Domácí úkol č. 11 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2012–2013

Datum odevzdání 16.5.2013

(11.1) Nechť $\mathbf{A}$ je afinní prostor dimenze 3 nad tělesem $\mathbf{T}$ s prostorem vektorů $\mathbf{V}$, $B = b + \langle \mathbf{u} \rangle$ a $C = c + \langle \mathbf{v} \rangle$ jsou mimoběžné přímky v $\mathbf{A}$ a $d \in A$, $\mathbf{w} \in V$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{o}$. Přímku v $\mathbf{A}$ nazveme *příčkou* přímek B a C, pokud protíná obě přímky B a C. Dokažte:

(a) Příčka přímek B a C procházející bodem d existuje právě tehdy, když $d - b \notin \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ a $d - c \notin \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Navíc pokud taková příčka existuje, pak je jediná.

(b) Příčka přímek B a C se směrem $\langle \mathbf{w} \rangle$ (tj. s prostorem vektorů $\langle \mathbf{w} \rangle$) existuje právě tehdy, když $\mathbf{w} \notin \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Navíc pokud taková příčka existuje, pak je jediná.

(11.2) Nechť $\mathbf{V}$ je reálný orientovaný vektorový prostor dimenze 3 se skalárním součinem $\langle \, | \, \rangle$. Dokažte, že pro libovolné $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$ platí

(a) $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_3$

(b) $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) + \mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_3 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = \mathbf{o}$