

LINEÁRNÍ ALGEBRA

LIBOR BARTO A JIŘÍ TŮMA

barto@karlin.mff.cuni.cz, tuma@karlin.mff.cuni.cz

Toto jsou zápisky z přednášek z akademického roku 2012/2013.

1. PŘEDPOKLADY

1.1. **Komplexní čísla.** Některé kvadratické rovnice s reálnými koeficienty nemají žádný reálný kořen. Nejjednodušší příklad je rovnice

$$x^2 + 1 = 0 .$$

Geometrický důvod neexistence reálných kořenů pro tuto rovnici spočívá v tom, že graf funkce $f(x) = x^2 + 1$ neprotíná reálnou osu x , celý leží nad ní. Tyto rovnice byly po dlouhá staletí považovány za neřešitelné. Až v šestnáctém století se v matematických textech začíná objevovat výraz $\sqrt{-1}$ označující kořen této rovnice. Matematici Gerolamo Cardano a Rafael Bombelli vyšli z toho, že se s tímto číslem počítá podobně jako s reálnými čísly, a odvodili pravidla, kterými by se výpočty měly řídit. Následovala dvě staletí diskusí, co by měla tato čísla znamenat. Vžil se pro ně výraz *imaginární* čísla naznačující, že nemají žádnou reálnou existenci. René Descartes tento název začal používat jako první v hanlivém smyslu *opovrženímhodný*. Diskuse utichly až ke konci osmnáctého století, kdy se komplexní čísla stala běžnou součástí matematiky.

Cardano a Bombelli si všimli, že pokud s číslem $\sqrt{-1}$ počítáme podobně jako s reálnými čísly, pak můžeme vyřešit každou kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty. Pro kladná reálná čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b} .$$

Pokud vyjdeme z toho, že podobně by mělo platit také

$$\sqrt{-a} = \sqrt{-1} \sqrt{a}$$

pro kladné reálné číslo a , umíme už zapsat druhou odmocninu z každého reálného čísla. Potom umíme také vyjádřit kořeny libovolné kvadratické rovnice s reálnými koeficienty

$$ax^2 + bx + c = 0 .$$

Pokud je $b^2 - 4ac > 0$, jsou jejími kořeny reálná čísla

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

V případě $b^2 - 4ac = 0$ oba kořeny splývají v jediný dvojnásobný kořen $-b/2a$. V případě $b^2 - 4ac < 0$, můžeme s pomocí symbolu $\sqrt{-1}$ kořeny zapsat jako

$$-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a} \sqrt{-1} .$$

K tomu potřebujeme vědět jak počítat s výrazy $B\sqrt{-1}$, kde B je libovolné reálné číslo, a dále s výrazy $A + B\sqrt{-1}$, kde A, B jsou reálná čísla.

Během osmnáctého století se pro výraz $\sqrt{-1}$ vžilo označení i , které zavedl švýcarský matematik Leonhard Euler. Pouze elektroinženýři používají označení j , protože pro ně i označuje proud.

Protože číslo $i = \sqrt{-1}$ označuje kořen rovnice $x^2 = -1$, platí $i^2 = -1$.

Definice 1.1. *Komplexní číslo* je výraz

$$z = a + bi ,$$

kde a, b jsou reálná čísla. Číslo a se nazývá *reálná část* komplexního čísla z a označujeme jej $\operatorname{Re} z$. Číslo b je *imaginární část* čísla z a označujeme jej $\operatorname{Im} z$. Dvě komplexní čísla $a + bi$ a $c + di$ se rovnají právě když se rovnají jejich reálné části a imaginární části. Tj. $a + bi = c + di$ právě když $a = c$ a $b = d$.

Poslední část definice říká, že rovnost dvou komplexních čísel ověříme *porovnáním* jejich reálných a imaginárních částí. Nebo jinak řečeno, komplexní číslo jednoznačně zadáme tak, že řekneme jeho reálnou a imaginární část. Množinu všech komplexních čísel budeme označovat \mathbb{C} .

Komplexní čísla budeme sčítat, odčítat, násobit a dělit tak, aby tyto operace měly pokud možno stejné vlastnosti jako příslušné operace s reálnými čísly. Hlavně budeme usilovat o komutativitu a asociativitu sčítání a násobení a o distributivitu násobení vzhledem ke sčítání. Potom je přirozené zavést součet a rozdíl dvou komplexních čísel jako

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi) - (c + di) &= (a - c) + (b - d)i . \end{aligned}$$

Z obou formulek plyne, že součet a rozdíl dvou komplexních čísel je zase komplexní číslo. Snadno si také odvodíte, že takto definované sčítání komplexních čísel je komutativní a asociativní. Stačí pouze použít komutativitu a asociativitu sčítání reálných čísel.

Formulku pro násobení komplexních čísel dostaneme za použití faktu, že $i^2 = -1$. Chceme, aby násobení bylo komutativní, asociativní a distributivní vzhledem ke sčítání. Z toho odvodíme

$$(a + bi)(c + di) = a(c + di) + (bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i .$$

Opět si můžete snadno ověřit, že takto definované násobení komplexních čísel je komutativní a asociativní, je to jenom o něco více počítání než v případě sčítání. Stejně snadno ověříme distributivitu násobení vzhledem ke sčítání.

Nepatrně složitější je definovat dělení komplexních čísel. Dělit budeme pouze nenulovými komplexními čísly a je přirozené považovat komplexní číslo $c + di$ za nenulové, pokud je aspoň jedno z reálných čísel c, d různé od 0. Platí tedy, že $c + di \neq 0$ právě když $c^2 + d^2 \neq 0$. Ještě si napřed spočítáme součin

$$(c + di)(c - di) = (c^2 + d^2) + 0i .$$

Tento součin je různý od 0 právě když $c + di \neq 0$. Potom nám vyjde

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i.$$

Příklad 1.2. Spočítáme výsledek všech operací pro dvojici čísel $z = 2 + i$ a $w = 3 - 4i$. Platí

$$\begin{aligned} z+w &= (2+i) + (3-4i) = (2+3) + (1-4)i = 5-3i, \\ z-w &= (2+i) - (3-4i) = (2-3) + (1+4)i = -1+5i, \\ zw &= (2+i)(3-4i) = 6-4i^2 + (3-8)i = 6-4(-1) - 5i = 10-5i, \\ \frac{z}{w} &= \frac{2+i}{3-4i} = \frac{2+i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(6-4) + (8+3)i}{3^2+4^2} = \frac{2}{25} + \frac{11}{25}i. \end{aligned}$$

Definice 1.3. Je-li $w = c + di$ komplexní číslo, pak číslo $c - di$ se nazývá *komplexně sdružené* k číslu w a označujeme jej \bar{w} .

Přímo z definice hned plyne, že $\overline{\bar{z}} = z$ pro každé komplexní číslo z . Ihned také vidíme, že $\bar{\bar{w}} = w$ právě když $d = 0$ tj. právě když w je reálné číslo. Komplexní sdružování dobře souvisí s operacemi na komplexních číslech.

Tvrzení 1.4. Jsou-li $z = a + bi$ a $w = c + di$ komplexní čísla, pak platí

- (1) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$,
- (2) $\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$,
- (3) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$,
- (4) je-li $w \neq 0$, pak $\overline{(z/w)} = \bar{z}/\bar{w}$.

Důkaz. Dokážeme (3), ostatní ponecháme jako cvičení. Platí $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$ a tedy $\overline{(zw)} = (ac - bd) - (ad + bc)i$. Dále je $\bar{z} = a - bi$ a $\bar{w} = c - di$. Tj. $\bar{z}\bar{w} = (ac - bd) + (-ad - bc)i = (ac - bd) - (ad + bc)i$. Reálné části čísel $\overline{(zw)}$ a $\bar{z}\bar{w}$ jsou tedy stejné. Také imaginární části obou čísel se rovnají, platí proto rovnost $\overline{(zw)} = \bar{z}\bar{w}$. \square

Viděli jsme už, že pokud kvadratická rovnice s reálnými koeficienty nemá reálné kořeny, pak její komplexní kořeny jsou komplexně sdružené. Následující tvrzení ukazuje, že komplexní kořeny libovolného nekonstantního polynomu s reálnými koeficienty se komplexně sdružují.

Tvrzení 1.5. *Komplexní číslo z je kořenem polynomu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ s reálnými koeficienty právě když je číslo \bar{z} jeho kořenem.*

Důkaz. Je-li z kořenem polynomu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, platí

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Podle předchozího tvrzení platí

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{0} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n} \bar{z}^n + \overline{a_{n-1}} \bar{z}^{n-1} + \dots + \overline{a_1} \bar{z} + \overline{a_0} \\ &= a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0, \end{aligned}$$

v poslední rovnosti jsme použili to, že koeficienty polynomu jsou reálná čísla. Číslo \bar{z} komplexně sdružené k z je tedy také kořenem polynomu.

Naopak, je-li \bar{z} kořenem polynomu, pak jsme právě ukázali, že $\bar{\bar{z}} = z$ je také jeho kořenem. \square

Imaginární jednotku i jsme zavedli jako $\sqrt{-1}$, neboli jako kořen rovnice $x^2 = -1$. A co rovnice

$$x^2 = i \text{ ?}$$

Má nějaký kořen nebo jsme problém s řešitelností kvadratických rovnic jenom odsunuli o něco dále? Pokud by komplexní číslo $z = a + bi$ bylo kořenem rovnice $x^2 = i$, muselo by platit

$$z^2 = (a + bi)(a + bi) = (a^2 - b^2) + (2ab)i = 0 + 1i \text{ .}$$

Z definice rovnosti dvou komplexních čísel plyne, že reálná čísla a, b musí splňovat soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 0, \\ 2ab &= 1 \text{ .} \end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme $a = \pm b$. V případě $a = b$ pak z druhé plyne $a = \pm 1/\sqrt{2}$. V případě $a = -b$ dosazením do druhé rovnice dostaneme $2b^2 = -1$ a žádné takové reálné číslo b neexistuje. Dostáváme tak pouze dvě možnosti pro kořeny z rovnice $x^2 = i$:

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i), \text{ nebo } z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i) \text{ .}$$

Dosazením do rovnice $x^2 = i$ se přesvědčíme, že obě tato čísla jsou skutečně druhými odmocninami z i .

Podobně můžeme dodat smysl odmocnině \sqrt{w} z libovolného komplexního čísla $w = c + di$. Odtud vyplývá, že každá kvadratická rovnice s komplexními koeficienty má nějaký komplexní kořen.

Příklad 1.6. Vyřešíme rovnici

$$z^2 - (3 + i)z + (2 + i) = 0 \text{ .}$$

Koeficienty rovnice jsou $a = 1$, $b = -3 - i$, $c = 2 + i$. Platí tedy

$$b^2 - 4ac = (-3 - i)(-3 - i) - 4(2 + i) = 9 + i^2 + 6i - 8 - 4i = 9 - 1 - 8 + 6i - 4i = 2i \text{ .}$$

Dosazením do vzorce pro řešení kvadratické rovnice dostaneme

$$z_{1,2} = \frac{3 + i \pm \sqrt{2i}}{2} = \frac{3 + i \pm \sqrt{2}\sqrt{i}}{2} = \frac{3 + i \pm (1 + i)}{2} \text{ .}$$

Kořeny této rovnice jsou tedy $z_1 = 2 + i$ a $z_2 = 1$.

Ve skutečnosti platí mnohem obecnější tvrzení, které jako první dokázal Carl Friedrich Gauss.

Věta 1.7. Každý nekonstantní polynom $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ s komplexními koeficienty $a_i \in \mathbb{C}$ má aspoň jeden komplexní kořen.

Poslední věta, často také nazývaná **základní věta algebry**, pouze garantuje existenci komplexního kořenu polynomu s komplexními koeficienty. Nijak nenaznačuje, kde by se kořen měl nacházet nebo jak souvisí s koeficienty polynomu. Tím se odlišuje od formule pro řešení kvadratické rovnice, která nejenom zajišťuje existenci kořene, ale také přímo uvádí vzorec jak jej nalézt.

1.2. Komplexní rovina. K všeobecnému přijetí komplexních čísel přispěl také objev jejich geometrického významu v 18. století. Komplexní číslo $z = a + bi$ je uspořádaná dvojice reálných čísel (a, b) , své reálné a imaginární složky. Zvolíme-li v rovině pravouhlý souřadný systém, můžeme si číslo $z = a + bi$ představit jako bod o souřadnicích (a, b) . Reálná čísla pak leží na vodorovné *reálné ose*. Na svislé ose leží čísla tvaru bi . Těm říkáme *čistě imaginární* a svislou osu nazýváme *imaginární osa*.

OBRAZEK spolu s polárním tvarem

Bod v komplexní rovině odpovídající komplexnímu číslu $z = a + bi$ můžeme zadat nejen pomocí kartézských souřadnic (a, b) . Další možností je vyjádřit jej pomocí *polárních souřadnic*. Označíme r vzdálenost bodu z od počátku souřadnic. Je-li $z \neq 0$, pak označíme φ úhel, který svírá kladný směr reálné osy s polopřímkou spojující počátek s bodem z . Kartézské souřadnice bodu z jsou potom $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Dvojici čísel (r, φ) nazýváme *polární souřadnice* bodu (a, b) . Dostáváme tak další vyjádření čísla z :

$$z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) .$$

Definice 1.8. Vyjádření čísla z ve tvaru $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ nazýváme *goniometrický tvar komplexního čísla* z . Číslo r nazýváme *modul* nebo *absolutní hodnota* čísla z a označujeme jej $|z|$. Úhel φ je *argument* čísla z , označení $\arg z$. V případě $z = 0$ není argument definován.

Modul $|z|$ čísla $z = a + bi$ se rovná $\sqrt{a^2 + b^2}$. Argument $\arg z$ je v případě $z \neq 0$ určený rovnostmi

$$\sin \arg z = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \arg z = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

Argument $\arg z$ je určený jednoznačně až na celočíselný násobek 2π . Tak například $\arg(1 - i)$ se může rovnat $3\pi/4$ nebo $11\pi/4$ nebo $-\pi/4$. Následující tvrzení ukazuje, jak souvisí modul a argument čísla s operací násobení komplexních čísel.

Tvrzení 1.9. *Jsou-li z, w komplexní čísla, pak platí*

- (1) $|zw| = |z||w|$,
- (2) $|z/w| = |z|/|w|$ pokud $w \neq 0$,
- (3) $z\bar{z} = |z|^2$,
- (4) $|z| = |\bar{z}|$,
- (5) $\arg(zw) = \arg z + \arg w$,
- (6) $\arg(z/w) = \arg z - \arg w$,
- (7) $\arg \bar{z} = -\arg z$.

Důkaz. Dokážeme pouze některé z uvedených vlastností, zbylé ponecháme jako cvičení. Obě čísla z, w vyjádříme v goniometrickém tvaru:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad w = s(\cos \psi + i \sin \psi).$$

Potom platí

$$\begin{aligned} zw &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi)s(\cos \psi + i \sin \psi) \\ &= rs((\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + i(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi)) \\ &= rs(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)) , \end{aligned}$$

použili jsme součtové vzorce pro \sin a \cos . Odtud plyne $|zw| = rs = |z||w|$ a $\arg(zw) = \varphi + \psi = \arg z + \arg w$, což dokazuje (1) a (5).

Dokážeme ještě (3). Je-li $z = a + bi$, pak $\bar{z} = a - bi$ a $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$. \square

Někdy je vhodné omezit argumenty komplexních čísel na čísla $0 \leq \varphi < 2\pi$. V takovém případě pak rovnosti (5) a (6) platí „až na celočíselný násobek 2π “.

Pro modul součtu $z + w$ platí následující **trojúhelníková nerovnost**.

Tvrzení 1.10. *Pro komplexní čísla z, w platí*

$$|z + w| \leq |z| + |w| .$$

Důkaz. Tentokrát si ukážeme dva důkazy. Geometrický vyplývá z porovnání vzdáleností mezi třemi body $0, z$ a $z + w$.

OBRAZEK

Vzdálenost mezi body $0, z$ se rovná $|z|$, vzdálenost mezi $0, z + w$ se rovná $|z + w|$ a vzdálenost mezi $z, z + w$ je $|w|$. Délka úsečky spojující 0 s $z + w$ je menší nebo rovná součtu vzdálenosti mezi body 0 a z a vzdálenosti mezi body z a $z + w$. Odtud plyne nerovnost

$$|z + w| \leq |z| + |w| .$$

Algebraický důkaz je založený na zřejmé rovnosti $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$ a podobně zřejmé nerovnosti $\operatorname{Re} z \leq |z|$, které platí pro jakékoli komplexní číslo z . Potom platí

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} \\ &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2 , \end{aligned}$$

odkud plyne odmocněním dokazovaná nerovnost. \square

Komplexní čísla tvaru $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ mají modul rovný $\sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$. Leží proto na *jednotkové kružnici* – kružnici se středem v počátku a poloměrem 1. Podle Tvrzení 1.9 (body 1. a 5.) platí

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi) = \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi) ,$$

odkud vyplývá následující **Moivreova věta**.

Věta 1.11. *Pro libovolné komplexní číslo $\cos \varphi + i \sin \varphi$ a nezáporné číslo n platí*

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) .$$

Z Moivreovy věty plyne vzorec pro kořeny rovnice $x^n = 1$ neboli pro n -té odmocniny z 1. Na obrázku vidíme geometrické znázornění n -tých odmocnin z 1 pro $n = 4$ a $n = 6$. Jsou to vrcholy čtverce (pro $n = 4$) a pravidelného šestiúhelníka (pro $n = 6$) se středem v počátku, které mají vždy jeden z vrcholů v bodě $z = 1$.

OBRAZEK

Obecně můžeme n -té odmocniny z 1 zapsat ve tvaru

$$z_k = \cos \frac{k 2\pi}{n} + i \sin \frac{k 2\pi}{n}, \quad \text{kde } k = 0, 1, \dots, n - 1 .$$

Vzhledem k různosti argumentů, které jsou všechny z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, jsou čísla $z_0 = 1, z_1, \dots, z_{n-1}$ navzájem různá. Z Moivreovy věty rovněž plyne, že $z_k = (z_1)^k$

pro všechna $k = 0, 1, \dots, n-1$. Všechny n -té odmocniny z 1 jsou tedy mocninami jednoho čísla $z_1 = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$.

Známe-li všechny n -té odmocniny z 1, můžeme pomocí goniometrického tvaru vyjádřit všechny n -té odmocniny z libovolného komplexního čísla $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Ukážeme si to na příkladu druhých odmocnin.

Příklad 1.12. Ukázali jsme si, že \sqrt{i} se rovná buď

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{nebo} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Vyáďříme-li i a \sqrt{i} v goniometrickém tvaru, dostaneme $i = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)$ a

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right).$$

OBRAZEK odmocniny z i

Ještě názornější je goniometrický tvar druhých odmocnin z čísla $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$. Jsou jimi

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad -i = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi \right).$$

Druhé odmocniny z obecného komplexního čísla $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ jsou potom čísla

$$\sqrt{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) \quad \text{a} \quad \sqrt{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right).$$

OBRAZEK obecně φ

Skutečnost, že obě čísla jsou druhými odmocninami z čísla z , snadno ověříme pomocí Moivreovy věty.

Příklad druhých odmocnin ukazuje, jak dostat všechny n -té odmocniny z čísla $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ pro obecné číslo $n \geq 2$. Platí totiž

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r} \sqrt[n]{\cos \varphi + i \sin \varphi} \sqrt[n]{1}.$$

Obecnou n -tou odmocninou z w tak dostaneme jako součin n -té odmocniny z modulu $|w| = r$ s jednou konkrétní n -tou odmocninou z $\cos \varphi + i \sin \varphi$ a obecnou n -tou odmocninou z 1. Podle Moivreovy věty je jednou z n -tých odmocnin z $\cos \varphi + i \sin \varphi$ číslo

$$\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n}.$$

Všechny n -té odmocniny z 1 jsme již pomocí Moivreovy věty našli. Jsou to

$$\cos \frac{k 2\pi}{n} + i \sin \frac{k 2\pi}{n}, \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Vechy n -té odmocniny z $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ se tak rovnají

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + k 2\pi}{n} \right), \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Příklad 1.13. Všechny třetí odmocniny z čísla $-8i = 8(-i) = 8(\cos(3\pi/2) + i \sin(3\pi/2))$ jsou

$$2 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{k 2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{k 2\pi}{3} \right) \quad \text{pro } k = 0, 1, 2.$$

OBRAZEK

Všechny páté odmocniny z čísla $-3 = 3(-1) = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$ se rovnají

$$\sqrt[5]{3} \left(\cos \left(\frac{\pi}{5} + \frac{k 2\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{5} + \frac{k 2\pi}{5} \right) \right) \text{ pro } k = 0, 1, 2, 3, 4 .$$

OBRAZEK

Na závěr této úvodní části uvedeme ještě Eulerovu formuli

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi} ,$$

která vyjadřuje komplexní čísla s absolutní hodnotou 1 jako mocniny tzv. eulerova čísla $e = 2,78\dots$ s čistě imaginárním exponentem. Později, až se dozvíte přesnou definici čísla e , bude možné tuto formulku dokázat. V této chvíli ji budeme brát pouze jako pohodlné označení. S tímto označením můžeme součtové vzorce pro sinus a cosinus vyjádřit jednoduše jako

$$e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\varphi} e^{i\psi}$$

a Moivreovu větu jako

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} ,$$

v obou případech jde o jednoduchá pravidla pro počítání s exponenciální funkcí. A nakonec goniometrický tvar komplexního čísla z můžeme pomocí Eulerovy formule zapsat v podobě

$$z = r e^{i\varphi} .$$

1.3. Teorie čísel. GCD, Bezout, inverzy modulo p , gcd a Bezout pro polynomy

1.4. Zobrazení. Zobrazení $f : A \rightarrow B$ má vždy definiční obor A (ne jak v analýze, nebo úvodním kurzu).

Bijekce právě když má inverz.

