

Domácí úkol č. 9 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2012–2013

Datum odevzdání 25.4.2013

(9.1) V prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem uvažujme útvar U , který vznikne jako průnik množiny

$$H = \{(x_1, x_2, x_3)^T : 7x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1 - 10x_2 - 12x_3 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 4 = 0\}$$

a roviny

$$V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle (1, 0, 1)^T, (1, -2, 0)^T \rangle.$$

Z postupu vyplýne, že U je elipsa. Úkolem je zjistit přesný tvar a umístění, tj. najít střed elipsy a směry a velikosti poloos.

Postupujte následujícím způsobem.

- (a) Rozložte výraz definující H na součet kvadratické formy f_2 , lineární formy h a konstanty. Označme A matici f vzhledem ke kanonické bázi $\mathbb{R}^3$ (kde f je symetrická bilineární forma příslušná kvadratické formě f_2), tj. $A = [f]_{K_3}$. Označme Y matici h vzhledem ke kanonické bázi, tj. $Y = [h]_{(1)}^{K_3}$. Nyní máme

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + Y \mathbf{x} + 4 = 0\}.$$

- (b) Najděte matici R restrikce bilineární formy f na prostor $\mathbf{V}$, matici Z restrikce h na prostor $\mathbf{V}$ a matici S restrikce standardního skalárního součinu na prostor $\mathbf{V}$, vše vzhledem k bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ prostoru $\mathbf{V}$. Nyní máme

$$[U]_B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x}^T R \mathbf{x} + Z \mathbf{x} + 4 = 0\}$$

- (c) Najděte bázi $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ prostoru $\mathbf{V}$, která je zároveň ortogonální vzhledem k restrikci f na V a ortonormální vzhledem k restrikci standardního skalárního součinu na V . Ve skriptech najdete, jak to lze efektivně udělat pomocí matic R a S . Vyjádřete $[U]_C$ ve tvaru

$$[U]_C = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : ?x_1^2 + ?x_2^2 + ?x_1 + ?x_2 + ? = 0\}.$$

- (d) Doplněním na čtverec a úpravami zjistíte střed a velikosti poloos, podobně jako v jednom z příkladů ve skriptech. (Střed i směry poloos vyjádřete v kanonické bázi.)

(9.2) Mějme afinní prostor $\mathbf{A}$ nad $\mathbb{R}$, $a_1, \dots, a_n \in A$ a $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$. Pro soustavu souřadnic S označme b^S ten bod, pro který

$$[b^S]_S = t_1[a_1]_S + t_2[a_2]_S + \dots + t_n[a_n]_S.$$

Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní.

1. $t_1 + \dots + t_n = 1$.
2. Pro libovolné dvě soustavy souřadnic S, R platí $b^S = b^R$.