Domácí úkol č. 7 k přednášce NALG 001: Lineární algebra a geometrie 1, zimní semestr 2012–2013

Datum odevzdání 28.11.2012

(7.1) Dokažte, že posloupnost vektorů $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $\mathbf{v}_i \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1} \rangle$.

(7.2) Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor všech reálných polynomů p stupně nejvýše čtyři takových, že $p(2) = 0$ a $p(-1) = 0$:

$$V = \{p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e : p(2) = p(-1) = 0\}$$

Najděte nějakou bázi $\mathbf{V}$.

Poznámky: Samozřejmě je třeba dokázat, že nalezená posloupnost je báze. To, že $\mathbf{V}$ s běžnými operacemi sčítání a násobení skalárem je vektorový prostor, nemusíte zdůvodňovat, ale rozmyslete si to.

(7.3) Pro která $a \in \mathbb{C}$ je posloupnost vektorů

$$((a, -4i, -i)^T, (4i, -6i, -3i)^T, (i, i, -a)^T)$$

v $\mathbb{C}^3$ lineárně nezávislá?