Zobrazení je prosté právě když má levý inverz, je na právě když má pravý inverz.

Cvičení

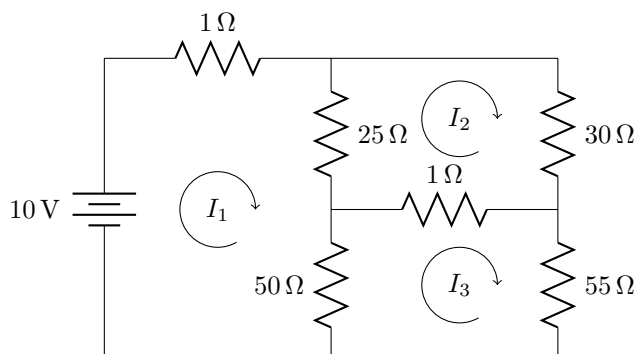
1. Předpokládejme, že $f : A \rightarrow B$ je bijekce a $g : B \rightarrow A$ je zobrazení zprava inverzní k f . Dokažte, že g je bijekce (a tím pádem $g = f^{-1}$).

2. ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC

Cíl. Naučíme se řešit soustavy lineárních rovnic Gaussovou eliminační metodou.

2.1. Aplikace.

Na řešení soustavy lineárních rovnic vede celá řada praktických i teoretických úloh. Pro ilustraci uvedeme čtyři příklady.



OBRÁZEK 1. Elektrický obvod z části 2.1.1

2.1.1. *Elektrické obvody.* U elektrického obvodu na obrázku chceme určit proudy protékající jednotlivými větvemi.

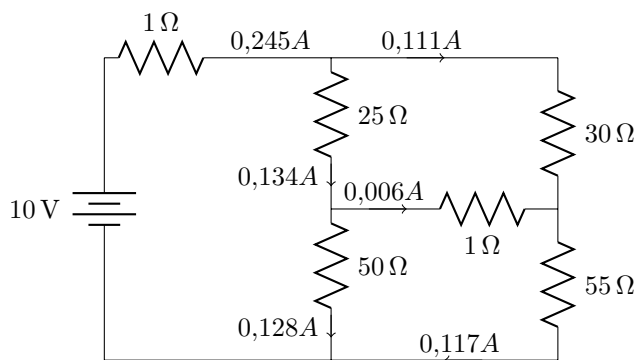
Použijeme metodu smyček. Proudů protékající jednotlivými elementárními smyčkami jsou označeny I_1, I_2, I_3 podle obrázku. Aplikací druhého Kirchhoffova zákona získáme pro každou smyčku jednu rovnici:

$$1I_1 + 25(I_1 - I_2) + 50(I_1 - I_3) = 10$$

$$25(I_2 - I_1) + 30I_2 + 1(I_2 - I_3) = 0$$

$$50(I_3 - I_1) + 1(I_3 - I_2) + 55I_3 = 0$$

Zjednodušením dostaneme soustavu třech lineárních rovnic o třech neznámých, která má právě jedno řešení $(I_1, I_2, I_3) = (0,245, 0,111, 0,117)$. Z toho dopočteme proudy pro jednotlivé větve.

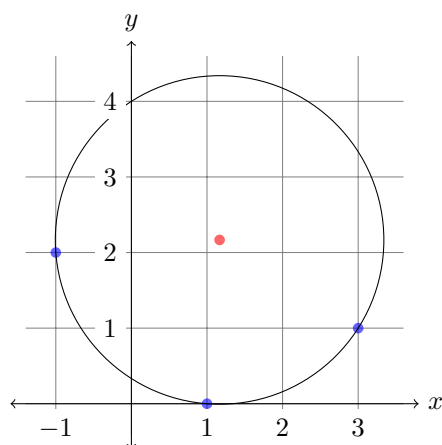


OBRÁZEK 2. Proudů v elektrickém obvodu z části 2.1.1

2.1.2. *Prokládání kružnice danými body.* Chceme najít kružnici v rovině procházející body $(1, 0)$, $(-1, 2)$, $(3, 1)$. (Například víme, že se nějaký objekt pohybuje po kruhové dráze, máme změřeny tři polohy a chceme určit střed obíhání.)

Rovnice kružnice v rovině má tvar

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$



OBRÁZEK 3. Kružnice procházející danými třemi body

Dosazením daných třech bodů získáme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 1 + a + c &= 0, \\ 5 - a + 2b + c &= 0, \\ 10 + 3a + b + c &= 0. \end{aligned}$$

Soustava má právě jedno řešení $(a, b, c) = (-7/3, -13/3, 4/3)$, takže hledaná kružnice má rovnici

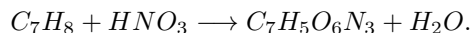
$$x^2 + y^2 - \frac{7}{3}x - \frac{13}{3}y + \frac{4}{3} = 0.$$

Chceme-li znát střed a poloměr, rovnici můžeme upravit na tvar

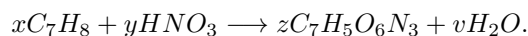
$$\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{6}\right)^2 = \frac{85}{18},$$

z kterého vidíme, že hledaná kružnice má střed $(7/6, 13/6)$ a poloměr $\sqrt{85/18}$.

2.1.3. *Vyčíslování chemické rovnice.* Uvažujme chemickou reakci toluenu a kyseliny dusičné, při které vzniká TNT a voda:



Vyčíslení chemické rovnice znamená nalezení poměrů jednotlivých molekul, aby počet atomů každého prvku byl na obou stranách stejný.

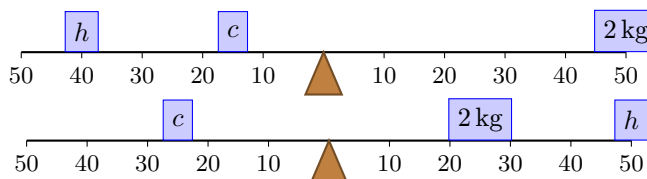


Chceme tedy najít hodnoty x, y, z, v , které splňují soustavu rovnic To vede na rovnice

$$\begin{aligned} 7x &= 7z, \\ 8x + y &= 5z + 2v, \\ y &= 3z, \\ 3y &= 6z + w. \end{aligned}$$

Vzhledem k výbušné povaze tohoto příkladu nebudeme na tomto místě raději uvádět řešení.

2.1.4. *Neznámá závaží.* Máme tři závaží. První váží 2 kg , ale hmotnost dalších dvou bohužel neznáme. Podařilo se nám však najít dvě rovnovážné polohy:



OBRÁZEK 4. Neznámá závaží

Z těchto informací můžeme hmotnosti určit. Provnáním momentů totiž dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 40h + 15c &= 50 \cdot 2 \\ 25c &= 25 \cdot 2 + 50h, \end{aligned}$$

kteřou snadno vyřešíme.

2.2. **Geometrická interpretace, řádkový pohled.** Jedno řešení soustavy lineárních rovnic o n neznámých budeme zapisovat jako uspořádanou n -tici čísel. To předpokládá nějaké pevné uspořádání neznámých. Z kontextu bude toto uspořádání zřejmé, neznámé jsou většinou značeny x_1, \dots, x_n . Uspořádanou n -tici čísel nazýváme *n -složkový aritmetický vektor*:

Definice 2.1. *Aritmetickým vektorem nad \mathbb{R} s n složkami* rozumíme uspořádanou n -tici reálných čísel.

V této kapitole budeme často místo „aritmetický vektor nad \mathbb{R} “ říkat pouze „aritmetický vektor“, nebo jen „vektor“, protože jiné druhy vektorů zatím nebudeme používat.

Vektory budeme psát sloupcově, například

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -33 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Pro úsporu místa vektor často napíšeme řádkově a přidáme exponent T , například

$$\mathbf{v} = (1, -33, 5)^T.$$

Znak T bude zaveden v kapitole 4 obecněji pro transponování matic.

Aritmetické vektory si pro $n = 2$ (resp. $n = 3$) můžeme představovat jako šipky v rovině (resp. prostoru) s danou velikostí a směrem, pokud máme v rovině nebo prostoru zvolený souřadný systém.

OBRÁZEK

Každému bodu roviny o souřadnicích $[a, b]$ přiřadíme jeho *polohový vektor*, což je vektor vedoucí z počátku souřadnic do bodu $[a, b]$. Je to vektor $(a, b)^T$. Naopak, každý dvousložkový vektor $(u, v)^T$ je polohovým vektorem bodu o souřadnicích $[u, v]$. Takto můžeme množinu všech řešení soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých (tj. množinu dvousložkových vektorů) popsat nebo geometricky znázornit

jako množinu bodů v rovině. A naopak množinu bodů v rovině můžeme vyjádřit jako množinu jejich polohových vektorů. Podobně můžeme znázornit třísloužkový vektor $(a, b, c)^T$ jako polohový vektor bodu o souřadnicích $[a, b, c]$ v prostoru.

2.2.1. Jedna rovnice o dvou neznámých. Množinou řešení rovnice $a_1x_1 + a_2x_2 = b_1$, kde $a_1, a_2, b_1 \in \mathbb{R}$ jsou zvolená čísla a x_1, x_2 jsou neznámé, je přímka v rovině, kromě triviálního případu, že $a_1 = a_2 = 0$, kdy je množinou řešení buď celá rovina (v případě $b_1 = 0$) nebo prázdná množina (v případě $b_1 \neq 0$). Kolmostí a skalárním součinem se budeme detailněji zabývat v kapitole 8, teď jen připomeňme, že $(a_1, a_2)^T$ je normálový vektor této přímky, tj. vektor kolmý na její směr.

OBRAZEK

Každá přímka může být také vyjádřena parametricky. K tomu připomeneme operace sčítání vektorů a násobení vektorů reálným číslem.

Definice 2.2. Jsou-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ dva n -složkové aritmetické vektory nad \mathbb{R} , pak jejich součtem rozumíme aritmetický vektor

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}.$$

Je-li $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ aritmetický vektor nad \mathbb{R} a $t \in \mathbb{R}$ reálné číslo, pak t -násobkem vektoru \mathbf{u} rozumíme vektor

$$t \cdot \mathbf{u} = t\mathbf{u} = \begin{pmatrix} tu_1 \\ tu_2 \\ \vdots \\ tu_n \end{pmatrix}.$$

Pro dva n -složkové vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} definujeme

$$-\mathbf{u} = (-1) \cdot \mathbf{u} \quad \text{a} \quad \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}).$$

OBRAZEK

Příklad 2.3.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Parametrické vyjádření přímky v rovině je zápis tvaru

$$\{\mathbf{u} + t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\},$$

kde \mathbf{u} a \mathbf{v} jsou 2-složkové vektory. Vektor \mathbf{u} je polohovým vektorem nějakého bodu přímky a vektor \mathbf{v} určuje její směr.

OBRAZEK

V prostoru má parametrické vyjádření přímky stejný tvar, jenom vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} mají tři složky.

2.2.2. *Více rovnic o dvou neznámých.* Uvažujme libovolnou soustavu lineárních rovnic o dvou neznámých x_1, x_2 . Každá (netriviální) rovnice určuje přímku v rovině a my se snažíme najít dvojice $(x_1, x_2)^T$, které vyhovují všem rovnicím. Řešením je tedy průnik přímek daných našimi rovnicemi. Z toho je intuitivně jasné jak může vypadat množina všech řešení:

- Celá rovina. To se stane v případě, že všechny rovnice mají triviální tvar $0x_1 + 0x_2 = 0$.
- Přímka. To se stane v případě, že všechny (netriviální) rovnice popisují tutéž přímku, neboli všechny rovnice jsou násobkem jedné z rovnic.
- Bod. Nastane v případě, že soustavy popisují alespoň dvě různé přímky a všechny tyto přímky procházejí jedním bodem.

OBRAZEK

- Prázdná množina. Nastane v případě, že dvě rovnice určují rovnoběžné přímky, nebo rovnice určují tři přímky neprocházející jedním bodem, nebo jedna z rovnic je triviálně nespílitelná, například $0x_1 + 0x_2 = 123$.

OBRAZEK

2.2.3. *Tři neznámé.* Množina řešení jedné lineární rovnice o třech neznámých tvaru $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ geometricky odpovídá rovině v \mathbb{R}^3 , kromě triviálního případu $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Vektor $(a_1, a_2, a_3)^T$ je normálovým vektorem roviny. Parametricky lze rovinu zapsat ve tvaru

$$\{\mathbf{u} + s\mathbf{v} + t\mathbf{w} : s, t \in \mathbb{R}\},$$

kde \mathbf{u} je polohový vektor nějakého bodu roviny a \mathbf{v}, \mathbf{w} jsou vhodné (3-složkové) vektory určující směr roviny.

OBRAZEK

Řešíme-li tedy soustavu lineárních rovnic o třech neznámých, hledáme průnik rovin. Řešením může být:

- Celý prostor. To nastane v triviálním případě.
- Rovina.
- Přímka. OBRAZEK
- Bod. OBRAZEK
- Prázdná množina. OBRAZEK

2.2.4. *Více než tři neznámé.* Pro více proměnných je vizuální představa obtížná, ne-li nemožná. Stále ale platí, že jedna netriviální rovnice určuje „rovný útvar“ s dimenzí o jedna menší než je počet neznámých, tzv. *nadrovinu*. (Dimenzi sice budeme definovat později, ale pro malé dimenze definice souhlasí s intuicí.) Řešení soustavy pak lze chápat jako hledání průniku nadrovin. Výsledkem bude „rovný útvar“ nějaké dimenze (bod, přímka, rovina, ...).

2.3. **Příklady.** Řešíme-li ručně soustavu o několika málo rovnicích a málo neznámých postupujeme obvykle tak, že postupně eliminujeme neznámé.

2.3.1. *Soustava s jedním řešením.* Začneme s přímočarým příkladem soustavy třech rovnic o třech neznámých x_1, x_2, x_3 .

$$2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0$$

$$3x_1 + 5x_2 + 18x_3 = 33$$

$$2x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 16$$

Principem eliminační metody je převést soustavu ekvivalentními úpravami (tj. úpravami, které nemění množinu řešení) do tvaru, ze kterého se řešení snadno dopočítá. Ekvivalentními úpravami jsou například prohození dvou rovnic, vynásobení některé rovnice nenulovým číslem a přičtení několikanásobku jedné rovnice k jiné. Tvar, o který se snažíme, je tzv. *odstupňovaný tvar*. Přesně bude definován později, ale principem je, že v každé další rovnici je na začátku více nulových koeficientů.

Nejprve docílíme toho, že ve všech rovnicích kromě první bude nulový koeficient u x_1 . Tomuto procesu se také říká eliminace neznámé x_1 . Můžeme to udělat tak, že z jedné rovnice vyjádříme neznámou x_1 pomocí ostatních neznámých, výsledek dosadíme do zbývajících rovnic a upravíme je. Stejného efektu docílíme také tak, že přičteme vhodné násobky vhodné rovnice (rovnice s nenulovým koeficientem u x_1) k ostatním tak, aby z ostatních rovnic neznámá x_1 „zmizela“, tj. měla v nich nulový koeficient. V našem případě bychom mohli $(-3/2)$ -násobek první rovnice přičíst k druhé a (-1) -násobek první rovnice přičíst ke třetí. Aby nám však vycházely hezčí koeficienty, vynásobíme třetí rovnici jednou polovinou a prohodíme ji s první rovnicí.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 8 \\3x_1 + 5x_2 + 18x_3 &= 33 \\2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 0\end{aligned}$$

Jsme připraveni k eliminaci proměnné x_1 : přičteme (-3) -násobek první rovnice ke druhé a (-2) -násobek první rovnice ke třetí.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 8 \\-x_2 + 3x_3 &= 9 \\+2x_2 - 5x_3 &= -16\end{aligned}$$

Po eliminaci jedné neznámé již první rovnicí nebudeme měnit a budeme se zabývat pouze zbylými rovnicemi. V našem případě již zbývají pouze dvě a k eliminaci neznámé x_2 stačí přičíst 2-násobek druhé rovnice ke třetí.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 8 \\-x_2 + 3x_3 &= 9 \\x_3 &= 2\end{aligned}$$

Nyní již můžeme dopočítat řešení tzv. *zpětnou substitucí*, kdy postupujeme od poslední rovnice k první a postupně dosazováním získáváme hodnoty neznámých. V našem případě dostáváme $x_3 = 2$, $x_2 = -3$, $x_1 = 4$. Původní soustava má právě jedno řešení, a to aritmetický vektor $(4, -3, 2)^T$.

Při řešení soustavy jsme mohli samozřejmě začít eliminací libovolné proměnné, také nebylo nutné třetí rovnici přehazovat s první a násobit ji napřed jednou polovinou.

Pře řešení velkých soustav tisíců rovnic o tisících neznámých potřebujeme jednotlivé kroky eliminace nějak uspořádat tak, aby je bylo možné použít kdykoliv a bez ohledu na to, jaké jsou koeficienty soustavy. Tomuto postupu se říká *Gaussova eliminační metoda* nebo zkráceně *Gaussova eliminace*.

2.3.2. Maticový zápis. K formulaci Gaussovy eliminace a také pro zkrácení zápisu budeme místo soustavy psát její *rozšířenou matici*. Nejprve zavedeme pojem matice:

Definice 2.4. *Maticí* (nad \mathbb{R}) typu $m \times n$ rozumíme obdélníkové schéma reálných čísel s m řádky a n sloupci.

Zápis $A = (a_{ij})_{m \times n}$ znamená, že A je matice typu $m \times n$, která má na pozici (i, j) (tedy v i -tém řádku a j -tém sloupci) číslo a_{ij} .

Pozor na pořadí indexů – první číslo označuje řádek, druhé sloupec.

Definice 2.5. *Maticí soustavy*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

rozumíme matici

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vektor *pravých stran* je vektor $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ a *rozšířená matice soustavy* je matice

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Rozšířená matice soustavy tedy vznikne tak, že do i -tého řádku zapíšeme koeficienty v i -té rovnici u proměnných x_1, \dots, x_n a nakonec napíšeme pravou stranu. Pro přehlednost se pravé strany oddělují svislou čarou. Rozšířená matice se tímto rozdělí na dva bloky. V levém je matice soustavy a v pravém je sloupec pravých stran.

Pro soustavu rovnic z předchozího příkladu

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 18x_3 &= 33 \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 &= 16 \end{aligned}$$

jsou její matice, sloupec pravých stran a rozšířená matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 18 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 33 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad (A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 18 & 33 \\ 2 & 4 & 10 & 16 \end{array} \right).$$

Prohození dvou rovnic se v rozšířené matici projeví prohozením dvou řádků, vynásobení i -té rovnice číslem t odpovídá vynásobení i -tého řádku matice číslem t a podobně přičtení t -násobku i -té rovnice k j -té se projeví odpovídá přičtení t -násobku i -tého řádku k j -tému. Pro vyznačení, že rozšířená matice vznikla z předchozí ekvivalentní úpravou používáme symbol \sim . Úpravy provedené u naší soustavy tedy

zapišeme takto:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 18 & 33 \\ 2 & 4 & 10 & 16 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 18 & 33 \\ 2 & 6 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & -5 & -16 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Zápis úprav se tímto značně zkrátí a zpřehlední.

Místo „soustava rovnic s rozšířenou maticí $(A \mid \mathbf{b})$ “ budeme někdy stručně říkat „soustava $(A \mid \mathbf{b})$ “.

Poznamenejme ještě, že užitím násobení matic z kapitoly 4 lze řešení soustavy rovnic s rozšířenou maticí $(A \mid \mathbf{b})$ zapsat jako hledání všech vektorů \mathbf{x} takových, že $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Maticový popis se hodí nejen ke zkrácení a zpřehlednění, je výhodnější i pro teoretické úvahy. Po zavedení všech pojmů již vlastně jiný zápis ani nebudeme používat.

2.3.3. Jeden parametr. Podívejme se na příklad soustavy rovnic o třech neznámých, kdy řešením je přímka. Používáme rovnou maticový zápis.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 5 & 15 \\ 2 & 8 & 3 & 16 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

V první úpravě jsme přičetli (-1) -násobek prvního řádku k druhému a (-2) -násobek prvního řádku k třetímu. V druhé úpravě jsme $(3/2)$ -násobek druhého řádku přičetli k třetímu. Nakonec jsme jen vynechali poslední řádek, který odpovídá rovnici $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$, která množinu řešení nemění. Vzniklá soustava rovnic je v nematicovém zápisu

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Z poslední rovnice umíme spočítat $x_3 = 2$ a z první rovnice x_1 , známe-li ovšem x_2 . Neznámou x_2 lze volit libovolně a budeme jí říkat *parametr*. Parametr označíme $t = x_2$ a vyjde $x_1 = 5 - 4t$. Množina všech řešení je tedy

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 - 4t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

V našem konkrétním případě lze za parametr zvolit také neznámou $x_1 = s$, dopočítat $x_2 = 5/4 - s/4$ a získat množinu řešení ve tvaru $\{(s, 5/4 - s/4, 2)^T : s \in \mathbb{R}\}$. Nevýhodou této volby je, že by nefungovala, pokud by byl koeficient u x_2 v první rovnici roven nule. Volba parametrů, která funguje vždy bude diskutována u následujícího příkladu a pak v plné obecnosti v části 2.4.

Vraťme se ale k množině řešení $\{(5 - 4t, t, 2)^T : t \in \mathbb{R}\}$. Vektor $(5 - 4t, t, 2)^T$ lze pomocí sčítání a násobení skalárem vyjádřit také jako

$$\begin{pmatrix} 5 - 4t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 4t \\ 0 + t \\ 2 + 0t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4t \\ t \\ 0t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Takže množinu všech řešení lze napsat ve tvaru

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tento tvar je lepší než předchozí. Vidíme z něj totiž, že řešením je přímka procházející bodem $(5, 0, 2)^T$ se směrovým vektorem $(-4, 1, 0)^T$.

