

Domácí úkol č. 9 k přednášce NALG 001: Lineární algebra a geometrie 1, zimní semestr 2012–2013

Datum odevzdání 12.12.2012

(9.1)

- (a) Vypište všechny sudé a všechny liché permutace v S_4 . Použijte redukovaný cyklický zápis.
- (b) Pomocí (a) rozepište sumu v definici determinantu pro obecnou matici $A = (a_{ij})$ řádu 4.

(9.2) Vypočítejte ρ^{2003} , kde $\rho \in S_{12}$ je zadáno tabulkou

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 4 & 11 & 12 & 9 & 6 & 2 & 3 & 5 & 10 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poznámka: Mocnina je definována

$$\pi^n = \underbrace{\pi \circ \pi \circ \dots \circ \pi}_{n \times},$$

tedy např. $\pi^1 = \pi$, $\pi^2 = \pi \circ \pi$, atd.

(9.3) Permutace $\alpha, \beta \in S_9$ jsou dány redukovaným cyklickým zápisem.

$$\alpha = (1\ 9\ 2\ 8)(4\ 7\ 3), \quad \beta = (5\ 6\ 7\ 1)(2\ 3\ 8)$$

- (a) Dokažte, že pro libovolnou permutaci $\pi \in S_9$ je redukovaný cyklický zápis permutace $\pi\alpha\pi^{-1}$ tvaru $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)(x_5\ x_6\ x_7)$. (Nápověda: kam se zobrazí $\pi(1)$?)
- (b) Určete počet permutací $\pi \in S_9$, pro které platí $\pi\alpha\pi^{-1} = \beta$.

Poznámka: Po vyřešení bodu (a) vás asi napadne, že permutace $\pi\alpha\pi^{-1}$ a α mají obecně vždy stejný „cyklický typ“ – v zápisu pomocí nezávislých cyklů mají stejný počet cyklů každé délky. Permutace $\pi\alpha\pi^{-1}$ se nazývá konjugovaná permutace k permutaci α . Konjugování lze využít například na vyřešení Rubikovy kostky: Označme α permutaci odpovídající pootočení horní stěny o 90 stupňů a π permutaci, která prohazuje dva sousední hranové kostičky v horní stěně a všechny ostatní kostičky v horní stěně nechává na místě (ostatní kostičky můžeme promíchat libovolně). Takový tah π asi umí nalézt téměř každý, kdo si nějakou dobu s Rubikovou kostkou hrál. Po vyřešení části (a) by neměl být problém si rozmyslet, co udělá tah $\pi\alpha\pi^{-1}$, a pak tah $\alpha^{-1}\pi\alpha\pi^{-1}$. Zjistíte, že druhý tah cyklicky rotuje tři hranové kostičky a všechny ostatní kostičky nechává na místě. Těmito tahy lze přesunout všechny hranové kostičky na správné místo. Podobným trikem lze vymyslet tahy, které umožní přesunout rohové kostičky na správné místo, a také opravit orientaci rohových a hranových kostiček.