (a+\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle)\cap q$. Vyjde $f = (2,4,1)$. Příčka ve směru $\langle\mathbf{v}\rangle$ je tedy $r = (2,4,1)+\langle(3,6,-2)$. Spočteme $e = r\cap p$. Vyjde $e = (5,-2,-1)$. Vzdálenost p a q je $d(e,f) = \sqrt{3^2+6^2+2^2} = 7$.

Nyní se naučíme počítat úhly dvou podprostorů v některých speciálních případech.

Tvrzení 10.14. *Mějme euklidovský prostor $E(V)$. Pak*

(i) Úhel dvou přímek je roven úhlu jejich směrových vektorů.
(ii) Úhel dvou nadrovin je roven úhlu jejich normálových vektorů
(iii) Úhel přímky a nadroviny je roven doplňku úhlu směrového vektoru přímky a normálového vektoru nadroviny do $\frac{\pi}{2}$.

Důkaz. Viz cvičení. □

Trojpoměr, geometrická charakterizace afinních a izometrických zobrazení

Definice 10.15. *Mějme tři různé body a,b,c v afinním prostoru A ležící na jedné přímce.* ***Dělícím poměrem*** *(nebo* ***trojpoměrem****) bodu c vzhledem k bodům a,b rozumíme prvek $\lambda\in T$, pro který $(c-a) = \lambda(c-b)$ (zřejmě existuje, protože body leží na jedné přímce). Značíme $\lambda = (c;a,b)$.*
Pokud $(c;a,b) = -1$ a T má charakteristiku různou od nuly, říkáme, že c ***je středem úsečky*** *(a,b). Platí $c = a+\frac{1}{2}(b-a) = b+\frac{1}{2}(a-b)$.*

Dělicí poměr tedy udává, kolikrát je větší vektor $(c-a)$ oproti vektoru $(c-b)$. Znaménko udává, zda jsou vektory $c-a$ a $c-b$ souhlasně (znaménko +), nebo nesouhlasně orientovány (znaménko -). Některé jednoduché vlastnosti dělicího poměru, viz cvičení.

Následující pěkná věta charakterizuje afinní zobrazení ryze geometricky – afinní zobrazení jsou přesně ta, která zachovávají trojpoměr:

Věta 10.16. *Nechť $A(V)$ a $A'(V')$ jsou afinní prostory nad tělesem charakteristiky různé od 2, $F : A \to A'$ zobrazení. Je ekvivalentní:*

(i) F je afinní zobrazení

(ii) F zachovává trojpoměr: Pro libovolné tři body $a, b, c \in A$ ležící na jedné přímce je buď $F(a) = F(b) = F(c)$, nebo $(F(a); F(b), F(c)) = (a; b, c)$

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (2). Viz cvičení.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Zvolíme libovolný bod $a \in A$. Hledáme homomorfismus $f : V \to V$, který vytváří F, tedy chceme, aby pro libovolné $b \in A$ platilo

$$F(b) = F(a) + f(b-a)$$

Položíme proto

$$f(\mathbf{u}) := F(a+\mathbf{u}) - F(a).$$

Musíme ověřit, že f je homomorfismus – ověřit že pro libovolné $t \in T$ a vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí $f(t\mathbf{u}) = tf(\mathbf{u})$ a $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$. Neboli chceme dokázat, že

$$F(a+t\mathbf{u}) - F(a) = t \cdot (F(a+\mathbf{u}) - F(a)) \qquad (1)$$

a

$$F(a+\mathbf{u}+\mathbf{v}) - F(a) = (F(a+\mathbf{u}) - F(a)) + (F(a+\mathbf{v}) - F(a)) \qquad (2)$$

Nejprve první vztah. Pokud $t = 0$ nebo $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, pak vztah zřejmě platí. V opačném případě jsou a, $a+\mathbf{u}$ a $a+t\mathbf{u}$ tři různé body ležící na jedné přímce a platí $(a; a+t\mathbf{u}, a+\mathbf{u}) = t$. Podle předpokladu buď $F(a+t\mathbf{u}) = F(a+\mathbf{u}) = F(a)$ a vztah (1) platí, nebo $(F(a); F(a+t\mathbf{u}), F(a+\mathbf{u})) = t$, což je přesně dokazovaný vztah.