Uvedený postup na hledání řešení soustavy nebudeme používat. Vektory $(5, 0, 2)^T$ a $(-4, 1, 0)^T$ lze totiž spočítat jednodušším způsobem, který teď popíšeme. Budeme potřebovat pojem *homogenní soustava rovnic*:

Definice 2.6. Soustava rovnic se nazývá *homogenní*, pokud všechny pravé strany jsou rovny nule.

Máme-li soustavu rovnic s rozšířenou maticí $(A \mid \mathbf{b})$, pak *příslušnou homogenní soustavou* rozumíme homogenní soustavu s maticí $(A \mid \mathbf{o})$, kde $\mathbf{o} = (0, 0, \dots, 0)^T$ je *nulový vektor*.

Vraťme se ke tvaru rovnic po úpravách, čili

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \quad \text{neboli} \quad \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 11 \\ 2x_3 = 4 \end{array}$$

Začneme určením parametrů. Je jeden, totiž neznámá x_2 (více k tomuto tématu níže). Množinu řešení budeme hledat ve tvaru $\{\mathbf{u} + t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\}$. Vektor \mathbf{u} určíme jako libovolné (tzv. *partikulární*) řešení soustavy. Většinou bývá nejjednodušší zvolit za parametr(y) nulu a zpětnou substitucí dopočítat zbylé proměnné. Vektor \mathbf{v} je řešení **příslušné homogenní soustavy** při volbě parametru $t = 1$, spočítáme jej opět zpětnou substitucí. Prakticky můžeme postupovat tak, že napíšeme množinu všech řešení s doplněnými zvolenými parametry

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ \cdot \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \cdot \\ 1 \\ \cdot \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

a na prázdná místa doplňujeme odzadu zpětnou substitucí dopočtené hodnoty.

Pozor na nejčastější chybu, totiž že při počítání druhého vektoru zapomeneme vynulovat pravou stranu!

V našem případě dostaneme množinu řešení

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vyšel nám stejný tvar výsledku jako předchozím postupem (není to náhoda). Nová metoda je daleko přehlednější a rychlejší, zejména máme-li větší soustavu.

Zbývá si ujasnit, že nalezená množina $S = \{(5, 0, 2)^T + t(-4, 1, 0)^T : t \in \mathbb{R}\}$ je skutečně rovná množině všech řešení soustavy (aniž bychom porovnávali výsledek ze starším postupem). Skutečnost, že každý prvek množiny S je řešením původní

soustavy si snadno ověříme tak, že pro libovolnou hodnotu parametru t dosadíme příslušný vektor $(5, 0, 2)^T + t(-4, 1, 0)^T \in S$ do všech rovnic původní soustavy a ověříme, že nám vždy vyjde vektor pravých stran $(11, 4, -6)^T$. Jako kdybychom dělali zkoušku.

Původní soustava má stejnou množinu řešení jako soustava

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 2x_3 &= 4, \end{aligned}$$

protože jsme od jedné k druhé přešli pouze pomocí ekvivalentních úprav, které nemění množinu všech řešení soustavy. Z poslední soustavy je vidět, že libovolná volba parametru t jako hodnoty x_2 jednoznačně určuje hodnoty zbývajících dvou neznámých x_3 (ta dokonce na volbě t nezávisí) a x_1 . Existuje tedy právě jedno řešení původní soustavy, pro které platí $x_2 = t$.

Také v množině S existuje právě jeden vektor, jehož druhá složka se rovná t , a to vektor

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 4t \\ t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

O žádné řešení původní soustavy jsme vyjádřením množiny všech řešení jako množiny S tedy nepřišli.

2.3.4. Více parametrů. Podíváme se na soustavu s více parametry, ze které již snad bude vidět obecný postup. Soustava bude mít pět neznámých x_1, \dots, x_5 , takže vizuální představa je stěží možná.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array} \right) \sim \\ &\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

V první úpravě jsme prohodili řádky, aby byl na prvním místě v prvním řádku nenulový prvek. V druhé úpravě jsme (-2) -násobek prvního řádku přičetli ke druhému. Ve třetí úpravě jsme (-1) -násobek druhého řádku přičetli ke třetímu.

Soustava je teď v odstupňovaném tvaru. K volbě parametrů nejprve určíme *pivoty*, to jsou první nenulové prvky v každém řádku. Proměnné odpovídající sloupcům s pivotem se nazývají *bázové proměnné*. V našem případě jsou jimi x_1 a x_3 . Zbývající proměnné jsou tzv. *volné proměnné*, v našem případě x_2, x_4, x_5 . Volným proměnným také říkáme *parametry*. Protože máme tři volné proměnné, množina všech řešení bude tvaru

$$\{\mathbf{u} + t_2\mathbf{v}_2 + t_4\mathbf{v}_4 + t_5\mathbf{v}_5 : t_2, t_4, t_5 \in \mathbb{R}\}.$$

Vektor \mathbf{u} (partikulární řešení) najdeme jako libovolné řešení soustavy, nejjednodušší bude zvolit za volné proměnné nuly. Vektory $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ budou řešení příslušné homogenní soustavy. Vektor \mathbf{v}_2 získáme volbou volných proměnných $(x_2, x_4, x_5) = (1, 0, 0)$, vektor \mathbf{v}_4 volbou $(x_2, x_4, x_5) = (0, 1, 0)$ a vektor \mathbf{v}_5 volbou $(x_2, x_4, x_5) =$

$(0, 0, 1)$. Množinu všech řešení tedy hledáme ve tvaru

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_5 \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t_2, t_4, t_5 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Každý ze čtyřech vektorů dopočítáme zpětnou substitucí. Vyjde

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_5 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t_2, t_4, t_5 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Ověření, že nalezená množina je množinou všech řešení dané soustavy, by bylo obdobné jako u předchozího příkladu. V prvním kroku bychom zkouškou ověřili, že každý vektor z množiny S je skutečně řešením původní soustavy. V druhé části bychom ukázali, že pro libovolnou volbu hodnot volných proměnných $x_2 = w_2, x_4 = w_4$ a $x_5 = w_5$ eistuje právě jedno řešení $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_5)^T$ původní soustavy a současně že existuje v S vektor, jenž se s \mathbf{w} shoduje na druhé, čtvrté a páté složce, totiž vektor $\mathbf{u} + w_2\mathbf{v}_2 + w_4\mathbf{v}_4 + w_5\mathbf{v}_5$. Proto byly hodnoty volných proměnných při výpočtu vektorů $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4$ a \mathbf{v}_5 voleny uvedeným způsobem.

Při výpočtu na papíře je vhodné nalezené vektory zkontrolovat dosazením **do původních rovnic**.

2.4. Řešení obecné soustavy rovnic Gaussovou eliminací. Nyní představíme metodu řešení soustav lineárních rovnic ukázanou na předchozích příkladech v obecném případě.

2.4.1. *Odstupňovaný tvar.*

Definice 2.7. *Ekvivalentní úpravou* soustavy lineárních rovnic rozumíme úpravu, která nemění množinu všech řešení.

Při řešení soustav lineárních rovnic vystačíme s jednoduchými úpravami tří typů. Úpravy ve skutečnosti provádíme s řádky rozšířené matice soustavy, proto jim říkáme *elementární řádkové úpravy*.

Definice 2.8. *Elementárními řádkovými úpravami* soustavy lineárních rovnic (resp. její rozšířené matice) rozumíme následující tři typy úprav.

- (i) prohození dvou rovnic (resp. řádků matice),
- (ii) vynásobení jedné z rovnic (resp. jednoho z řádků) nenulovým číslem,
- (iii) přičtení několikanásobku jedné rovnice (resp. jednoho řádku) k jiné rovnici (resp. k jinému řádku).

Tyto úpravy skutečně nemění množinu řešení:

Tvrzení 2.9. *Každá elementární řádková úprava soustavy lineárních rovnic je ekvivalentní úpravou.*

Důkaz. Označme S resp. T množinu všech řešení původní resp. nové soustavy. Je zřejmé, že každé řešení původní soustavy je řešením nové soustavy, neboli platí $S \subseteq T$. K důkazu opačné inkluze si stačí uvědomit, že lze efekt elementárních

řádkových úprav vrátit, tj. z nové soustavy jde dostat původní rovněž vhodnými elementárními řádkovými úpravami. V případě (i) prohodíme stejné řádky, v případě (ii) vynásobíme stejnou rovnici inverzním číslem, a přičtení t -násobku i -tého řádku k j -tému lze vrátit přičtením $(-t)$ -násobku i -tého řádku k j -tému. \square

Úpravu (i), tedy prohození dvou rovnic, lze docílit posloupností zbylých dvou úprav, viz cvičení.

Gaussova eliminační metoda na řešení soustav lineárních rovnic je založená na převodu soustavy na řádkově odstupňovaný tvar.

Definice 2.10. Matice $C = (c_{ij})_{m \times n}$ je v *řádkově odstupňovaném tvaru*, pokud existuje celé číslo $r \in \{0, 1, \dots, m\}$ takové, že řádky $r + 1, \dots, m$ jsou nulové, řádky $1, \dots, r$ jsou nenulové, a platí $k_1 < k_2 < \dots < k_r$, kde k_i značí sloupec, ve kterém je první nenulové číslo v i -tém řádku (tedy platí $c_{i1} = c_{i2} = \dots = c_{i,k_i-1} = 0$ a $c_{i,k_i} \neq 0$; ještě jinak, $k_i = \min\{l : c_{il} \neq 0\}$).

Prvkům c_{i,k_i} , $i = 1, 2, \dots, r$ říkáme *pivoty*.

Soustava lineárních rovnic je v *řádkově odstupňovaném tvaru*, pokud její rozšířená matice je v řádkově odstupňovaném tvaru.

Jinak řečeno, nenulové řádky jsou v horní části matice (jejich počet je v definici označen r) a v každém nenulovém řádku (kromě prvního) je na začátku více nul než v předchozím.

OBRAZEK

Příklad 2.11. Matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

jsou v odstupňovaném tvaru. Matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

v odstupňovaném tvaru nejsou.

Gaussova eliminace převede každou soustavu lineárních rovnic do odstupňovaného tvaru posloupností elementárních řádkových úprav. Algoritmus budeme raději předvádět na rozšířené matici soustavy. Nechť $C = (A \mid \mathbf{b})$ je rozšířená matice soustavy m rovnic o n neznámých, $C = (c_{ij})$.

Eliminace jednoho sloupce (jedné proměnné) proběhne následovně.

1. Najdeme první sloupec k , který není celý nulový. Pokud takový neexistuje, jsme hotovi.
2. Pokud je $c_{1k} = 0$, prohodíme první řádek s libovolným řádkem i , pro který je $c_{ik} \neq 0$.
3. Pro každé $i = 2, 3, \dots, m$ přičteme $(-c_{ik}/c_{1k})$ -násobek prvního řádku k i -tému řádku.

(Všimněte si, že po provedení kroku 2 máme $c_{1k} \neq 0$ a po provedení kroku 3 máme $c_{2k} = c_{3k} = \dots = c_{mk} = 0$.) Dále postupujeme tak, jako bychom eliminovali matici bez prvního řádku. V dalším kroku tedy najdeme první sloupec l , pro který je

alespoň jedno z čísel c_{2l}, \dots, c_{ml} nenulové, řekněme $c_{il} \neq 0, i \geq 2$. Prohodíme druhý a i -tý řádek a pak pro každé $i = 3, 4, \dots, m$ přičteme $(-c_{il}/c_{2l})$ -násobek prvního řádku k i -tému řádku. Gaussova eliminace končí buď v bodě 1, nebo ve chvíli, kdy dojdou řádky. To je i případ, kdy má matice C pouze jeden nenulový řádek.

Náš popis Gaussovy eliminace není algoritmus, protože nepředepisuje, který řádek prohodíme s prvním řádkem v kroku 2. Různé implementace Gaussovy eliminace to řeší různým způsobem, proto žádný konkrétní způsob nepředepisujeme. Více o tom v části 2.6 o numerické stabilitě.

Věta 2.12. *Gaussova eliminace převede každou soustavu lineárních rovnic do odstupňovaného tvaru.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle počtu rovnic, tj. podle m . Předpokládejme tedy, že věta platí, pokud má soustava méně než m rovnic, a vezměme soustavu s m rovnicemi. Pokud tvoří rozšířenou matici soustavy samé nuly, pak se eliminace zastaví v bodě 1. a věta platí, protože nulová matice je v odstupňovaném tvaru. Předpokládejme tedy, že tomu tak není.

Nechť k je index prvního nenulového sloupce v rozšířené matici soustavy. Označme B rozšířenou matici soustavy po provedení eliminace jednoho sloupce, tj. po eliminaci proměnné x_k .

OBRAZEK PO PRVNÍM CYKLU GE

Z matice B vynecháme první řádek a na matici se zbylými $m - 1$ řádky provedeme Gaussovu eliminaci. Podle indukčního předpokladu dostaneme matici C v odstupňovaném tvaru. První nenulový sloupec v matici C má index $l > k$, neboť první nenulový sloupec v celé rozšířené matici soustavy měl index k a všechny prvky v k -tém sloupci matice B pod nenulovým prvkem v prvním řádku jsou nulové. Vrátime-li do matice C nahoru první řádek matice B dostaneme tak opět matici v odstupňovaném tvaru.

OBRAZEK PO GE CELE MATICE.

Tato matice je výsledkem Gaussovy eliminace na rozšířenou matici původní soustavy. \square

2.4.2. Dupočítání řešení. Mějme nyní soustavu m lineárních rovnic o n neznámých x_1, \dots, x_n s rozšířenou maticí $C = (A \mid \mathbf{b})$ v odstupňovaném tvaru. Nechť r, k_1, \dots, k_r jsou čísla z definice 2.10, tj. číslo r udává počet nenulových řádků a čísla k_1, \dots, k_r pozice pivotů.

Pokud $k_r = n + 1$, jinými slovy, pokud poslední nenulový řádek rozšířené matice soustavy je tvaru $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid b_r)$, kde $b_r \neq 0$, pak soustava $(A \mid \mathbf{b})$ nemá žádné řešení: tato rovnice říká $0x_1 + 0x_2 + \dots, 0x_n = b_r \neq 0$, což zřejmě nejde.

Předpokládejme nyní, že $k_r < n + 1$. Ukážeme, že soustava $(A \mid \mathbf{b})$ má alespoň jedno řešení, a ukážeme, jak všechna řešení popsat.

Označme P množinu indexů těch sloupců od 1 do n , které neobsahují pivot, tj.

$$P = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k_1, \dots, k_r\} .$$

Množina P může být i prázdná, pokud každý sloupec obsahuje pivot. Proměnným $x_p, p \in P$, říkáme volné proměnné (nebo též parametry). Ostatní proměnné, tj. proměnné $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$ jsou bázové.

Nyní nahlédneme, že každá volba hodnot volných proměnných dává právě jedno řešení soustavy $(A \mid \mathbf{b})$. Soustava je po provedení Gaussovy eliminace ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{1,k_1}x_{k_1} + a_{1,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,k_2}x_{k_2} + a_{2,k_2+1}x_{k_2+1} + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{r,k_r}x_{k_r} + a_{r,k_r+1}x_{k_r+1} + \cdots + a_{r,n}x_n &= b_r, \end{aligned}$$

což je ekvivalentní soustavě rovnic

$$\begin{aligned} x_{k_1} &= a_{1,k_1}^{-1} (b_1 - a_{1,k_1+1}x_{k_1+1} - \cdots - a_{1,n}x_n) \\ x_{k_2} &= a_{2,k_2}^{-1} (b_2 - a_{2,k_2+1}x_{k_2+1} - \cdots - a_{2,n}x_n) \\ &\vdots \\ x_{k_r} &= a_{r,k_r}^{-1} (b_r - a_{r,k_r+1}x_{k_r+1} - \cdots - a_{r,n}x_n). \end{aligned}$$

Poslední rovnice jednoznačně určuje x_{k_r} , předposlední rovnice jednoznačně určuje $x_{k_{r-1}}$, atd. Tomuto dopočítávání hodnot říkáme *zpětná substituce*. Stejnou úvahu lze provést pro libovolný vektor pravých stran \mathbf{c} . Dokázali jsme následující pozorování.

Pozorování 2.13. *Pro libovolný vektor pravých stran \mathbf{c} a libovolná reálná čísla $x_p \in \mathbb{R}$, $p \in P$, existují jednoznačně určená reálná čísla $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r} \in \mathbb{R}$ taková, že aritmetický vektor (x_1, x_2, \dots, x_n) je řešením soustavy $(A \mid \mathbf{c})$.*

Jsme připraveni najít množinu všech řešení. Použijeme k tomu zpětnou substituci a vhodné volby volných proměnných. Nejdříve najdeme řešení \mathbf{u} soustavy $(A \mid \mathbf{b})$ tak, že položíme hodnoty všech volných proměnných rovné 0. Poté pro každé $p \in P$ najdeme opět zpětnou substituci řešení \mathbf{v}_p příslušné homogenní soustavy (tj. soustavy $(A \mid \mathbf{0})$), pro které zvolíme hodnotu volné proměnné $x_p = 1$ a všechny ostatní hodnoty volných proměnných položíme rovné 0. Podobně jako v částech 2.3.3 a 2.3.4 ověříme, že množinu všech řešení soustavy $(A \mid \mathbf{b})$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$S = \left\{ \mathbf{u} + \sum_{p \in P} t_p \mathbf{v}_p : (\forall p \in P) t_p \in \mathbb{R} \right\}.$$

Platí tedy věta

Věta 2.14. *Množina všech řešení soustavy $(A \mid \mathbf{b})$ je rovná množině*

$$S = \left\{ \mathbf{u} + \sum_{p \in P} t_p \mathbf{v}_p : (\forall p \in P) t_p \in \mathbb{R} \right\}.$$

V kapitole ?? si ukážeme elegantnější důkaz polední věty.

2.4.3. Shrnutí. Obecnou soustavu lineárních rovnic o n neznámých lze vyřešit následujícím postupem.

1. Gaussovou eliminací převedeme soustavu na ekvivalentní soustavu v odstupňovaném tvaru.
2. Rozhodneme, zda soustava má řešení. Pokud ne, tj. pokud existuje rovnice typu $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b \neq 0$, skončíme s tím, že soustava je neřešitelná.

3. Určíme volné proměnné (parametry) – proměnné odpovídající sloupcům, kde nejsou pivoty. Množinu indexů těchto sloupců označíme P .
4. Množina všech řešení je

$$\left\{ \mathbf{u} + \sum_{p \in P} t_p \mathbf{v}_p : (\forall p \in P) t_p \in \mathbb{R} \right\},$$

kde \mathbf{u} je libovolné řešení soustavy a \mathbf{v}_p je řešení příslušné homogenní soustavy, kde za parametr odpovídající sloupci p volíme 1 a za zbylé parametry volíme 0. Každý z vektorů spočítáme zpětnou substitucí.

Všimněte si, že počet volných proměnných je roven číslu $n - r$, kde r je počet nenulových řádků v odstupňovaném tvaru. Zatím neumíme dokázat, že toto číslo nezávisí na tom, jaké ekvivalentní úpravy používáme k převodu na odstupňovaný tvar. Nicméně je tomu tak, toto číslo je rovné tzv. *hodnosti* (rozšířené) matice soustavy. Intuitivně to lze zdůvodnit tak, že v popisu množiny řešení máme $n - r$ parametrů, takže množina řešení je $(n - r)$ -dimenzionální objekt, přičemž tato dimenze samozřejmě závisí jen na původní soustavě, nikoliv na konkrétním odstupňovaném tvaru.

Na popsany postup na řešení rovnic se dá také dívat takto: na začátku máme rovnicový popis „rovného útvaru“ v n -rozměrném prostoru, v bodě 1. nalezneme kompaktnější rovnicový popis stejného útvaru a v bodě 4. nalezneme jeho parametrický popis.

2.5. Sloupcový geometrický pohled. Ukážeme si ještě jeden geometrický pohled na soustavy lineárních rovnic. Tento pohled bude v dalším textu nabývat na větším významu než původní pohled přes rovnice přímek, rovin, atd. Vezměme si jednoduchou soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 3. \end{aligned}$$

Rozšířená matice této soustavy je

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{array} \right).$$

Při řešení soustavy hledáme hodnoty proměnných x_1, x_2 tak, aby platila rovnost dvousložkových vektorů

$$\begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že v prvním sloupci matice soustavy jsou koeficienty u proměnné x_1 a ve druhém sloupci jsou koeficienty u proměnné x_2 . Těmto vektorům říkáme *sloupcové vektory* matice soustavy. Levou stranu poslední rovnosti můžeme pomocí sloupcových vektorů přepsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a celou soustavu jako

$$x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Výraz

$$x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

nazýváme *lineární kombinace* vektorů $(-1, 2)^T$ a $(3, -1)^T$. Řešení soustavy spočívá v nalezení vhodné lineární kombinace sloupcových vektorů tak, aby se rovnala vektoru pravých stran. Lineární kombinace dvou vektorů jsme používali už při parametrickém vyjádření roviny v prostoru nebo při popisu množiny všech řešení soustav v příkladech v částech 2.3.3 a 2.3.4 nebo ve znění Věty 2.14, případně v bodu 4. shrnutí jak postupujeme při řešení obecných soustav lineárních rovnic.

Do předpisu

$$x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

můžeme za proměnné x_1, x_2 dosazovat libovolná reálná čísla, neboli libovolný dvousložkový vektor $(x_1, x_2)^T$, po dosazení dostaneme opět dvousložkový vektor. Dosadíme-li například $(x_1, x_2)^T = (1, 0)^T$, vyjde nám vektor $(-1, 2)^T$ koeficientů u neznámé x_1 , tj. první sloupcový vektor matice soustavy. Dosadíme-li $(x_1, x_2)^T = (0, 1)^T$, vyjde nám druhý sloupcový vektor $(3, -1)^T$ koeficientů u neznámé x_2 . Tyto vektory si můžeme nakreslit do roviny spolu s vektorem pravých stran $(1, 3)^T$. Ten pak vyjádříme jako lineární kombinaci sloupcových vektorů. V tomto případě nám vyjdou jako jediná možnost koeficienty $x_1 = 2$ a $x_2 = 1$, což je také jediné řešení naší soustavy.

OBRAZEK

Podobný geometrický význam má řešení obecné soustavy m lineárních rovnic o n neznámých. Nejdříve si obecně definujeme lineární kombinaci vektorů.

Definice 2.15. Jsou-li $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ m -složkové vektory a a_1, a_2, \dots, a_n reálná čísla, pak definujeme *lineární kombinaci* vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ s koeficienty a_1, a_2, \dots, a_n jako m -složkový vektor

$$a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \dots + a_n \mathbf{u}_n.$$

Soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

pak můžeme přepsat do tvaru

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Řešení soustavy tak spočívá v nalezení všech možných vyjádření vektoru pravých stran jako lineární kombinace sloupcových vektorů matice soustavy. Vektory koeficientů každé takové lineární kombinace pak tvoří jednotlivá řešení soustavy.

2.6. Praktické problémy při numerickém řešení velkých soustav rovnic.

2.6.1. *Numerická stabilita.* Při počítání soustav lineárních rovnic na počítači často reprezentujeme reálná čísla s nějakou předem určenou přesností. Problémem je, že Gaussova eliminace je obecně *numericky nestabilní*. To znamená, že malé zaokrouhlovací chyby mohou vést k výsledku, který se velmi liší od správného. Uvažujme například soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right),$$

jejímž přesným řešením je

$$\left(\frac{1}{1,0001}, \frac{2,0003}{1,0001} \right)^T.$$

Pokud použijeme aritmetiku s třemi platnými ciframi, Gaussova eliminace nám dá

$$\left(\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & 10^4 & 2 \cdot 10^4 \end{array} \right)$$

a zpětnou substitucí dostaneme řešení $(0, 2)^T$, které se od správného liší významně v první složce. Problémem je, že jsme při úpravě přičítali 10^4 -násobek prvního řádku k druhému a číslo 10^4 je tak velké, že smaže pro danou soustavu podstatný rozdíl mezi koeficientem 1 u proměnné x_2 a pravou stranou 3 ve druhé rovnici. Tomuto problému lze někdy předejít tak, že vždy před eliminací jedné proměnné prohodíme řádky tak, aby pivot byl co největší (v absolutní hodnotě). Tato tzv. *částečná pivotace* ale nezamezí všem problémům s numerickou stabilitou. Příkladem může být soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} -10 & 10^5 & 2 \cdot 10^5 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right),$$

kteřá vznikne z předchozí vynásobením první rovnice číslem 10^5 . Řešení při použití aritmetiky se třemi platnými ciframi vyjde opět $(0, 2)^T$ a částečná pivotace tomuto problému nezamezí (řádky jsou již od začátku ve správném pořadí). U tohoto příkladu je problém ve značném rozdílu ve velikosti prvního řádku a druhého řádku. Těmto i dalším typům problémů lze zamezit *úplnou pivotací*, při níž prohodíme před každým cyklem eliminace zbylé řádky a sloupce tak, aby pivot byl co největší. Úplná pivotace je numericky stabilní v každém případě. Při prohození sloupců nesmíme zapomenout na to, že vlastně prohazujeme proměnné. Místo první soustavy bychom tak řešili soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -10^{-4} & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Gaussova eliminace se zaokrouhlováním na tři platná místa by proběhla následovně:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -10^{-4} & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -10^{-4} & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

a zpětnou substitucí bychom dostali $x_1 = 1$ (prohazovali jsme sloupce, tak musíme také prohodit proměnné) a $x_2 = 2$, což je tak blízko přesnému řešení původní soustavy jak je to jenom při zaokrouhlování na tři platná místa možné.

Prohledávání matice v každém cyklu tak, aby byl pivot co největší, je časově hodně náročné, proto se mu algoritmy pro numerické řešení velkých soustav lineárních rovnic snaží vyhnout, pokud to jenom trochu lze.

2.6.2. *Špatně podmíněné soustavy.* Jiný typ problémů ukážeme na soustavě

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,835 & 0,667 & 0,168 \\ 0,333 & 0,266 & 0,067 \end{array} \right) ,$$

jejíž řešením je $(1, -1)^T$. Pokud číslo 0,067 jen nepatrně změníme na hodnotu 0,066, řešení se změní na $(-666, 834)^T$. Důvodem tohoto drastického rozdílu je, že přímky určené rovnicemi jsou téměř rovnoběžné, takže malá změna jedné z nich může posunout průnik daleko od původního.

OBRAZEK

Soustavám, jejichž řešení je velmi citlivé na malou změnu koeficientů, říkáme *špatně podmíněné*. U špatně podmíněných soustav nám nepomůže ani numericky velmi stabilní algoritmus, protože koeficienty jsou v praxi většinou získány měřením, takže jsou zatíženy chybou. Je proto zapotřebí změnit model, navrhnout jiný experiment, apod., abychom se vyhnuli špatně podmíněným soustavám.

Cvičení

1. Dokažte, že prohození dvou rovnic lze docílit zbylými dvěmi elementárními řádkovými úpravami.
2. SLOZITOST

3. TĚLESA

Cíl. *Studiem vlastností reálných čísel, které používáme při řešení soustav lineárních rovnic, dojdeme k pojmu tělesa. Ukážeme si několik důležitých příkladů těles.*

3.1. Motivace.

V minulé kapitole jsme řešili soustavy lineárních rovnic nad reálnými čísly. Zcela stejný postup lze využít pro řešení soustav lineárních rovnic nad jinými obory, například komplexními čísly. Obecně lze stejný postup použít nad libovolným tělesem. Těleso je tedy struktura, ve které jsou definované operace sčítání a násobení mající podobné vlastnosti jako reálná čísla, konkrétněji máme na mysli ty vlastnosti reálných čísel, které využíváme při řešení soustav lineárních rovnic.

Zamysleme se nejprve jaké vlastnosti reálných čísel využíváme při řešení rovnice $x + a = b$, konkrétně třeba

$$x + 11 = 18 .$$

Snažíme se odhlédnout od toho, že řešení okamžitě vidíme a že některé vlastnosti reálných čísel již používáme zcela automaticky.

Většina z nás by na tomto místě navrhla odečíst od obou stran číslo 11. My se budeme snažit vystačit se dvěmi základními operacemi, sčítáním a násobením. Ostatní operace, jako odčítání a dělení, budeme považovat za odvozené. Proto k oběma stranám raději přičteme číslo -11 . Protože jsme zapomněli na komutativitu sčítání, musíme se domluvit, z které strany přičítáme. V našem případě potřebujeme přičíst zprava. Dostáváme

$$(x + 11) + (-11) = 7 ,$$

přičemž na pravé straně jsme rovnou spočítali, že $18 + (-11) = 7$. Dalším krokem je přezávorkování levé strany:

$$x + (11 + (-11)) = 7 .$$

Teď můžeme závorku vypočítat:

$$x + 0 = 7 .$$

Nakonec využijeme skutečnosti, že $x + 0 = x$ a dostáváme

$$x = 7 .$$

(Teď bychom ještě buď ověřili, že 7 je opravdu řešením, případně nahlédli, že úpravy jsou vratné.)

Při řešení rovnic typu $x + a = b$ tedy využíváme asociativitu sčítání, existenci neutrálního prvku a existenci opačných prvků. Přesněji řečeno, využíváme následující vlastnosti:

- (S1) („asociativita sčítání“) Pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- (S2) („existence nulového prvku“) Existuje číslo $0 \in \mathbb{R}$ takové, že pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ platí $0 + a = a + 0 = a$.
- (S3) („existence opačného prvku“) Pro každé $a \in \mathbb{R}$ existuje $b \in \mathbb{R}$ takové, že $a + b = b + a = 0$. (Takové b značíme $-a$.)

Pointa je v tom, že kdykoliv máme na nějaké množině operaci $+$ s těmito vlastnostmi, pak můžeme na řešení rovnic typu $x + a = b$ (nebo $a + x = b$) použít zcela stejný postup. (Binární) operaci na množině T se rozumí jakékoliv zobrazení, které každé dvojici prvků z T jednoznačně přiřadí prvek T . Formálně:

Definice 3.1. *Binární operací* na množině T rozumíme zobrazení z $T \times T$ do T .

Je-li \oplus binární operace na T , pak její hodnotu na dvojici (a, b) zapisujeme většinou $a \oplus b$, místo $\oplus(a, b)$, nebo formálně ještě správnějšího $\oplus((a, b))$.

Všimněte si, že $a \oplus b$ musí být definované pro každou dvojici $a, b \in T$ a že výsledek operace je opět prvek T . Pokud má \oplus vlastnost (S1), pak ve výrazech typu $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n$ nemusíme psát závorky, protože každé smysluplné uzávorkování dá stejný výsledek (důkaz je technicky docela náročný, nebudeme jej provádět). Obecně však nemůžeme beztrestně prohazovat pořadí.

Příklady množin a operací splňující (S1), (S2), (S3) jsou

- $T = \mathbb{Z}$ a $+$ je běžné sčítání.
- Podobně $T = \mathbb{Q}$ (nebo $T = \mathbb{R}$, nebo $T = \mathbb{C}$) a $+$ je běžné sčítání.
- Větším příkladem je množina všech reálných funkcí reálné proměnné s operací sčítání funkcí.
- Naopak velmi malým příkladem je $T = \{0, 1\}$ s operací \oplus definovanou $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$ a $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$.
- Zcela odlišným příkladem pak je množina všech permutací na nějaké pevné množině s operací \circ skládání permutací. Tento příklad vybočuje tím, že operace není komutativní (tj. nesplňuje $a \circ b = b \circ a$).

Vraťme se nyní k problému, které vlastnosti reálných čísel využíváme při řešení soustav lineárních rovnic. Uvažujme rovnici typu $x \cdot a = b$, například $x \cdot 3 = 12$. Postup řešení je následující.

$$\begin{aligned} x \cdot 3 &= 12 \\ (x \cdot 3) \cdot 3^{-1} &= 4 \\ x \cdot (3 \cdot 3^{-1}) &= 4 \\ x \cdot 1 &= 4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Všimněte si, že postup je velmi podobný postupu na řešení rovnice $x + a = b$. Rozdíl je v tom, že místo operace $+$ pracujeme s operací \cdot , místo 0 používáme prvek 1 a místo $-x$ používáme x^{-1} . Vlastnosti \cdot , které využíváme, jsou proto velmi podobné vlastnostem (S1), (S2), (S3) s jedním důležitým rozdílem – obdoba vlastnosti (S3), což je existence inverzního prvku, platí pouze pro nenulová čísla. Použité vlastnosti jsou následující.

- (N1) („asociativita násobení“) Pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- (N2) („existence jednotkového prvku“) Existuje číslo $1 \in \mathbb{R}$ takové, že pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ platí $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.
- (N3) („existence inverzního prvku“) Pro každé $a \in \mathbb{R}$ takové, že $a \neq 0$, existuje $b \in \mathbb{R}$ takové, že $a \cdot b = b \cdot a = 1$. (Takové b značíme a^{-1} .)

Při elementárních úpravách používáme ještě dvě další vlastnosti. Ty lze vidět například z úprav, které mlčky probíhají při přičítání 2-násobku rovnice $x + 3y = 10$

k rovnici $(-2)x + 4y = 15$. V úpravách již využíváme (S1) a (N1), takže nepíšeme závorky.

$$\begin{aligned} 2(x + 3y) + (-2)x + 4y &= 35 \\ 2x + 2 \cdot 3y + (-2)x + 4y &= 35 \\ 2x + 6y + (-2)x + 4y &= 35 \\ 2x + (-2)x + 6y + 4y &= 35 \\ (2 + (-2))x + (6 + 4)y &= 35 \\ 0x + 10y &= 35 \\ 0 + 10y &= 35 \\ 10y &= 35 \end{aligned}$$

Kromě již formulovaných vlastností jsme využili tyto:

(D) („oboustranná distributivita“) Pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ a $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

(S4) („komutativita sčítání“) Pro libovolná čísla $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a + b = b + a$.

Ještě jsme využili, že $0 \cdot x = 0$. Později však ukážeme, že tento vztah plyne ze zbylých vlastností.

Shrneme-li všechny doposud zformulované vlastnosti, dostaneme pojem *nekomutativního tělesa*. Nikde jsme totiž nevyužili komutativitu násobení a soustavy lineárních rovnic lze Gaussovou eliminací řešit i nad nekomutativními tělesy, jen bychom se museli dohodnout, zda koeficienty v rovnicích budeme psát zleva nebo zprava. Rovnice $ax = b$ totiž může mít jiné řešení než rovnice $xa = b$. Důležitým příkladem nekomutativního tělesa je těleso kvaternionů, viz níže.

My ale budeme pracovat s tělesy, kde násobení je komutativní, proto do definice tělesa tuto vlastnost přidáme. Tím pádem stačí vyžadovat jen jeden z distributivních zákonů a můžeme také zjednodušit vlastnosti (S2), (S3), (N2) a (N3). Ještě přidáme tzv. axiom netriviality, tj. požadavek že těleso má alespoň 2 prvky. Jedno-prvkovou množinu totiž za těleso nechceme považovat.

3.2. Definice tělesa.

Definice 3.2. *Tělesem* \mathbf{T} rozumíme množinu T spolu s dvěma binárními operacemi $+, \cdot$ na T , které splňují následující axiomy.

- (S1) („asociativita sčítání“) Pro libovolné prvky $a, b, c \in T$ platí $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- (S2) („existence nulového prvku“) Existuje prvek $0 \in T$ takový, že pro libovolné $a \in T$ platí $a + 0 = a$.
- (S3) („existence opačného prvku“) Pro každé $a \in T$ existuje $-a \in T$ takové, že $a + (-a) = 0$.
- (S4) („komutativita sčítání“) Pro libovolné prvky $a, b \in T$ platí $a + b = b + a$.
- (N1) („asociativita násobení“) Pro libovolné prvky $a, b, c \in T$ platí $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- (N2) („existence jednotkového prvku“) Existuje prvek $1 \in T$ takový, že pro libovolné $a \in T$ platí $a \cdot 1 = a$.
- (N3) („existence inverzního prvku“) Pro každé $0 \neq a \in T$ existuje $a^{-1} \in T$ takové, že $a \cdot a^{-1} = 1$.
- (N4) („komutativita násobení“) Pro libovolné prvky $a, b \in T$ platí $a \cdot b = b \cdot a$.

- (D) („distributivita“) Pro libovolné prvky $a, b, c \in T$ platí $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
 (\neg T) („netrivialita“) $|T| > 1$.

Prvek 0 z axiomu (S2) též nazýváme *neutrální prvek vzhledem k operaci +* a prvek 1 z axiomu (N2) je *neutrální prvek vzhledem k ·*. V následujícím tvrzení ukážeme, že jsou určeny jednoznačně. Tyto jednoznačně určené prvky pak vystupují v axiomech (S3) a (N3).

Formulace (S3) může být trochu matoucí. Přesněji bychom měli říct, že pro každé $a \in T$ existuje $b \in T$ takové, že $a + b = 0$, a poté libovolné takové b označit $-a$. V následujícím tvrzení dokážeme, že $b = -a$ je pro dané a určeno jednoznačně. Podobně pro inverzní prvky.

Stejně jak je běžné u reálných čísel, prvek $a \cdot b$ často značíme jen ab . Definujeme

$$a - b = a + (-b) \quad \text{a} \quad \frac{a}{b} = ab^{-1}.$$

Těleso je zadané množinou T a určením dvou binárních operací $+$ a \cdot na množině T . Samotná množina těleso neurčuje. Rovněž poznamenejme, že vzhledem k definici binární operace (definice 3.1) musí být $a+b$ a ab definované pro každou dvojici prvků $a, b \in T$ a výsledek musí ležet v množině T .

Příkladem tělesa je množina racionálních (nebo reálných, nebo komplexních) čísel spolu s běžnými operacemi. Množina celých čísel spolu s běžnými operacemi těleso netvoří kvůli axiomu (N3). Dříve než se podíváme na další příklady, dokážeme několik jednoduchých vlastností, které mají všechna tělesa.

Tvrzení 3.3. *V každém tělese \mathbf{T} platí*

- (1) *nulový prvek je určený jednoznačně,*
- (2) *rovnice $a + x = b$ má vždy právě jedno řešení, speciálně, opačný prvek $-a$ je prvkem $a \in T$ určený jednoznačně,*
- (3) *jednotkový prvek je určený jednoznačně,*
- (4) *rovnice $ax = b$, $a \neq 0$, má vždy právě jedno řešení, speciálně, prvek a^{-1} inverzní k prvku $0 \neq a \in T$, je prvkem a určený jednoznačně,*
- (5) *$0a = 0$ pro libovolný prvek $a \in T$,*
- (6) *je-li $ab = 0$, pak buď $a = 0$ nebo $b = 0$,*
- (7) *$(-1)a = -a$ pro každý prvek $a \in T$,*
- (8) *z rovnosti $a + b = a + c$ plyne $b = c$,*
- (9) *z rovnosti $ab = ac$ a předpokladu $a \neq 0$, vyplývá $b = c$,*
- (10) $0 \neq 1$

Důkaz. (1) Předpokládejme, že 0 a $0'$ jsou prvky, pro které $a + 0 = a = a + 0'$ pro libovolné $a \in T$. Pak platí

$$0 = 0' + 0 = 0 + 0' = 0'.$$

V první rovnosti jsme využili, že $a = a + 0$ pro libovolné a (využili jsme to pro $a = 0'$), ve druhé rovnosti využíváme komutativitu sčítání (axiom (S3)) a ve třetí rovnosti využíváme, že $a + 0' = a$ (pro $a = 0$).

Tedy $0 = 0'$, což jsme chtěli.

- (2) Vezmeme libovolné $a, b \in T$ a předpokládáme, že $x \in T$ i $x' \in T$ splňují $a + x = b$ a $a + x' = b$. Přičteme k oběma stranám rovnosti $a + x = a + x'$ libovolný pevně zvolený opačný prvek $-a$ k a , použijeme asociativitu sčítání

a axiomy (S3),(S4) a (S2). Dostáváme

$$\begin{aligned} a + x &= a + x' \\ (-a) + (a + x) &= (-a) + (a + x') \\ ((-a) + a) + x &= ((-a) + a) + x' \\ 0 + x &= 0 + x' \\ x &= x' . \end{aligned}$$

Tvrzení o jednoznačnosti opačného prvku dostaneme volbou $b = 0$.

- (3) Obdobně jako (1)
 (4) Obdobně jako (2)
 (5) Pro libovolné a máme užitím (D)

$$0a + 0a = (0 + 0)a = 0a.$$

Rovnice $0a + x = 0a$ má tedy řešení $x = 0a$, ale také $x = 0$ podle axiomu (S2). Z bodu (2) nyní vyplývá $0a = 0$.

- (6) Předpokládejme, že $ab = 0$ a $a \neq 0$ a dokážeme, že $b = 0$. Rovnice $ax = 0$ má řešení $x = b$ a také $x = 0$ podle předešlého bodu. Takže $0 = b$ podle bodu (2).
 (7) Je třeba ukázat, že $(-1)a$ je opačný prvek k a . Pak tvrzení plyne z jednoznačnosti opačného prvku (bod (2)). Skutečně

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0,$$

kde jsme využili (N2), (D), (S3) a předchozí bod.

- (8) Rovnice $a + x = (a + c)$ má řešení $x = c$ (zřejmě) a $x = b$ (podle předpokladu). Z bodu (2) plyne $b = c$.
 (9) Podobně jako předešlý bod.
 (10) Pokud $0 = 1$, pak vynásobením obou stran libovolným číslem a a užitím (5) a (N2) dostaneme $0 = 0a = 1a = a$. Tedy každý prvek je roven nulovému, takže $|T| = 1$.

□

Další společné vlastnosti těles jsou ve cvičeních.

3.3. Tělesa \mathbb{Z}_p .

Důležitými příklady těles jsou tělesa \mathbb{Z}_p , kde p je prvočíslo. Tato a jiná konečná tělesa mají aplikace například v informatice při studiu kódů nebo k návrhu rychlých algoritmů pro počítání s celočíselnými polynomy.

Těleso \mathbb{Z}_p má prvky $0, 1, 2, \dots, p - 1$ (má tedy p prvků) a operace \oplus, \odot jsou definovány

$$a \oplus b = (a + b) \bmod p, \quad a \odot b = (a \cdot b) \bmod p.$$

Na levých stranách jsou operace v \mathbb{Z}_p , které definujeme, a na pravých stranách jsou běžné operace v \mathbb{Z} . Pripomeňme, že $c \bmod p$ značí zbytek po dělení čísla c číslem p . Tento zbytek je vždy v množině $0, 1, \dots, p - 1$, takže operace jsou dobře definovány.

Ve skutečnosti pro zápis operací \oplus, \odot používáme symboly $+, \cdot$. Z kontextu je třeba rozhodnout, ve kterém tělese počítáme. Například v \mathbb{Z}_5 máme

$$0 + 0 = 0, \quad 1 + 4 = 0, \quad 3 + 4 = 2, \quad 2 \cdot 2 = 4, \quad 2 \cdot 3 = 1, \quad 3 \cdot 3 = 4, \dots$$

Věta 3.4. *Pro libovolné prvočíslo p tvoří množina \mathbb{Z}_p spolu s výše definovanými operacemi těleso.*

Důkaz. Ověření téměř všech axiomů tělesa je vcelku snadné a přenecháme to do cvičení.