Druhý vztah můžeme upravit do ekvivalentní formy

$$F(a+\mathbf{u}+\mathbf{v}) - F(a+\mathbf{u}) = F(a+\mathbf{v}) - F(a) \qquad (3)$$

Je-li $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ nebo $\mathbf{v} = \mathbf{o}$, vztah (3) platí. Předpokládejme tedy, že $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$. Označíme b střed úsečky $(a, a+\mathbf{u}+\mathbf{v})$. Snadno ověříme, že b je zároveň středem úsečky $(a+\mathbf{u}, a+\mathbf{v})$. Rozlišíme čtyři případy

1. $F(b) = F(a) = F(a+\mathbf{u}+\mathbf{v}) = F(a+\mathbf{u}) = F(a+\mathbf{v})$. V tomto případě zřejmě (3) platí.
2. $F(b) = F(a) = F(a+\mathbf{u}+\mathbf{v})$, $(F(b); F(a+\mathbf{u}), F(a+\mathbf{v})) = -1$. V tomto případě $F(b) - F(a+\mathbf{u}) = F(a+\mathbf{v}) - F(b)$. Levá strana je rovna $F(b) - F(a+\mathbf{u})$, pravá strana je rovna $F(a+\mathbf{v}) - F(b) = F(b) - F(a+\mathbf{u})$.

3. $(F(b); F(a), F(a+\mathbf{u}+\mathbf{v}) = -1$, $F(b) = F(a+\mathbf{u} = F(a+\mathbf{v})$. V tomto případě $F(b) - F(a) = F(a+\mathbf{u}+\mathbf{v}) - F(b)$. Levá strana je rovna $F(a+\mathbf{u}+\mathbf{v}) - F(b) = F(b) - F(a)$. Pravá strana rovněž.
4. $(F(b); F(a), F(a+\mathbf{u}+\mathbf{v}) = -1$, $(F(b); F(a+\mathbf{u}), F(a+\mathbf{v})) = -1$. V tomto případě $F(b) = F(a) + \frac{1}{2}(F(a+\mathbf{u}+\mathbf{v}) - F(a)) = F(a+\mathbf{u}) + \frac{1}{2}(F(a+\mathbf{v} - F(a+\mathbf{u}))$. Tedy $2(F(a+\mathbf{u}) - F(a)) = (F(a+\mathbf{u}+\mathbf{v}) - F(a)) + (F(a+\mathbf{u}) - F(a+\mathbf{v}))$. Po úpravě vyjde (3).

□

Izometrie lze charakterizovat jako zobrazení, která zachovávají vzdálenosti.

Věta 10.17. *Nechť $E(V)$ a $E'(V')$ jsou euklidovské prostory, $F : E \to E'$ zobrazení. Je ekvivalentní:*

(i) F je izometrie
(ii) F zachovává vzdálenosti: Pro libovolné dva body $a, b \in A$ platí $d(F(a), F(b)) = d(a, b)$, kde vzdálenost vlevo je v prostoru $E'(V')$; vzdálenost vpravo je v prostoru $E(V)$.

Důkaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Je-li F izometrie vytvořená homomorfismeme f, pak f je dle definice unitární zobrazení, tj. homomorfismus, který zachovává skalární součin. Potom ale f zachovává normy vektorů, takže F zachovává vzálenosti.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Návod k důkazu:

1. Nejprve pomocí trojúhelníkové nerovnosti odvoďte, že obrazem třech různých bodů na jedné přímce je trojice různých bodů ležících na jedné přímce, a že F zachovává trojpoměr.
2. Z předchozí věty plyne, že F je afinní zobrazení, tedy $F(a+u) = F(a) + f(u)$. Odvoďte, že f zachovává normy vektorů.
3. Libovolný homomorfismus, který zachovává normy vektorů, je unitární.

□