Dokážeme pouze axiom (N3) o existenci inverzních prvků. Nechť $0 \neq a \in \mathbb{Z}_p$, neboli $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Chceme najít inverzní prvek k a . Protože p je prvočíslo a $0 < a < p$, platí $\gcd(a, p) = 1$. Podle Bezoutovy věty (věta ??) existují čísla $s, t \in \mathbb{Z}$ taková, že $sa + tp = 1$. Tvrdíme, že $(s \bmod p)$ je inverzním prvkem k a . Platí

$$(s \bmod p)a \equiv sa = 1 - tp \equiv 1 \pmod{p},$$

(kde všechny operace jsou běžné operace s celými čísly) neboli $(s \bmod p)a \bmod p = 1$. Z toho plyne, že $(s \bmod p)a = 1$ v \mathbb{Z}_p . \square

Důkaz také dává návod na hledání inverzních prvků. Pokud p je malé, je asi nejrychlejší určovat inverzní prvky zkusmo.

Příklad 3.5. V tělese \mathbb{Z}_5 máme

$$1^{-1} = 1, 2^{-1} = 3, 3^{-1} = 2, 4^{-1} = 4 .$$

V tělese \mathbb{Z}_7 je

$$1^{-1} = 1, 2^{-1} = 4, 3^{-1} = 5, 4^{-1} = 2, 5^{-1} = 3, 6^{-1} = 6 .$$

Inverzní prvky jsme našli zkusmo, například $2^{-1} = 3$, protože $2 \cdot 3 = 1$. Uvedeme několik snadných pozorování, které usnadní práci. Každé z nich ověřte na uvedených příkladech.

V každém tělese platí $1^{-1} = 1$ a také $(-1)^{-1} = -1$. Tedy v \mathbb{Z}_p je $(p-1)^{-1} = (p-1)$, protože $-1 = p-1$ (čti „opačný prvek k 1 je $p-1$ “). Podle cvičení 3.5.6 je $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$, takže známe-li inverzní prvek k a , můžeme též určit inverzní prvek k $-a = p-a$. Podle stejného cvičení je inverzní prvek k inverznímu prvku původní prvek, tj. víme-li, že $b = a^{-1}$, pak $a = b^{-1}$.

Příklad 3.6. V tělese \mathbb{Z}_7 platí

$$\frac{-3}{5} = \frac{4}{5} = 4 \cdot 5^{-1} = 4 \cdot 3 = 5 .$$

Využili jsme $5^{-1} = 3$, což jsme nahlédli v předchozím příkladu. Alternativně se lze rovnou zeptat kolika je třeba vynásobit pětku, abychom dostali 4. Ještě jinak můžeme počítat

$$\frac{-3}{5} = \frac{4}{-2} = -2 = 5 .$$

Poznamenejme, že zatímco v tělese reálných (nebo racionálních) čísel je $\frac{4}{5}$ číslo, v tělese \mathbb{Z}_7 jde o výraz „4 děleno 5“. Takové výrazy by se ve výsledcích příkladů neměly objevovat, protože jdou ještě dále počítat.

Příklad 3.7. Určíme 13^{-1} v tělese \mathbb{Z}_{37} . Prvočíslo 37 je již příliš velké na to, abychom počítali inverzní prvky zkusmo, proto použijeme postup z důkazu věty 3.4. Je potřeba zjistit Bezoutovy koeficienty pro čísla 13, 37.

$$37 = 2 \cdot 13 + 11$$

$$13 = 1 \cdot 11 + 2$$

$$11 = 5 \cdot 2 + 1$$

Zpětným chodem dopočítáme Bezoutovy koeficienty.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 11 - 5 \cdot 2 = \\ &= 1 \cdot 11 - 5 \cdot (13 - 1 \cdot 11) = (-5) \cdot 13 + 6 \cdot 11 = \\ &= (-5) \cdot 13 + 6 \cdot (37 - 2 \cdot 13) = 6 \cdot 37 + (-17) \cdot 13 \end{aligned}$$

Protože $(-17) \bmod 37 = 20$, v tělese \mathbb{Z}_{37} platí $13^{-1} = 20$. Můžeme ověřit, že opravdu platí $13 \cdot 20 \bmod 37 = 1$.

Příklad 3.8. V tělese \mathbb{Z}_{11} vyřešíme soustavu lineárních rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 2 & 10 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 8 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 0 & 2 & 6 & 8 \end{array} \right) .$$

Soustavu převedeme do odstupňovaného tvaru.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 2 & 10 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 8 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 0 & 2 & 6 & 8 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 2 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 2 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 0 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 6 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 0 & 9 \end{array} \right) \end{aligned}$$

V první úpravě jsme 9-násobek prvního řádku přičetli ke druhému a 2-násobek prvního řádku jsme přičetli ke třetímu.

Jak jsme přišli například na číslo 9 při nulování pozice $(2, 1)$? Jednou možností je spočítat $-\frac{4}{2} = -2 = 9$. Pro malá tělesa, zejména $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$, je asi nejrychlejší určit potřebné číslo zkusmo. Tím myslíme v našem případě úvahou „kolika je třeba vynásobit 2, aby po přičtení 4 vznikla 0“. Možná o něco početně příjemnější než přičítat 9-násobek je přičítat (-2) -násobek.

Na koeficient 2 při nulování pozice $(3, 1)$ můžeme obdobně přijít buď výpočtem nebo zkusmo. Výpočet provedeme přímočaře

$$-\frac{7}{2} = -7 \cdot 2^{-1} = -7 \cdot 6 = -9 = 2 ,$$

nebo šikovněji například takto:

$$-\frac{7}{2} = \frac{-7}{2} = \frac{4}{2} = 2 .$$

V další úpravě jsme 5-násobek druhého řádku přičetli k třetímu. V poslední úpravě jsme vynásobili řádky čísly tak, aby pivoty byly rovny 1. To nám usnadní zpětné substituce při dopočítání řešení. Konkrétně jsme první řádek vynásobili číslem $2^{-1} = 6$, druhý řádek číslem $4^{-1} = 3$ a třetí řádek číslem $7^{-1} = 8$.

Bázové proměnné jsou x_1, x_2 a x_3 a volné proměnné jsou x_4 a x_5 . Řešení tedy bude tvaru

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) + s \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) + t \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) : s, t \in \mathbb{Z}_{11} \right\} .$$

Zpětnou substitucí dopočítáme neznámé pozice a získáme řešení

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{Z}_{11} \right\} .$$

3.4. Charakteristika. Důležitým číselným parametrem těles je jejich *charakteristika*:

Definice 3.9. Existuje-li kladné celé číslo n takové, že v tělese \mathbf{T} platí

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_n = 0 ,$$

pak nejmenší takové kladné číslo nazýváme *charakteristika* tělesa \mathbf{T} .

Pokud žádné takové kladné celé číslo n neexistuje, tak říkáme, že těleso \mathbf{T} má *charakteristiku* 0.

Charakteristika tedy určuje, kolikrát je nejméně třeba sečíst jedničku, abychom dostali 0. Někdy se zápisem n rozumí součet n jedniček. Charakteristika je při této úmluvě nejmenší kladné celé číslo n takové, že $n = 0$. Pokud takové n neexistuje, charakteristika je 0.

Věta 3.10. *Charakteristika každého tělesa je buď 0, nebo prvočíslo.*

Důkaz. Jestliže charakteristika tělesa \mathbf{T} není rovná 0, pak existuje nějaké kladné celé číslo $n \geq 2$, pro které platí

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_n = 0.$$

Jestliže je n složené číslo, platí $n = kl$ pro nějaká kladná celá čísla $k, l < n$. V důsledku axiomu distributivity (D) platí

$$\underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_k \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_l = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_n = 0.$$

Podle tvrzení 3.3.(6) může být součin dvou prvků v tělese rovný 0 pouze pokud je aspoň jeden z činitelů rovný 0. Proto je buď

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_k = 0$$

nebo

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_l = 0.$$

V každém případě nemůže být složené číslo $n \geq 2$ nejmenším kladným celým číslem, pro které platí

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_n = 0.$$

Protože je $1 \neq 0$ podle tvrzení 3.3.(10), musí být nejmenší takové číslo prvočíslo. \square

Charakteristika těles $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ je 0. Pro libovolné prvočíslo p je charakteristika tělesa \mathbb{Z}_p rovná p .

Tělesa charakteristiky 2 mají tu příjemnou vlastnost, že sčítání a odčítání splývají, viz cvičení. V některých situacích tato tělesa tvoří výjimečné případy, které je třeba zvlášť rozebírat. Jedním z důvodů je fakt, že v nich nelze počítat aritmetický průměr dvou čísel – výraz $\frac{a+b}{2}$ totiž nedává smysl, protože dělíme nulou.

3.5. Další příklady těles.

3.5.1. *Čtyřprvkové těleso.* Pokud n není prvočíslo, pak \mathbb{Z}_n , definované podobně jako \mathbb{Z}_p , není těleso. Tedy například \mathbb{Z}_4 není těleso. Selže axiom (N3), 2 nemá inverzní prvek. Můžeme také použít větu 3.10, protože charakteristika by byla 4, což je nemožné.

Čtyřprvkové těleso ale existuje. Nejlépe je počítat s polynomy

$$GF(4) = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$$

jedné proměnné α s koeficienty v \mathbb{Z}_2 . Sčítání je definované jako přirozené sčítání polynomů (např. $\alpha + (\alpha + 1) = (1 + 1)\alpha + 1 = 1$), při násobení pak polynomy vynásobíme přirozeným způsobem a pak vezme zbytek po dělení polynomem

$$\alpha^2 + \alpha + 1,$$

například

$$\begin{aligned} (\alpha + 1)(\alpha + 1) &= ((\alpha + 1) \cdot \text{běžné } (\alpha + 1)) \bmod (\alpha^2 + \alpha + 1) = \\ &= (\alpha^2 + 1) \bmod (\alpha^2 + \alpha + 1) = \alpha. \end{aligned}$$

3.5.2. *Další konečná tělesa.* Těleso s n prvky existuje právě tehdy, když n je mocnina prvočísla. Důkaz uvidíte později v kurzu algebry. Naopak, pro každé číslo $n = p^k$, kde p je prvočíslo, těleso s n prvky existuje a je dokonce jednoznačně určené až na přeznačení prvků. Jde zkonstruovat podobně jako čtyřprvkové těleso. Prvky budou polynomy stupně nejvýše $k - 1$ s koeficienty v \mathbb{Z}_p a počítat budeme modulo pevně zvolený nerozložitelný polynom stupně k , tj. polynom, který se nedá napsat jako (běžný) součin polynomů nižšího stupně.

Podobně jako u těles \mathbb{Z}_p by se existence inverzních prvků dokázala pomocí Bezoutových koeficientů, analogie Bezoutovy věty totiž platí i pro polynomy s koeficienty v \mathbb{Z}_p . Důležité je, že počítáme modulo nerozložitelný polynom. Tento fakt hraje v důkazu stejnou roli jako fakt, že p je prvočíslo v důkazu věty 3.4 – největší společný dělitel zvoleného nerozložitelného polynomu a libovolného nenulového polynomu nižšího stupně bude díky tomu 1.

3.5.3. *Podtělesa komplexních čísel.* Existuje celá řada těles „mezi“ racionálními a komplexními čísly. Například množina komplexních čísel

$$\{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

tvoří s běžnými operacemi těleso. K důkazu musíme ověřit, že tato množina je uzavřena na sčítání a násobení. Většina zbylých axiomů je pak očividná, kromě existence inverzního prvku. Úplný důkaz přenecháme do cvičení.

Dalším příkladem je množina

$$\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

opět s běžnými operacemi.

Tato a podobná tělesa hrají velkou roli například při důkazu slavné věty, že neexistuje vzoreček (využívající operace $+$, \cdot , $-$, $:$, $\sqrt{\quad}$) pro kořeny polynomu většího než pátého stupně, nebo při důkazu nemožnosti kvadratury kruhu, trisekce úhlu a zdvojení krychle.

3.5.4. *Těleso racionálních funkcí.* Příkladem „většího“ tělesa je těleso racionálních funkcí, tedy funkcí tvaru $\frac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x)$ a $q(x) \neq 0$ jsou reálné polynomy s běžnými operacemi sčítání a násobení funkcí. Je potřeba ztotožnit racionální funkce, které se liší pouze definičním oborem, např. 1 je potřeba považovat za tu samou racionální funkci jako $(x+1)/(x+1)$, viz cvičení.

3.5.5. *Charakteristika a konečnost.* Každé těleso charakteristiky 0 má nekonečně mnoho prvků, protože čísla $0, 1, 1+1, 1+1+1$ jsou všechna navzájem různá. Jde ukázat, že takové těleso v jistém smyslu obsahuje těleso racionálních čísel (viz cvičení).

Na druhou stranu, není pravda, že těleso nenulové charakteristiky má nutně konečný počet prvků. Příkladem je těleso racionálních funkcí nad \mathbb{Z}_p , které má charakteristiku p a není konečné. Při zavádění tohoto tělesa je potřeba postupovat opatrněji než v případě tělesa racionálních funkcí nad \mathbb{R} , musíme pracovat s formálními podíly (nikoliv funkcemi tvaru podílu) a vhodné podíly ztotožnit. Detaily probírat nebudeme.

Každé těleso charakteristiky p „obsahuje“ těleso \mathbb{Z}_p (opět viz cvičení).

3.5.6. *Kvaterniony.* Důležitým příkladem nekomutativního tělesa jsou kvaterniony. Kvaterniony definujeme jako výrazy tvaru

$$a + bi + cj + dk,$$

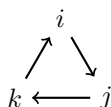
kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a i, j, k, l jsou „imaginární jednotky“. Sčítání je definováno přirozeně, tedy

$$(a + bi + cj + dk) + (a' + b'i + c'j + d'k) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k.$$

Při násobení roznásobíme závorky a využijeme vztahů $ai = ia, aj = ja, ak = ka$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ a

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, jk = i, ki = j, \quad ji = -k, kj = -i, ik = -j,$$

které se dobře pamatují pomocí cyklu $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$:



Pokud násobíme po směru cyklu, dostaneme třetí proměnnou s kladným znaménkem, a násobení proti směru znaménko obrací. Tedy

$$\begin{aligned}
 & (a + bi + cj + dk) \cdot (a' + b'i + c'j + d'k) = \\
 & = aa' + ab'i + ac'j + ad'k + ba'i + bb'i^2 + bc'ij + bd'ik + \\
 & \quad + ca'j + cb'ji + cc'j^2 + cd'jk + da'k + db'ki + dc'kj + dd'k^2 = \\
 & = aa' + ab'i + ac'j + ad'k + ba'i - bb' + bc'k - bd'j + \\
 & \quad + ca'j - cb'k - cc' + cd'i + da'k + db'j - dc'i - dd' = \\
 & = (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc')i + \\
 & \quad + (ac' - bd' + ca' + db')j + (ad' + bc' - cb' + da')k .
 \end{aligned}$$

Lineární algebru lze mimo jiné použít také ke zkoumání geometrických zobrazení. Rotace o úhel α kolem nějaké osy patří mezi důležitá geometrická zobrazení. V letním semestru si ukážeme, že složení dvou rotací kolem různých os je opět rotace kolem nějaké osy. Najít osu a úhel složené rotace není vůbec jednoduché. Hledání toho, jak osa a úhel složené rotace závisí na osách a úhlech rotací, které skládáme, vedlo k objevu kvaternionů.

Délkou kvaternionu $a + bi + cj + dk$ rozumíme reálné číslo $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Kvaternion délky 1 nazýváme *jednotkový kvaternion*. Lze spočítat (viz cvičení), že součin dvou jednotkových kvaternionů je zase jednotkový kvaternion.

Rotaci kolem osy procházející počátkem souřadnic a bodem $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ o úhel α v kladném směru (tj. proti směru hodinových ručiček díváme-li se na rovinu, ve které se body pohybují, z kladného směru osy rotace) zapíšeme pomocí kvaternionu

$$\cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2)(ai + bj + ck) .$$

Tak například otočení o úhel $\pi/2$ kolem první souřadné osy zapíšeme jako kvaternion $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Otočení kolem osy z o úhel $\pi/2$ v kladném směru zapíšeme pomocí kvaternionu $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k$.

Pro každé kladné reálné číslo r popisuje kvaternion $\cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2)(rai + rbj + rck)$ stejnou rotaci jako kvaternion $\cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2)(ai + bj + ck)$. Oba vektory $(a, b, c)^T$ a $(ra, rb, rc)^T$ totiž určují stejnou přímku procházející počátkem. Ze všech možných kvaternionů popisujících stejnou rotaci si vybereme jednotkový kvaternion. Oba příklady z předchozího odstavce jsou jednotkové kvaterniony.

Složíme-li dvě rotace, dostaneme osu a úhel složené rotace tak, že vynásobíme příslušné kvaterniony v daném pořadí.

Příklad 3.11. Složíme rotaci kolem osy x o úhel $\pi/2$ a rotaci kolem osy z o úhel $\pi/2$. Osu a úhel složené rotace najdeme jako součin kvaternionů

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k) ,$$

použili jsme rovnost $ki = j$.

Platí tedy, že složená rotace je kolem osy prvního oktantu o úhel $2\pi/3$ v kladném směru.

Cvičení

1. Dokažte, že v libovolném tělese \mathbf{T} platí pro každé dva prvky $a, b \in T$ vztahy $(-a)(-b) = ab$, $(-a)b = -(ab)$ a $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$.

2. Dokažte, že v libovolném tělese \mathbf{T} funguje převod na společný jmenovatel, tzn. dokažte, že pro libovolná $a, b, c, d \in T$, $b, d \neq 0$, platí

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

3. Dokažte, že v libovolném tělese platí $-0 = 0$, $1^{-1} = 1$, $(-a)^{-1} = -a^{-1}$, $(a^{-1})^{-1} = a$ pro libovolné $0 \neq a \in T$.

4. Dokončete důkaz, že \mathbb{Z}_p je těleso pro libovolné prvočíslo p .

5. Dokažte, že \mathbb{Z}_n je těleso právě tehdy, když n je prvočíslo.

6. Dokažte, že v libovolném tělese \mathbf{T} charakteristiky 2 platí $a = -a$ pro libovolný prvek $a \in T$.

7. Vytvořte tabulku počítání ve čtyřprvkovém tělese a ověřte, že se skutečně jedná o těleso.

8. Rozhodněte (a odpověď dokažte), které z následujících podmnožin \mathbb{C} tvoří s běžnými operacemi těleso.

- $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$
- $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$
- $\{a + b\sqrt{n} : a, b \in \mathbb{Q}\}$, kde n je pevně zvolené přirozené číslo
- $\{a + b\sqrt[3]{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$
- $\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
- $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
- $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} : a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$

9. Proč je při definici tělesa racionálních funkcí třeba ztotožňovat racionální funkce, které se liší pouze definičním oborem?

10. Dokažte, že v tělese charakteristiky 0 jsou všechna čísla $0, 1, 1+1, 1+1+1, \dots$ navzájem různá.

11. Nechť \mathbf{T} s operacemi \oplus, \odot je těleso charakteristiky 0. Opačné prvky a dělení v tomto tělese budeme značit \ominus, \oslash . Pro libovolné přirozené číslo n označme

$$\bar{n} = \underbrace{1 \oplus 1 \oplus \dots \oplus 1}_{n \times} \quad \text{a} \quad \overline{-n} = \ominus \bar{n}$$

Dokažte, že pro libovolné $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ a $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ platí, že $\overline{p_1} \oslash \overline{q_1} = \overline{p_2} \oslash \overline{q_2}$ právě tehdy, když se racionální čísla p_1/q_1 a p_2/q_2 rovnají a platí

$$(\overline{p_1} \oslash \overline{q_1}) \odot (\overline{p_2} \oslash \overline{q_2}) = \overline{p_1 p_2} \oslash \overline{q_1 q_2}, \quad (\overline{p_1} \oslash \overline{q_1}) \oplus (\overline{p_2} \oslash \overline{q_2}) = \overline{p_1 q_2 + p_2 q_1} \oslash \overline{q_1 q_2}.$$

Prvky T typu $\overline{p} \oslash \overline{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ se tedy sčítají a násobí jako racionální čísla. V tomto smyslu obsahuje každé těleso charakteristiky 0 těleso racionálních čísel.

12. Po vzoru předchozího tvrzení přesně zformulujte a dokažte tvrzení, že každé těleso charakteristiky p obsahuje těleso \mathbb{Z}_p .

13. V tělese kvaternionů najděte prvek inverzní k prvku $a + bi + cj + dk$.

14. Dokažte, že součin dvou jednotkových kvaternionů je opět jednotkový kvaternion.

4. MATICE

Cíl. *Dozvíme se, že matice určují zobrazení. Naučíme se provádět základní operace s maticemi. Zajímavou operací je násobení, které odpovídá skládání zobrazení, a invertování, které odpovídá invertování zobrazení.*

Matice pro nás zatím byly pouze pomůckou k přehlednému zápisu soustav lineárních rovnic. V této kapitole se budeme dívat na matice jako na samostatné objekty. Definujeme základní operace, zmíníme některé aplikace a základní vlastnosti. K pochopení násobení matic nahlédneme, že matice přirozeným způsobem určují zobrazení. Takto jdou popsat například rotace nebo osové souměrnosti v rovině. Násobení matic pak odpovídá skládání zobrazení.

4.1. Matice a jednoduché operace.

Začneme definicí matice a speciálních typů matic. Nová definice rozšiřuje stávající definice 2.1 a 2.4 tím, že prvky mohou být z libovolného pevně zvoleného tělesa.

Definice 4.1. Nechť \mathbf{T} je těleso. *Maticí nad tělesem \mathbf{T} typu $m \times n$ rozumíme obdélníkové schéma prvků T s m řádky a n sloupci. Matice typu $m \times m$ se nazývá čtvercová matice řádu m . Matice typu $m \times 1$ se nazývá (sloupcový) aritmetický vektor a matice typu $1 \times m$ se nazývá řádkový aritmetický vektor.*

Připomeňme, že zápisem $A = (a_{ij})_{m \times n}$ rozumíme matici A typu $m \times n$, která má na pozici (i, j) prvek $a_{ij} \in T$. Index $m \times n$ vynecháváme, pokud nechceme typ specifikovat nebo je zřejmý z kontextu.

Definice 4.2. Čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ nazýváme

- *diagonální*, pokud $a_{ij} = 0$ kdykoliv $i \neq j$,
- *horní trojúhelníková*, pokud $a_{ij} = 0$ kdykoliv $i > j$,
- *dolní trojúhelníková*, pokud $a_{ij} = 0$ kdykoliv $i < j$.

U libovolné matice říkáme, že prvky a_{ii} tvoří *hlavní diagonálu*.

Matice $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ považujeme za stejné, pokud mají stejný typ $m \times n$ a mají stejné prvky na odpovídajících pozicích (formálněji, pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $a_{ij} = b_{ij}$).

Zavedeme několik jednoduchých operací s maticemi, které zobecňují příslušné operace pro vektory.

Definice 4.3. Jsou-li $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ matice nad stejným tělesem \mathbf{T} , stejného typu $m \times n$ a $t \in T$, pak definujeme

- *součet matic A a B* jako matici $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$,
- *t -násobek matice A* jako matici $t \cdot A = tA = (ta_{ij})_{m \times n}$,
- *matice opačnou k A* jako matici $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$,
- *nulovou matici* typu $m \times n$ jako matici $0_{m \times n} = (0)_{m \times n}$.

Součet matic různých typů nebo nad různými tělesy není definován. Rovněž nedefinujeme výraz tA , t -násobek matice A píšeme vždy tA .

Příklad 4.4. Nad tělesem \mathbb{Z}_5 máme

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & 1+2 & 3+2 \\ 4+1 & 0+1 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -4 & -0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad 0_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Právě definované operace vůbec neberou v úvahu tabulkovou strukturu matice – kdybychom napsali sloupce matice pod sebe, dostali bychom aritmetický vektor s mn složkami a operace $+$, \cdot , $-$ by se shodovaly se stejnými operacemi pro vektory. Jednoduchou operací, která není tohoto typu, je transpozice. Zavedené značení je v souladu s dříve používaným značením $(a_1, \dots, a_n)^T$ pro sloupcový vektor.

Definice 4.5. *Transponovaná matice* k matici $A = (a_{ij})_{m \times n}$ je matice $A^T = (b_{ji})_{n \times m}$, kde $b_{ji} = a_{ij}$ pro libovolné indexy $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Sloupce transponované matice jsou tedy řádky původní matice a naopak. Například

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2. Násobení matic.

4.2.1. *Geometrická motivace.* Na rozdíl od sčítání, násobení matic není definováno po pozicích. Abychom pochopili na první pohled záhadnou definici, podíváme se trochu jinak na řešení soustav lineárních rovnic. Uvažujme například soustavu 2 rovnic o 2 neznámých nad reálnými čísly a její matici:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 10 \\ 5x_1 + 2x_2 &= 20 \end{aligned}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Levá strana soustavy, neboli matice soustavy, definuje zobrazení f_A z množiny \mathbb{R}^2 všech 2-složkových vektorů nad \mathbb{R} do téže množiny \mathbb{R}^2 :

$$f_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Řešení soustavy jsou ty vektory $(x_1, x_2)^T$, které zobrazení f_A zobrazí na vektor $(10, 20)^T$. (Jinými slovy, řešením je vektor $(10, 20)^T$ při zobrazení f_A .)

Obecněji, matice typu $m \times n$ definuje zobrazení z množiny \mathbb{R}^n do množiny \mathbb{R}^m . Studiu těchto typů zobrazení je věnována kapitola ??, my se zatím podíváme na tři příklady.

- *Otočení o 30° v \mathbb{R}^2 .* Obraz vektoru $(x_1, x_2)^T$ určíme úvahou podle obrázku (přesněji bychom měli říkat obraz bodu, jehož polohový vektor je $(x_1, x_2)^T$, ale dělat to nebudeme).

OBRAZEK

Obrazem vektoru $(1, 0)^T$ je

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

z čehož vidíme, že obrazem vektoru $(x_1, 0)^T$ je

$$x_1 \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \sqrt{3}/2 \\ x_1/2 \end{pmatrix}.$$

Podobně zjistíme, že obrazem vektoru $(0, x_2)^T$ je vektor $(-x_2/2, x_2\sqrt{3}/2)$. Obraz součtu vektorů $(x_1, 0)^T$ a $(0, x_2)^T$ (což je vektor $(x_1, x_2)^T$) určíme jako součet jejich obrazů. Obrazem vektoru $(x_1, x_2)^T$ je tedy vektor

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že rotace o 30° je zobrazení f_A , kde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Obecněji, rotace o úhel α je zobrazení f_A , kde

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

- *Osová souměrnost podle osy x v \mathbb{R}^2 .* Obrazem vektoru $(x_1, x_2)^T$ je vektor $(x_1, -x_2)^T$, takže souměrnost podle osy x je zobrazení f_A , kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Zobrazení f_A z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^3 dané maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

je znázorněné na obrázku.

OBRAZEK

Uvažujme teď dvě zobrazení f_A a f_B z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 daná maticemi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Podíváme se na složení zobrazení f_B a f_A , tedy zobrazení g definované vztahem $g(\mathbf{x}) = f_A(f_B(\mathbf{x}))$.

$$\begin{aligned} g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= f_A \left(f_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = f_A \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2) + a_{12}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2) \\ a_{21}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2) + a_{22}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})x_2 \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vidíme, že $g = f_C$ pro matici

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Obecněji bychom mohli složit zobrazení f_B z \mathbb{R}^p do \mathbb{R}^n dané maticí typu $n \times p$ a zobrazení f_A z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m dané maticí typu $m \times n$. Podobným výpočtem jako výše bychom zjistili, že výsledné zobrazení z \mathbb{R}^p do \mathbb{R}^m je dáno maticí C typu $m \times p$, která má na pozici (i, k) prvek

$$a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

4.2.2. *Definice násobení.* Dostali jsme se k definici součinu matic.

Definice 4.6. Je-li A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$ nad stejným tělesem \mathbf{T} , pak definujeme *součin matic* $A \cdot B = AB = (c_{ik})$ jako matici nad \mathbf{T} typu $m \times p$, kde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $k \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Součin AB je tedy definován, pokud počet sloupců matice A je rovný počtu řádků matice B . Jinak definován není. To souhlasí s motivací součinu matic jako skládání zobrazení.

Prvek na místě (i, k) dostaneme jako standardní skalární součin i -tého řádku matice A a k -tého sloupce matice B . Pro řádky a sloupce matice zavedeme speciální značení.

Definice 4.7. Je-li A matice typu $m \times n$ a $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, pak $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ nazýváme *i -tý řádkový vektor matice A* a značíme jej A_{i*} . Podobně pro $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ definujeme *j -tý sloupcový vektor* jako $A_{*j} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$.

Prvek na místě (i, k) součinu AB je v tomto značení roven

$$c_{ik} = A_{i*}B_{*k} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}.$$

OBRAZEK

Příklad 4.8. Nad tělesem \mathbb{R} máme

$$(1, 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} (1, 2) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.9. Počítáme opět nad \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-2) & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & -1 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zobrazení f_A určené maticí A nad tělesem \mathbf{T} typu $m \times n$ jde napsat pomocí maticového součinu. Obrazem n -složkového vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ (nad \mathbf{T}) je m -složkový vektor $A\mathbf{x}$:

$$f_A : T^n \rightarrow T^m, \quad f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Příklad 4.10.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Použili jsme součtové vzorce pro goniometrické funkce. Výsledek není překvapující. Odvodili jsme, že násobené matice určují pořadě otočení o α a otočení o β . Výsledná matice tedy odpovídá složení otočení o β a otočení o α , což je otočení o $\alpha + \beta$ a to odpovídá výsledné matici. Pokud bychom uměli rychle určit matici odpovídající otočení o nějaký úhel (to se naučíme v kapitole ??), pak lze uvedený výpočet použít k rychlému odvození součtových vzorců pro \cos a \sin .

Příklad 4.11. Matice v předchozím příkladu mají tu vzácnou vlastnost, že komutují, tzn. nezáleží na pořadí, ve kterém je násobíme. To odpovídá geometricky tomu, že nezáleží, zda nejprve rotujeme o úhel α a pak o úhel β , nebo naopak. **Násobení matic ale obecně komutativní není.** Součin v opačném pořadí nemusí být dokonce vůbec definován, například pro matici A typu 2×3 a matici B typu 3×5 (nad stejným tělesem) je součin AB matice typu 2×5 , ale součin BA není definován.

Součin není obecně komutativní ani pro čtvercové matice stejného řádu. Například složíme-li osovou souměrnost v \mathbb{R}^2 podle osy x a otočení o $\pi/2$ dostaneme zobrazení odpovídající matici

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pokud naopak nejprve rovinu otočíme o $\pi/2$ a pak překloupíme kolem osy x , dostaneme zobrazení odpovídající matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geometrický popis vzniklých zobrazení přenecháme do cvičení.

Příklad 4.12. Podíváme se ještě jednou na příklad 3.11, kde jsme v \mathbb{R}^3 pomocí kvaternionů skládali rotaci kolem osy x o úhel $\pi/2$ s rotací kolem osy z o úhel π .

OBRÁZEK kladne orientace os

Obrazem vektoru $(x_1, x_2, x_3)^T$ při rotaci kolem osy x o úhel $\pi/2$ je $(x_1, x_3, -x_2)^T$, tedy tato rotace je rovna f_B pro

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obrazem vektoru $(x_1, x_2, x_3)^T$ při rotaci kolem osy z o úhel $\pi/2$ je $(x_1, x_3, -x_2)^T$, tedy tato rotace je rovna f_A pro

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Složení je zobrazení f_C , kde $C = AB$.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Z matice C určíme snadno obraz vektoru $(x_1, x_2, x_3)^T$:

$$f_C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Není ale vidět, že je to rotace kolem osy prvního oktantu o úhel $2\pi/3$ v kladném směru, jak jsme zjistili z kvaternionového přístupu.

4.2.3. Násobení jako provádění lineárních kombinací. Někdy je výhodný trochu jiný pohled na násobení matic. Násobíme-li matici $A = (a_{ij})$ maticí B , pak i -tý řádek výsledku získáme sečtením a_{i1} -násobku 1. řádku matice B , a_{i2} -násobku 2. řádku matice B , atd. Je to dobře vidět na příkladu 4.9. Toto pozorování a podobné pozorování pro sloupce často usnadní numerické počítání a je také důležité z teoretického hlediska. Snadněji jde vyjádřit pomocí pojmu lineární kombinace matic.

Definice 4.13. Jsou-li A_1, A_2, \dots, A_k matice stejného typu nad stejným tělesem \mathbf{T} a t_1, t_2, \dots, t_k prvky tělesa \mathbf{T} , pak součet

$$t_1 A_1 + t_2 A_2 + \dots + t_k A_k$$

se nazývá *lineární kombinace matic* A_1, A_2, \dots, A_k . Prvky $t_1, \dots, t_k \in T$ nazýváme *koeficienty lineární kombinace*.

Pozorování lze nyní přeformulovat tak, že i -tý řádek součinu AB je lineární kombinací řádků matice B s koeficienty v i -tém řádku matice A . Podobně, k -tý sloupec součinu AB je lineární kombinací sloupců matice A , kde koeficienty jsou v k -tém sloupci matice B :

Tvrzení 4.14. Je-li $A = (a_{ij})$ matice typu $m \times n$ a $B = (b_{jk})$ matice nad stejným tělesem typu $n \times p$, pak

- (1) pro každé $i = 1, \dots, m$ platí $(AB)_{i*} = a_{i1}B_{1*} + a_{i2}B_{2*} + \dots + a_{in}B_{n*} = A_{i*}B$.
- (2) pro každé $k = 1, \dots, p$ platí $(AB)_{*k} = b_{1k}A_{*1} + b_{2k}A_{*2} + \dots + b_{nk}A_{*n} = AB_{*k}$,

Důkaz. (1). Označíme $C = (AB) = (c_{ik})$ a vezmeme libovolné $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Pro libovolné $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ je k -tá složka řádkového vektoru na levé straně rovna c_{ik} a k -tá složka prostředního vektoru je $a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$, což je totéž podle definice součinu matic. Tento výraz je roven k -té složce řádkového vektoru $A_{i*}B$, rovněž podle definice součinu.

Část (2) se dokáže podobně. \square

Příklad 4.15. Podívejme se ještě jednou na součin v příkladu 4.9.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Podle první části tvrzení je první řádek výsledku součet 1-násobku řádkového vektoru $B_{1*} = (3, 5, 2, 4)$, 0-násobku $B_{2*} = (1, 1, -3, 2)$ a (-1) -násobku $B_{3*} =$

$(0, 2, -2, 1)$, to je $(3, 3, 4, 3)$. Druhý řádek výsledku je součtem prvních dvou řádku matice B , tedy $(4, 6, -1, 6)$. Tímto způsobem získáme výsledek

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

daleko rychleji. Používat druhou část tvrzení se v tomto případě příliš nevyplatí.

Obě části si rozmyslete na příkladu 4.11.

4.2.4. Jednotková matice. Neutrální prvky vzhledem k násobení tvoří tzv. jednotkové matice:

Definice 4.16. *Jednotková matice řádu n nad tělesem \mathbf{T} je čtvercová matice $I_n = (a_{ij})_{n \times n}$, kde $a_{ii} = 1$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a $a_{ij} = 0$ kdykoliv $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tj.*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Prvky jednotkové matice také označujeme pomocí symbolu δ_{ij} , tzn. *Kroneckerovo delta*. Ten se rovná 1, pokud $i = j$, a 0 jinak. Těleso, ve kterém pracujeme musí být zřejmé z kontextu.

Z tvrzení 4.14 nahlédneme, že $I_n A = A$, kdykoliv je součin definován, tj. pokud A má n řádků. Skutečně, i -tý řádek výsledku je rovný lineární kombinaci řádků matice A s koeficienty $0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0$, kde 1 je na pozici i . Tato kombinace je rovná i -tému řádku výsledku. Podobně z druhé části stejného tvrzení dostaneme, že $A I_n = A$, kdykoliv A má n sloupců.

Geometricky, jednotková matice I_n odpovídá identickému zobrazení z T^n do T^n .

4.3. Maticový zápis soustavy lineárních rovnic. Uvažujme soustavu m lineárních rovnic o n neznámých x_1, x_2, \dots, x_n s rozšířenou maticí $(A \mid \mathbf{b})$ nad tělesem \mathbf{T} .

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Označíme-li \mathbf{x} vektor neznámých, tj. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, pak máme

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Vektor \mathbf{Ax} je tedy sloupcový vektor vzniklý dosazením \mathbf{x} do levé strany soustavy. Vidíme, že soustavu rovnic lze psát ve tvaru

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

I elementární úpravy matic lze interpretovat maticově.

Tvrzení 4.17. *Nechť C je matice typu $m \times n$ nad tělesem \mathbf{T} , $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $i \neq j$ a $0 \neq t \in T$.*

- (1) Necht E je matice, která vznikne z I_m prohozením i -tého a j -tého řádku. Pak EC vznikne z C prohozením i -tého a j -tého řádku.

$$E = \begin{matrix} & & & i & & j & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ i & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ j & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- (2) Necht E je matice, která vznikne z I_m nahrazením prvku 1 na místě (i, i) prvkem t . Pak EC vznikne z C vynásobením i -tého řádku prvkem t .

$$E = \begin{matrix} & & & i & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ i & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- (3) Necht E je matice, která vznikne z I_m nahrazením prvku 0 na místě (i, j) prvkem t . Pak EC vznikne z C přičtením t -násobku j -tého řádku k i -tému řádku.

$$E = \begin{matrix} & & & i & & j & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ i & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Důkaz. Pozorování plyne z první části tvrzení 4.14. □

Definice 4.18. Maticím E z předchozího tvrzení říkáme *elementární matice*.

4.4. Vlastnosti maticových operací. V této části zformulujeme několik základních algebraických vlastností maticových operací. Téměř všechny z nich, snad až na asociativitu násobení, jsou očividné. Nicméně používání maticové algebry může například značně zpřehlednit a zkrátit technické výpočty.

Sčítání matic má podobné vlastnosti jako sčítání v tělese. Musíme dát ale pozor, abychom sčítali matice stejných typů.

Tvrzení 4.19. Jsou-li A, B, C matice stejného typu $m \times n$ nad stejným tělesem \mathbf{T} , pak platí

- (1) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- (2) $A + 0_{m \times n} = A$,
- (3) $A + (-A) = 0_{m \times n}$,
- (4) $A + B = B + A$.

Důkaz. Matice mají stejný typ, takže výrazy $(A + B) + C$ a $A + (B + C)$ jsou definovány a výsledkem jsou matice typu $m \times n$. Prvek na místě (i, j) v matici $(A + B) + C$ se rovná $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$, na místě (i, j) v matici $A + (B + C)$ se rovná $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$. Protože sčítání prvků tělesa je asociativní (axiom (S1) v definici tělesa), prvky na stejném místě v maticích $(A + B) + C$ a $A + (B + C)$ se rovnají. Proto platí $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Ostatní vlastnosti sčítání se dokáží podobně. \square

Násobení matic a násobení v tělese mají některé společné vlastnosti. Násobení je asociativní (pokud násobíme matice správných typů) a jednotkové matice jsou neutrálním prvkem. Navíc platí oboustranný distributivní zákon. Rozdíl oproti násobení v tělese je ve dvou podstatných vlastnostech. Násobení matic není komutativní (ani pro čtvercové matice stejného řádu), jak jsme si již všimli. Dále není pravda, že ke každé nenulové matici existuje matice inverzní.

Tvrzení 4.20. *Jsou-li A, B matice typu $m \times n$, C matice typu $n \times p$ a D, E matice typu $p \times q$, kde všechny matice jsou nad stejným tělesem \mathbf{T} , pak*

- (1) $(BC)D = B(CD)$,
- (2) $I_m A = A I_n = A$,
- (3) $(A + B)C = AC + BC$, $C(D + E) = CD + CE$.

Důkaz. Dokážeme asociativitu násobení. Nejprve si všimneme, že výrazy $(BC)D$ a $B(CD)$ na obou stranách jsou definovány a vyjdou matice typu $m \times q$. Na levé straně je BC matice typu $m \times p$, takže součin matic BC a D je definován a výsledkem je matice typu $m \times q$. Podobně se ukáže, že na pravé straně vyjde matice typu $m \times q$.

Veźmeme nyní libovolné $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $l \in \{1, 2, \dots, q\}$ a spočítáme prvek na místě (i, l) v matici $(BC)D$. Označíme-li $BC = (e_{ij})$, pak hledaný prvek je

$$\sum_{k=1}^p e_{ik} d_{kl} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} c_{jk} \right) d_{kl} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n b_{ij} c_{jk} d_{kl} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p b_{ij} c_{jk} d_{kl} .$$

Ve druhé úpravě jsme použili distributivitu platnou v tělese \mathbf{T} a v poslední úpravě jsme prohodili sumy, což můžeme díky asociativitě sčítání v \mathbf{T} . (Zde si můžeme všimnout, že prohazování sum jde interpretovat jako sčítání všech prvků matice dvojím způsobem – po řádcích a po sloupcích.)

Označíme-li $(CD) = (f_{jl})$, pak prvek na místě (i, l) v matici $B(CD)$ je

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} f_{jl} = \sum_{j=1}^n b_{ij} \left(\sum_{k=1}^p c_{jk} d_{kl} \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p b_{ij} c_{jk} d_{kl} .$$

Prvky na stejných místech v maticích $(BC)D$ a $B(CD)$ se rovnají, takže $(BC)D = B(CD)$.

Zbýlé dvě vlastnosti přenecháme do cvičení. \square

Asociativitu lze (zatím pouze neformálně) odůvodnit geometricky: Víme, že násobení matic odpovídá skládání zobrazení a skládání zobrazení je asociativní.

Díky asociativitě můžeme pro přirozené číslo n definovat n -tou mocninu čtvercové matice vztahem

$$A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n \times} .$$

Výsledek totiž nezávisí na uzávorkování.

Další tvrzení hovoří o vztahu násobení matice prvkem tělesa s operacemi sčítání a násobení. Důkazy jsou snadné a přenecháme je jako cvičení.

Tvrzení 4.21. *Jsou-li A, B matice nad tělesem \mathbf{T} typu $m \times n$, C matice nad \mathbf{T} typu $n \times p$ a $a, b \in T$, pak*

- (1) $(a + b)A = aA + bA$,
- (2) $a(A + B) = aA + aB$,
- (3) $a(bA) = (ab)A$,
- (4) $1A = A$,
- (5) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$.

K poslednímu bodu poznamenejme, že výraz $(Ba)C$ není definován, protože není definován výraz Ba .

Nakonec zformulujeme vztah transpozice a zbylých operací.

Tvrzení 4.22. *Jsou-li A, B matice nad tělesem \mathbf{T} typu $m \times n$, C je matice typu $n \times p$ nad \mathbf{T} a $a \in T$, pak*

- (1) $(A + B)^T = A^T + B^T$,
- (2) $(aA)^T = aA^T$,
- (3) $(A^T)^T = A$.
- (4) $(BC)^T = C^T B^T$.

Příklad 4.23. Čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu n se nazývá *symetrická*, pokud $a_{ij} = a_{ji}$ pro libovolné $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ekvivalentně, A je symetrická, pokud $A^T = A$. Pomocí vlastností z tvrzení 4.22 ukážeme, že pro libovolnou čtvercovou matici A je matice $B = 2AA^T + A^T A$ symetrická:

$$\begin{aligned} B^T &= (2AA^T + A^T A)^T = (2AA^T)^T + (A^T A)^T = 2(AA^T)^T + (A^T A)^T = \\ &= 2(A^T)^T A^T + A^T (A^T)^T = 2AA^T + A^T A = B . \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že $B = B^T$, matice B je tedy symetrická. Mlčky jsme používali i vlastnosti z tvrzení 4.21, kdy jsme například nepsali závorky ve výrazu $2AA^T$.

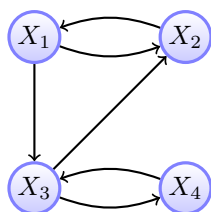
Příklad 4.24. Vlastnosti (p1) až (p4) v důkazu věty 2.14 se dokazují pohodlně pomocí vlastností maticových operací. Podívejme se na (p2).

- (p2) Jsou-li vektory \mathbf{w}, \mathbf{z} řešením soustavy $(A \mid \mathbf{o})$, pak je vektor $\mathbf{w} + \mathbf{z}$ řešením soustavy $(A \mid \mathbf{o})$.

Skutečně, pokud \mathbf{w}, \mathbf{z} řeší soustavu $(A \mid \mathbf{o})$, čili $A\mathbf{w} = \mathbf{o}$ a $A\mathbf{z} = \mathbf{o}$, pak $A(\mathbf{w} + \mathbf{z}) = A\mathbf{w} + A\mathbf{z} = \mathbf{o}$, neboli $\mathbf{w} + \mathbf{z}$ řeší stejnou soustavu. Použili jsme distributivitu.

4.5. Další aplikace.

Viděli jsme, že maticové operace se hodí na práci s některými zobrazeními (jako třeba rotace) a na kompaktní popis soustav lineárních rovnic. Uvedeme některé další příklady využití.

OBRÁZEK 5. Letecká spojení mezi městy X_1 , X_2 , X_3 a X_4 z části 4.5.2

4.5.1. *Rekurentní rovnice.* Asi jste se už setkali s Fibonacciho posloupností definovanou předpisem

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{i+2} = a_{i+1} + a_i \text{ pro každé } i = 1, 2, \dots$$

Chtěli bychom najít explicitní vzorec pro výpočet n -tého členu.

Z definice posloupnosti nahlédneme, že dvojice sousedních členů splňuje vztah

$$\begin{pmatrix} a_{i+2} \\ a_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ a_i \end{pmatrix}$$

(Pro ověření tohoto vztahu použijeme tvrzení 4.14.) Označíme-li C matici 2×2 vystupující v tomto vztahu, vidíme, že

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_4 \\ a_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \end{pmatrix} = C \left(C \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) = C^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

a indukci dostaneme

$$\begin{pmatrix} a_{i+2} \\ a_{i+1} \end{pmatrix} = C^i \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = C^i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podstatným způsobem zde využíváme asociativitu násobení matic. K výpočtu n -tého členu Fibonacciho posloupnosti tedy stačí umět mocnit matice. To se naučíme v kapitole o vlastních číslech a vektorech. Vyjde možná překvapivý vzorec

$$a_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}},$$

kde $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ je hodnota zlatého řezu.

4.5.2. *Počet cest.* Na obrázku ?? jsou vyznačena letecká spojení mezi městy X_1 , X_2 , X_3 , X_4 . Vypočítáme počet spojení s nejvýše čtyřmi přestupy mezi každou dvojicí měst.

Spojení mezi městy uspořádáme do matice $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$ nad \mathbb{R} tak, že a_{ij} definujeme rovné 1, pokud z X_i vede cesta do X_j , a $a_{ij} = 0$ jinak.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní se zamyslíme, jaký je význam prvku na místě (i, j) v matici A^2 . Tento prvek je rovný $a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + a_{i3}a_{3j} + a_{i4}a_{4j}$. Všimněte si, že k -tý člen součtu je rovný jedné právě tehdy, když z X_i vede spojení do X_k a z X_k vede spojení do X_j , a je rovný nule jinak. Prvek na místě (i, j) v matici A^2 je proto rovný počtu cest z X_i do X_j s právě jedním přestupem.

Podobně nahlédneme, že prvek na místě (i, j) v matici A^n je rovný počtu cest z X_i do X_j s právě $(n - 1)$ přestupy. Hledaný počet cest s nejvýše čtyřmi přestupy z X_i do X_j je tedy prvek na místě (i, j) v matici

$$\begin{aligned} A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 7 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 7 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.6. Blokové matice.

Někdy je výhodné nahlížet na matici jako rozdělenou do bloků a operace, zejména násobení, provádět blokově.

Vezměme dvě matice nad tělesem \mathbf{T} : matici A typu $m \times n$ a matici B typu $n \times p$. Dále nechť m_1, \dots, m_r , n_1, \dots, n_s a p_1, \dots, p_t jsou přirozená čísla, pro která

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_r, \quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_s \quad \text{a} \quad p = p_1 + \dots + p_t.$$

Matici A rozdělíme podélně na prvních m_1 řádků, dalších m_2 řádků, atd. až posledních m_r řádků, a a vertikálně na prvních n_1 sloupců, dalších n_2 sloupců, atd. až posledních n_s sloupců. Matice A se nyní skládá z rs bloků $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1s}, A_{21}, \dots, A_{rs}$.

$$A = \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix} \left(\begin{array}{c|c|c|c} n_1 & n_2 & \dots & n_s \\ \hline A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rs} \end{array} \right)$$

Každý blok A_{ij} je matice typu $m_i \times n_j$.

Podobně, matici B rozdělíme podélně na oddíly velikosti n_1, n_2, \dots, n_s a vertikálně na oddíly velikosti p_1, p_2, \dots, p_t . Matici B tím rozdělíme na st bloků B_{11}, \dots, B_{st} :

$$B = \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_s \end{matrix} \left(\begin{array}{c|c|c|c} p_1 & p_2 & \dots & p_t \\ \hline B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1t} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2t} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{s1} & B_{s2} & \dots & B_{st} \end{array} \right).$$

Součin $C = AB$ lze potom rozdělit do bloků následovně.

$$C = AB = \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix} \left(\begin{array}{c|c|c|c} p_1 & p_2 & \dots & p_t \\ \hline C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1t} \\ \hline C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2t} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline C_{s1} & C_{s2} & \dots & C_{st} \end{array} \right),$$

kde pro každé $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ a $k \in \{1, 2, \dots, t\}$ platí

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^s A_{ij} B_{jk} .$$

Důkaz, který pouze vyžaduje správně si napsat jednotlivé prvky ve všech maticích a jejich blocích, přenecháme do cvičení.

Příklad 4.25. Matice A, B z příkladu 4.12 o rotacích v prostoru mají přirozenou blokovou strukturu.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Příklad 4.26. Najdeme A^2 pro matici A nad \mathbb{Z}_7 .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Označíme-li

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

máme

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\begin{array}{cc|c} I_2 & B \\ 0_{3 \times 2} & I_3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} I_2 & B \\ 0_{3 \times 2} & I_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} II + B0 & IB + BI \\ 0I + I0 & 0B + II \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I & 2B \\ 0 & I \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pro přehlednost jsme od druhé úpravy vynechávali indexy u jednotkových a nulových matic.

4.7. Regulární matice. V poslední části této kapitoly se budeme zabývat otázkou, kdy lze čtvercovou matici (nebo příslušné zobrazení) invertovat.

4.7.1. Geometrický a algebraický pohled. Začneme geometrickým pohledem. Jak víme, čtvercová matice A nad tělesem \mathbf{T} řádu n určuje zobrazení

$$f_A : T^n \rightarrow T^n, \quad f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} .$$

K tomuto zobrazení existuje inverzní zobrazení $T^n \rightarrow T^n$ právě tehdy, když f_A je bijekce. To se dá říct tak, že pro každý aritmetický vektor $\mathbf{b} \in T^n$ existuje právě jeden vektor při zobrazení f_A , tj. právě jeden aritmetický vektor $\mathbf{x} \in T^n$ takový, že $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. V takovém případě říkáme, že A je *regulární*.

Definice 4.27. Čtvercová matice A nad tělesem \mathbf{T} řádu n se nazývá *regulární*, pokud je příslušné zobrazení f_A bijekce, ekvivalentně, pokud má soustava rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě jedno řešení pro každou pravou stranu $\mathbf{b} \in T^n$.

Čtvercová matice, která není regulární, se nazývá *singulární*.

Příklad 4.28. Z geometrického náhledu vidíme, že matice odpovídající rotaci kolem počátku a zrcadlení podle přímky procházející počátkem jsou regulární, protože tato zobrazení jsou bijektivní. Matice odpovídající projekci na osu x v \mathbb{R}^2 je singularní, protože toto zobrazení není bijekcí (není dokonce ani prosté ani na celý prostor \mathbb{R}^2).

Je-li A regulární, tedy f_A je bijekce, pak musí existovat inverzní zobrazení $g : T^n \rightarrow T^n$, tj. zobrazení, které splňuje $f_A \circ g = g \circ f_A = \text{id}_{T^n}$. Za okamžik ukážeme, že g je opět tvaru f_X pro jistou čtvercovou matici X . Protože skládání zobrazení odpovídá součinu matic a identické zobrazení odpovídá jednotkové matici, vztahy $f_A \circ f_X = f_X \circ f_A = \text{id}_{T^n}$ se ekvivalentně přepíší na $f_{AX} = f_{XA} = f_{I_n}$, a protože různé matice určují různá zobrazení (viz cvičení), dostáváme ekvivalentně $AX = XA = I_n$. Z tohoto důvodu říkáme matici X *matice inverzní k A* .

Definice 4.29. Čtvercová matice A nad tělesem \mathbf{T} řádu n se nazývá *invertovatelná*, pokud existuje čtvercová matice X nad \mathbf{T} řádu n taková, že $AX = XA = I_n$. Matici X nazýváme *inverzní matice k A* a označujeme ji A^{-1} .

Několik poznámek, než ověříme, že zavedené pojmy regulární a invertibilní matice splývají.

- Zdůrazněme, že zavedené pojmy se týkají **pouze čtvercových matic**.
- Z geometrického i algebraického pohledu vidíme, že pro matice obecně neplatí obdoba vlastností (N3) z definice tělesa o existenci inverzních prvků. Například projekce na osu x chápaná jako zobrazení z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 je zobrazení f_A pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Toto zobrazení není bijekce (není dokonce ani prosté, ani na), takže A není regulární.

Z algebraického pohledu: Neexistuje matice X taková, že $AX = I_2$ (protože druhý řádek matice AX je vždy nulový), ani matice Y taková, že $YA = I_2$ (protože druhý sloupec matice YA je vždy nulový). Říkáme, že matice A nemá matici *zprava inverzní* ani matici *zleva inverzní*.

- Inverzní matice k invertovatelné matici je určena jednoznačně. Pokud jsou totiž X, Y dvě inverzní matice k A , pak

$$X = XI_n = X(AY) = (XA)Y = I_n Y = Y.$$

Je-li matice invertovatelná, pak je regulární. Pokud totiž $AX = XA = I_n$ pak $f_A f_X = f_X f_A = f_{I_n} = \text{id}_{I_n}$, tedy k f_A existuje oboustrané inverzní zobrazení $f_A^{-1} = f_X$, tedy f_A je bijekce. Opačnou implikaci dokážeme tím, že popíšeme postup jak inverzní matici nalézt. Připomeňme, že vlastně dokazujeme, že inverzní zobrazení k f_A je opět tvaru f_X pro jistou matici X .

4.7.2. *Hledání pravého inverzu.* Pokusme se nyní k dané regulární čtvercové matici A řádu n najít matici X takovou, že $AX = I_n$. (Matici X nazýváme maticí zprava inverzní k A .) Budeme provádět obecnou diskuzi a zároveň ji ilustrovat na příkladu reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Pro $i = 1, 2, \dots, n$ srovnáme i -té sloupce ve vztahu $AX = I_n$ a využijeme $(AX)_{*i} = AX_{*i}$ (viz tvrzení 4.14). Dostáváme, že rovnice $AX = I_n$ je ekvivalentní s

$$AX_{*1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad AX_{*2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad AX_{*n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešíme tedy n soustav lineárních rovnic se stejnou maticí A s různými pravými stranami. Protože A je regulární, soustavy mají právě jedno řešení. V našem případě řešíme soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soustavy vyřešíme.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 \\ 2 & 9 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 3 & | & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 2 & 9 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Matice inverzní zprava je tedy

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Provedeme nyní dvě modifikace tohoto postupu.

Protože je matice všech n -soustav stejná, totiž A , je možné všechny řešit stejnými úpravami. Proto je můžeme řešit najednou tak, že pravé strany napíšeme vedle matice soustavy všechny vedle sebe a upravíme celou matici do odstupňovaného tvaru. Dopočtení zpětnou substitucí pak proběhne jako předtím, zvlášť pro každou pravou stranu. V našem případě

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 2 & 9 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & 3 & | & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Před druhou modifikací si uvědomme, jak vypadá odstupňovaný tvar matice A po Gaussově eliminaci. Protože předpokládáme, že rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má právě jedno řešení pro každé \mathbf{b} , nemůžou při řešení soustav $AX_{*1} = (1, 0, \dots, 0)^T, \dots$ existovat volné proměnné (pokud by existovaly, pak $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ buď nemá žádné řešení, nebo každé volbě volné proměnné odpovídá řešení, takže by soustava měla více než jedno řešení). Tím pádem musí pro odstupňovaný tvar matice A platit $r = n$ a $k_1 = 1, k_2 = 2, \dots, k_n = n$. Jinými slovy, odstupňovaný tvar je horní trojúhelníková matice s nenulovými všemi prvky na diagonále. (Pro čtvercové matice je tato podmínka zřejmě ekvivalentní tomu, že odstupňovaný tvar neobsahuje nulový řádek.)

Ke slíbené modifikaci. Po převedení soustav na odstupňovaný tvar budeme dále pokračovat v řádkových úpravách tak, aby na levé straně vznikla jednotková matice. To lze provést díky tomu, že odstupňovaný tvar je horní trojúhelníková matice s nenulovými prvky na diagonále. Postup je takový, že nejprve „doeliminujeme“ druhý sloupec – přičtením vhodného násobku druhého řádku k prvnímu docílíme, že hodnota na pozici $(1, 2)$ je nula. Pak vynulujeme přičtením vhodných násobků

pozice $(1, 3)$ a $(2, 3)$, atd. Tímto vznikne diagonální matice s nenulovými prvky na diagonále, ze které umíme udělat jednotkovou vynásobením řádků vhodnými prvky.

V našem případě máme

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) . \end{aligned}$$

Soustavu s jednotkovou maticí je velmi snadné vyřešit – řešením je zřejmě přímo pravá strana. Postup lze nyní shrnout takto: řádkovými úpravami převedeme matici $(A | I_n)$ do tvaru $(I_n | X)$ a vpravo si přečteme výslednou matici zprava inverzní k A .

4.7.3. Jiný pohled. Ukázali jsme, že k regulární matici existuje matice inverzní zprava. V řeči zobrazení, našli jsme X takovou, že $f_A \circ f_X = \text{id}_{T^n}$. Protože f_A je bijekce, lze z tohoto vztahu usoudit (viz cvičení ?? v kapitole 1), že $f_X \circ f_A = \text{id}_{T^n}$, což v řeči matic znamená, že $XA = I_n$.

My ukážeme, že platí $XA = I_n$, jiným způsobem, který se nám jednak bude hodit k důkazu hlavní věty 4.30 a který rovněž poskytuje alternativní pohled na odvozený postup

$$(A | I_n) \sim \dots \sim (I_n | X) .$$

Podívejme se na tento postup maticově. V tvrzení 4.17 jsme nahlédli, že elementární řádková úprava odpovídá násobení jistou maticí zleva. Úpravy lze tedy psát

$$(A | I_n) \sim E_1(A | I_n) \sim E_2(E_1(A | I_n)) \sim \dots ,$$

kde E_1, E_2, \dots jsou elementární matice příslušných úprav. Vezmeme v úvahu asociativitu násobení a pravidlo o násobení po blocích, můžeme postup psát

$$\begin{aligned} (A | I_n) \sim (E_1 A | E_1 I_n) &= (E_1 A | E_1) \sim (E_2 E_1 A | E_2 E_1) \sim \dots \sim \\ &\sim (E_k \dots E_2 E_1 A | E_k \dots E_2 E_1) = (I_n | X) . \end{aligned}$$

Srovnáním pravých bloků dostaneme $X = E_k \dots E_2 E_1$, takže srovnáním levých bloků dostaneme $XA = I_n$. Máme $XA = AX = I_n$, tedy X je inverzní matice k A . Rovněž vidíme, že X je součinem elementárních matic.

4.7.4. Matice inverzní zprava a zleva. Pro zobrazení $f : X \rightarrow X$ obecně neplatí, že f je bijekce, pokud f je prosté, ani neplatí, že f je bijekce, pokud f je na, viz ???. To je rozdíl oproti situaci, kdy množina X je konečná. Ve větě 4.30 si všimneme, že zobrazení tvaru f_A (pro čtvercovou maticí A) jsou „spořádaná“ v tom smyslu, že kdykoliv f_A je prosté nebo na, pak f_A je bijekce.

Z kapitoly 1 víme, že f je prosté právě tehdy, když k f existuje zobrazení inverzní zleva, a f je na právě tehdy, když k f existuje zobrazení inverzní zprava¹. Maticově tedy lze zmíněnou spořádanost přeformulovat tak, že kdykoliv má čtvercová matice A matici X inverzní zprava nebo zleva, pak již je A invertovatelná a platí $X = A^{-1}$.

¹to je axiom výběru

4.7.5. *Charakterizace.* Následující věta shrnuje různé ekvivalentní charakterizace regularity – geometrické charakterizace, charakterizace pomocí odstupňovaného tvaru a algebraické charakterizace pomocí invertovatelnosti a elementárních matic.

Věta 4.30. *Nechť A je čtvercová matice nad tělesem \mathbf{T} řádu n . Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) A je regulární.
- (2) Zobrazení f_A je na.
- (3) Zobrazení f_A je prosté.
- (4) Soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ má jediné řešení ($\mathbf{x} = \mathbf{o}$).
- (5) Gaussova eliminace převede matici A do horního trojúhelníkového tvaru s nenulovými prvky na diagonále (ekvivalentně odstupňovaného tvaru bez nulových řádků).
- (6) Matici A lze převést elementárními řádkovými (ekvivalentně sloupcovými) úpravami do jednotkové matice I_n .
- (7) A je invertovatelná.
- (8) Existuje čtvercová matice X řádu n taková, že $AX = I_n$.
- (9) Existuje čtvercová matice X řádu n taková, že $XA = I_n$.
- (10) A je součinem elementárních matic.

Důkaz. Implikace (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) a (1) \Rightarrow (2) jsou triviální.

Argumenty pro (2) nebo (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (7) \Rightarrow (1) byly již předvedeny výše, takže je jen stručně shrneme. U (6) budeme pracovat s řádkovou verzí.

(4) \Rightarrow (5). Řešíme-li soustavu rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ Gaussovou eliminací a získáme odstupňovaný tvar s alespoň jednou volnou proměnnou, pak má soustava více řešení (u homogenní soustavy se ani nemůže stát, že řešení neexistuje). Podobně ukážeme (2) \Rightarrow (5). Pokud odstupňovaný tvar matice A má nulový řádek, pak soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nemá pro nějakou pravou stranu řešení, takže f_A není na. Toto si rozmyslete podrobně jako cvičení.

(5) \Rightarrow (6). Matici A převedeme do horní trojúhelníkové matice s nenulovými prvky na diagonále a pak doeliminujeme postupně druhý sloupec, třetí sloupec, atd. Získáme diagonální matici a stačí vynásobit řádky vhodnými prvky tělesa.

(6) \Rightarrow (7). Použijeme postup $(A \mid I_n) \sim \dots \sim (I_n \mid X)$. Díváme-li se na tento postup jako na řešení n -soustav lineárních rovnic, máme $AX = I_n$. Díváme-li se na něj jako na násobení elementárními maticemi zleva, získáme $XA = I_n$.

(7) \Rightarrow (1). Předvedeme algebraický argument, již jsme viděli geometrický. Platí-li $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, pak $A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, takže rovnice má nejvýše jedno řešení, a to $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Na druhou stranu, tento vektor je skutečně řešením, protože $A(A^{-1}\mathbf{b}) = \mathbf{b}$.

Nyní jsme dokázali, že tvrzení (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) jsou ekvivalentní. Ekvivalenci regularity s podmínkou (10) ukážeme v tvrzení 4.39.

Triviálně platí (7) \Rightarrow (8), (9), takže stačí dokázat třeba (8) \Rightarrow (2) a (9) \Rightarrow (3).

(8) \Rightarrow (2). Je-li $AX = I_n$, pak $f_A f_X = f_{I_n} = \text{id}_{T^n}$, takže k zobrazení f_A existuje zobrazení inverzní zprava, tedy f_A je na. Implikace (9) \Rightarrow (2) se dokáže obdobně. \square

Příklad 4.31. Najdeme matici inverzní k matici A nad tělesem \mathbb{Z}_5 , pokud existuje.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řádkovými úpravami upravujeme $(A \mid I_3)$:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Takže A je regulární a platí

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.32. Najdeme matici inverzní k matici A nad tělesem \mathbb{Z}_2 , pokud existuje.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opět řádkovými úpravami upravujeme $(A \mid I_n)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Odstupňovaný tvar matice A není horní trojúhelníková matice s nenulovými prvky na diagonále, takže A je singularní podle (1) \Leftrightarrow (5) z věty 4.30 a inverzní matice neexistuje (podle bodu (7) stejné věty).

Chápeme-li A jako matici nad tělesem \mathbb{Z}_3 nebo \mathbb{R} , pak je regulární.

Příklad 4.33. Matice

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

nad \mathbb{R} je pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ regulární a inverzní matice je

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

To lze nahlédnout z úvahy, že f_A je rotace o α , což je bijekce a inverzním zobrazení je rotace o $-\alpha$.

Příklad 4.34. Dalším příkladem, kdy je výhodnější se trochu zamyslet, než ihned začít počítat podle odvozeného algoritmu, je výpočet inverzní matice k reálné matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Hledáme matici X takovou, že $AX = I_3$. Znovu si uvědomíme, že při násobení matice X zleva maticí A děláme lineární kombinace řádků matice X , kde koeficienty jsou v řádcích matice A (tvrzení 4.14.(1)). Druhý řádek matice A nám říká, že druhý řádek výsledku (to je řádek $(0, 1, 0)$) je $1/2$ -násobek prvního řádku matice X . Z toho okamžitě vidíme, že první řádek matice X je $(2, 0, 0)$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}.$$

Z posledního řádku matice A vidíme, že třetí řádek výsledku (to je $(0, 0, 1)$) je roven 1 -násobku prvnímu řádku matice X (to už víme, že je $(2, 0, 0)$) plus $1/3$ -násobek třetího řádku matice X . Z toho snadno dopočteme, že třetí řádek X je $(0, -6, 3)$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ ? & ? & ? \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Z prvního řádku matice A pak podobně dopočítáme druhý řádek matice X a získáme

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Snadno ověříme, že X je skutečně matice inverzní.

Jako cvičení proveďte podobnou úvahu sloupcově pro rovnici $XA = I_3$ a řádkově pro rovnici $XA = I_3$.

Příklad 4.35. Pokud A je regulární matice, pak každá soustava rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má podle definice právě jedno řešení. Vynásobením obou stran maticí A^{-1} zleva získáme explicitní vzorec:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Například řešením soustavy rovnic nad \mathbb{Z}_5

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

je vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} = A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde A^{-1} jsme spočítali v příkladu 4.31.

Na praktické řešení se tento vzorec nehodí, protože Gaussova eliminace a zpětná substituce je rychlejší. Vzorec se hodí pro teoretické úvahy, nebo pokud řešíme mnoho soustav s jednou pravou stranou, i když i v tomto případě spíše používáme jiné techniky, jako LU-rozklad.

Příklad 4.36. V odstavci 4.5.1 jsme odvodili, že pro členy Fibonacciho posloupnosti a_1, a_2, \dots platí

$$\begin{pmatrix} a_{i+2} \\ a_{i+1} \end{pmatrix} = C^i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matici C lze zapsat ve tvaru

$$C = XDX^{-1}, \quad \text{kde } D = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 1 - \varphi \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi - 1 & -\varphi \end{pmatrix}.$$

Tento vztah můžeme samozřejmě ověřit. Jak jej lze získat se dozvíme v kapitole o vlastních číslech a vlastních vektorech.

Když už jej známe, můžeme vypočítat n -tou mocninu matice C :

$$C^n = \underbrace{(XDX^{-1})(XDX^{-1}) \dots (XDX^{-1})}_{n \times} = XD^nX^{-1}$$

Mocninu diagonální matice vypočítáme snadno a dosazením pak získáme vzorec pro n -tý člen.

Důležité příklady regulárních matic tvoří elementární matice. To je v souladu se skutečností, že elementární úpravy jsou vratné.

Tvrzení 4.37. *Každá elementární matice je regulární, navíc inverzní matice k regulární matici je opět elementární.*

Důkaz. K důkazu můžeme přímo najít matice inverzní, jsou jimi matice úprav, které vrací příslušnou elementární úpravu. Pak pouze využijeme ekvivalenci invertovatelnosti a regulárnosti z charakterizační věty 4.30. \square

4.7.6. *Regularita a maticové operace.* Nakonec se podíváme na vztah invertování a maticových operací.

Tvrzení 4.38. *Jsou-li A, B regulární matice nad stejnými tělesem \mathbf{T} stejného řádu a $t \in T$ nenulový prvek, pak platí*

- (1) A^{-1} je regulární a platí $(A^{-1})^{-1} = A$,
- (2) A^T je regulární a platí $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,
- (3) $(tA)^T$ je regulární a platí $(tA)^{-1} = t^{-1}A^{-1}$,
- (4) AB je regulární a platí $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Důkaz. Důkaz můžeme provést tak, že ukážeme, že popsané matice jsou skutečně matice inverzní (stačí z jedné strany). Například $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, protože $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I$. \square

Body (1), (3), (4) v tvrzení mají geometrickou interpretaci, kterou si rozmyslete jako cvičení. Transponování budeme umět geometricky interpretovat až později.

Pro sčítání podobné tvrzení neplatí, stačí se podívat na součet $A + (-A)$, kde matice A (a tím pádem i $-A$) je regulární, například $A = I_n$.

Pomocí bodu (4) dokončíme důkaz charakterizační věty 4.30.

Tvrzení 4.39. *Čtvercová matice A je regulární právě tehdy, když jde napsat jako součin elementárních matic.*

Důkaz. Každá elementární matice je regulární podle tvrzení 4.37, takže podle bodu (4) v předchozím tvrzení je libovolný součin elementárních matic regulární. To dokazuje implikaci zprava doleva.

Naopak, je-li A regulární, pak ji lze elementárními řádkovými úpravami převést na jednotkovou matici (podle bodu (5) charakterizační věty 4.30). Elementární řádkové úpravy se dají napsat jako násobení zleva elementární maticí, takže existují elementární matice E_1, E_2, \dots, E_k takové, že

$$E_k \dots E_2 E_1 A = I_n,$$

kde n je řád A . Protože elementární matice jsou regulární (podle tvrzení 4.37), tedy i invertibilní, můžeme vztah upravit na

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1} .$$

Teď jsme hotovi, protože inverzní matice k elementárním maticí jsou elementární (opět podle tvrzení 4.37). \square

Příklad 4.40. Z důkazu také vidíme postup, jak rozklad na elementární matice nalézt. Najdeme následující matice nad \mathbb{Z}_5 .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matici převedeme elementárními řádkovými úpravami na jednotkovou a zaznamenejme si úpravy.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matice úprav jsou

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ E_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Takže máme

$$\begin{aligned} A &= E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1} E_5^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Cvičení

1. Co musí splňovat matice A, B , aby byly definovány oba součiny AB i BA .
2. Geometricky interpretujte násobení matice prvkem tělesa a sčítání matic.
3. Geometricky popište zobrazení, které vznikne složením osové souměrnosti v \mathbb{R}^2 podle osy x a otočením o $\pi/2$. Srovnajte s algebraickým výpočtem v příkladu na násobení matic. Stejnou úlohu řešte pro složení v opačném pořadí.
4. Najděte matici, která odpovídá osové souměrnosti podle přímky $y = ax$, kde $a \in \mathbb{R}$.
5. Dokažte, že součin dvou horních trojúhelníkových matic stejného řádu je opět horní trojúhelníková matice. Podobně pro dolní trojúhelníkové matice i diagonální matice.
6. Najděte nenulovou reálnou matici A typu 2×2 , ke které neexistuje matice inverzní (tj. neexistuje matice B taková, že $AB = BA = I_2$). Interpretujte geometricky.

7. Pro matice neplatí obdoba tvrzení 3.3.(6): Najděte reálnou čtvercovou matici $A \neq 0_{2 \times 2}$, pro kterou $A^2 = 0_{2 \times 2}$. Interpretujte geometricky.

8. Dokažte vlastnosti (p1), (p3) a (p4) z důkazu věty 2.14.

9. Vypočítejte n -tou mocninu matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Ukažte, že násobení elementární maticí zprava odpovídá elementární sloupcové úpravě.

11. Ukažte, že pro čtvercové matice stejného řádu nad stejným tělesem obecně neplatí vztah $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Nalezněte podobný, ale platný vztah.

12. Dokončete důkaz tvrzení 4.20.

13. Dokažte tvrzení 4.21.

14. Dokažte tvrzení 4.22.

15. Matice se nazývá antisymetrická, pokud $A = -A^T$. Je pravda, že antisymetrická matice má vždy na hlavní diagonále nuly? (Pozor na vlastnosti tělesa, ve kterém pracujeme!)

16. Dokažte vzorec pro blokové násobení matic.

17. Najděte A^n pro matici z příkladu 4.26.

18. Nechť $A \neq B$ jsou matice stejného typu nad stejným tělesem. Dokažte, že příslušná zobrazení f_A a f_B jsou různá.

19. Navrhněte alternativní postup na převod regulární matice na jednotkovou řádkovými úpravami tak, aby po eliminaci sloupce byly rovnou všechny členy, kromě diagonálního, nulové.

20. Spočítejte znovu příklad 4.34 alternativními postupy navržené v tomto příkladu.

21. Ke každé elementární matici najděte příslušnou matici inverzní, viz tvrzení 4.37.

22. Předpokládejme, že odstupňovaný tvar matice A obsahuje nulový řádek. Dokažte, že potom existuje pravá strana \mathbf{b} taková, že soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nemá ani jedno řešení (tj. f_A není na).

23. Dokažte implikaci (2) \Rightarrow (5) z věty 4.30.

24. Dokažte přímo implikaci (9) \Rightarrow (3) z věty 4.30.

25. Dokažte tvrzení 4.38 a vysvětlete geometrický význam.

26. Dokažte, že n -tá mocnina diagonální matice je diagonální a na diagonále jsou n -té mocniny původních prvků. Dokončete výpočet n -tého členu Fibonacciho posloupnosti v příkladu 4.36.

5. VEKTOROVÉ PROSTORY

Cíl. *Zobecněním aritmetických vektorů definujeme základní pojem lineární algebry, vektorový prostor. Budeme zkoumat důležité pojmy jako podprostor, lineární obal, množina generátorů, lineární závislost a nezávislost, báze a dimenze. Motivací je porozumět geometrickým vztahům mezi vektory a podprostory (rovné útvary procházející počátkem) například v rovině a v prostoru. To nám také umožní lépe porozumět řešení soustav lineárních rovnic.*

5.1. Definice, příklady a základní vlastnosti. V kapitole o tělesech jsme si všimli, jaké vlastnosti čísel využíváme při řešení lineárních rovnic, a reálná čísla jsme zobecnili na tělesa. Odměnou za větší abstraktnost je větší použitelnost. Stejně věty, například o soustavách rovnic nebo invertování matic, můžeme použít jak pro reálná čísla, tak pro komplexní čísla, tělesa \mathbb{Z}_p , nebo také například pro racionální funkce.

V této kapitole zobecníme \mathbb{R}^n , tedy množinu n -tic reálných čísel, na *vektorový prostor*. Vektorový prostor nad \mathbb{R} tvoří množina (jejíž prvky nazýváme vektory), operace sčítání vektorů a operace násobení vektoru reálným číslem. Tyto ingredience musí splňovat sadu axiomů, které jsou ve shodě s představou vektoru jako „šipky“ a operací prováděných podle obrázku ??.

OBRAZEK

Obecněji definujeme vektorový prostor nad tělesem \mathbf{T} , kde místo násobení vektoru reálným číslem máme operace násobení vektoru prvkem T .

Definice 5.1. Nechť \mathbf{T} je těleso. *Vektorovým prostorem \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T}* rozumíme množinu V spolu s binární operací $+$ na V (tj. $+$ je zobrazení z $V \times V$ do V) a operací \cdot násobení vektorů prvky tělesa (tj. \cdot je zobrazení z $T \times V$ do V), které splňují následující axiomy.

(vS1) Pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ platí $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

(vS2) Existuje $\mathbf{o} \in V$ takový, že pro libovolné $\mathbf{v} \in V$ platí $\mathbf{v} + \mathbf{o} = \mathbf{v}$.

(vS3) Pro každé $\mathbf{v} \in V$ existuje $-\mathbf{v} \in V$ takové, že $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{o}$.

(vS4) Pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

(vN1) Pro libovolné $\mathbf{v} \in V$ a $a, b \in T$ platí $a \cdot (b \cdot \mathbf{v}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{v}$.

(vN2) Pro libovolné $\mathbf{v} \in V$ platí $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

(vD1) Pro libovolné $\mathbf{v} \in V$ a $a, b \in T$ platí $(a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$.

(vD2) Pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a $a \in T$ platí $a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$.

Prvkům V říkáme *vektory* a prvky T nazýváme *skaláry*.

„Operace“ \cdot není binární operací ve smyslu definice 3.1, protože násobíme prvky dvou různých množin. Místo $a \cdot \mathbf{v}$, kde $a \in T$ a $\mathbf{v} \in V$, píšeme často $a\mathbf{v}$. Nikdy neprohazujeme pořadí, tj. výrazy $\mathbf{v} \cdot a$ a $\mathbf{v}a$ nejsou definované. Jak je běžné u těles, úmluva je, že \cdot má přednost před $+$, proto nemusíme ve výrazech na pravé straně v axiomech (vD1) a (vD2) psát závorky.

V definici je implicitně obsaženo, že součet $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ je definován pro každou dvojici vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a násobení vektoru skalárem $a\mathbf{v}$ je definováno pro každé $a \in T, \mathbf{v} \in V$. Z definice rovněž vyplývá, že množina V je neprázdná, protože musí obsahovat podle (vS2) alespoň nulový vektor.

Axiomy (vS1), (vS2), (vS3), (vS4) jsou stejné jako axiomy pro sčítání v tělese. Stejně jako v tělese platí, že nulový prvek a opačné prvky jsou určeny jednoznačně. Máme teď dvě různé nuly, 0 v tělese \mathbf{T} a \mathbf{o} ve vektorovém prostoru \mathbf{V} . Axiom (vN1) připomíná asociativitu násobení a (vN2) existenci jednotkového prvku, i když zde je podstatný rozdíl v tom, že násobíme prvky různých množin. Axiomy (vD1) a (vD2) připomínají distributivitu.

5.1.1. *Aritmetické vektorové prostory a další příklady.* Základním příkladem vektorového prostoru je množina n -tic prvků tělesa.

Definice 5.2. Nechť \mathbf{T} je těleso a n je přirozené číslo. *Aritmetickým vektorovým prostorem nad \mathbf{T} dimenze n* rozumíme množinu všech n -složkových aritmetických (sloupcových) vektorů T^n spolu s přirozenými operacemi $+$ a \cdot (definovanými jako v definici 2.2). Značíme \mathbf{T}^n .

To, že aritmetický vektorový prostor je skutečně vektorovým prostorem jsme formulovali a dokázali obecně pro matice v tvrzení 4.19 a tvrzení 4.21.

Aritmetické vektorové prostory (a jejich nekonečně dimenzionální varianty, viz cvičení) jsou velmi konkrétní, zároveň ale v jistém smyslu „jediné“ příklady vektorových prostorů. Uvidíme, že v každém vektorovém prostoru lze zvolit soustavu souřadnic (tzv. bázi), a místo vektorů můžeme počítat s jejich souřadnicemi stejně jako v aritmetickém vektorovém prostoru. Omezit se ale na studium aritmetických vektorových prostorů není výhodné z mnoha důvodů.

Jedním z nich je, že vektorový prostor (hlavně nad \mathbb{R}) si představujeme jako množinu šipek na nekonečném papíru, v prostoru, apod. Z tohoto prostoru se stává aritmetický vektorový prostor až po volbě nějaké soustavy souřadnic, kdežto operace s vektory na této volbě nezávisí. Žádná volba souřadnic nemusí být přirozená, nebo různé volby mohou být výhodné v různých situacích. Například množina všech řešení rovnice $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$ je rovina, tedy „v podstatě totéž co \mathbb{R}^2 “, ale asi by bylo těžké argumentovat, že nějaká konkrétní volba souřadnic je ta nejlepší. Přesný význam výrazů typu „v podstatě totéž co \mathbb{R}^2 “ uvidíme později.

Dalším důvodem je, že u některých vektorových prostorů není ihned patrné, že se v podstatě jedná jen o n -tice prvků tělesa. Navíc i když to někdy vidět je, není vždy výhodné se na prostory takto dívat, například proto, že na dané množině máme i jiné operace, které jsou při takovém pohledu nepřehledné, apod. Uvedeme několik příkladů vektorových prostorů.

- Množina všech polynomů stupně nejvýše 173 s reálnými koeficienty (nebo jiného daného maximálního stupně, s koeficienty v jiném tělese) s běžnými operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem. Tento vektorový prostor je „v podstatě“ \mathbb{R}^{174} , protože na polynom $a_0 + a_1x + \dots + a_{173}x^{173}$ se můžeme dívat jako na 174-ici koeficientů $(a_0, a_1, \dots, a_{174})^T$ a operace jsou při tomto pohledu stejné jako v \mathbb{R}^{174} .
- Množina všech matic typu 7×15 nad tělesem \mathbb{Z}_3 s běžnými operacemi $+$ a \cdot (nebo jiného daného typu nad jiným tělesem). Vzhledem k operacím $+$ a \cdot se tato množina chová stejně jako množina $7 \cdot 15 = 105$ -tic, takže tento vektorový prostor je „v podstatě“ \mathbb{Z}_3^{105} . (To, že množina matic daného typu nad daným tělesem je vektorový prostor jsem formulovali v tvrzení 4.19 a tvrzení 4.21.) Když matice daného typu sčítáme a násobíme skalárem, můžeme se na ně dívat jako na n -tice prvků tělesa, ale tento pohled není

výhodný například když matice interpretujeme jako zobrazení, násobíme je nebo invertujeme.

Pro prostory matic zavedeme značení.

Definice 5.3. Vektorový prostor matic nad \mathbf{T} typu $m \times n$ s běžnými operacemi sčítání a násobení prvkem T značíme $\mathbf{T}^{m \times n}$.

Aritmetický vektorový prostor \mathbf{T}^n lze chápat jako $\mathbf{T}^{n \times 1}$.

Následují další příklady vektorových prostorů.

- Množina všech podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, 11\}$ (nebo jiné dané množiny X) spolu s operací symetrické diference, tj. $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, je vektorový prostor nad \mathbb{Z}_2 . Násobení skalárem je $0 \cdot A = \emptyset, 1 \cdot A = A$ pro libovolné $A \subseteq X$. Jako cvičení dokažte, že toto je skutečně vektorový prostor, a vysvětlete, proč je tento prostor „v podstatě“ \mathbb{Z}_2^{11} .
- Množina komplexních čísel je vektorovým prostorem nad \mathbb{R} (s běžnými operacemi). Vzhledem ke sčítání a násobení reálným číslem se komplexní číslo $a + bi$ chová stejně jako dvojice $(a, b)^T$, takže z tohoto pohledu je \mathbb{C} v podstatě \mathbb{R}^2 . Pokud chápeme komplexní čísla jako vektorový prostor nad \mathbb{R} , zapomínáme vlastně na násobení v \mathbb{C} , pamatujeme si pouze sčítání a násobení reálným číslem.
- Obecněji, každé těleso \mathbf{T} je vektorový prostor nad libovolným svým podtělesem \mathbf{S} . (Podtěleso tělesa \mathbf{T} je podmnožina, která tvoří spolu se stejnými operacemi těleso.) Například \mathbb{R} je vektorový prostor nad \mathbb{Q} , ale není vidět, že reálná čísla jdou vnímat jako n -tice racionálních. Dimenze n je zde nespočetná a potřebovali bychom zobecnění definice aritmetického prostoru (viz cvičení). U tohoto příkladu souřadná soustava dokonce nejde v jistém smyslu zkonstruovat.

U jiných příkladů je situace přehlednější, například $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ s běžnými operacemi je vektorový prostor nad \mathbb{Q} . Skutečně, číslo $a + b\sqrt{2}$ lze chápat jako dvojici $(a, b)^T \in \mathbb{Q}^2$. Není ale na první pohled patrné, že každá dvojice odpovídá právě jednomu číslu, důkaz je přenechán jako cvičení.

Vlastnosti těchto vektorových prostorů, jako například dimenze, jsou důležité například v již zmíněných problémech kvadratury kruhu, trisekce úhlu, zdvojení krychle a „neřešitelnosti“ rovnic pátého stupně.

- Množina všech funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{R} tvoří spolu s přirozenými operacemi vektorový prostor nad \mathbb{R} . Podobnými příklady jsou množina všech spojitých funkcí na \mathbb{R} , množina diferencovatelných funkcí, množina polynomiálních funkcí, nebo třeba množina spojitých funkcí na intervalu $[0, 1]$.

Toto jsou důležité příklady vektorových prostorů, kterými se budete dále zabývat hlavně v jiných předmětech (například funkcionální analýze). My se budeme soustředit hlavně na tzv. prostory konečné dimenze.

5.1.2. *Jednoduché vlastnosti.* Formulujeme některé vlastnosti všech vektorových prostorů. Dokazují se podobně jako příslušné vlastnosti pro tělesa v tvrzení 3.3, proto důkaz přenecháme jako cvičení.

Tvrzení 5.4. V každém vektorovém prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} platí

- (1) nulový vektor \mathbf{o} je určen jednoznačně,

- (2) rovnice $\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$ má pro pevná $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ právě jedno řešení, speciálně, opačný vektor \mathbf{v} je vektorem \mathbf{v} určen jednoznačně,
- (3) $0\mathbf{v} = \mathbf{o}$ pro libovolný vektor $\mathbf{v} \in V$,
- (4) $a\mathbf{o} = \mathbf{o}$ pro libovolný skalár $a \in T$,
- (5) je-li $a\mathbf{v} = \mathbf{o}$, pak buď $a = 0$ nebo $\mathbf{v} = \mathbf{o}$,
- (6) $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$ pro libovolný vektor $\mathbf{v} \in V$, speciálně $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$,

Axiomy vektorového prostoru i uvedené jednoduché důsledky budeme používat zcela automaticky. Je dobré si při prvním čtení důkazů v této kapitole podrobně rozmyslet všechny kroky a použité axiomy.

5.2. Podprostory.

Prvním pojmem, který budeme pro vektorové prostory studovat, je *podprostor*.

Definice 5.5. Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor nad \mathbf{T} . Vektorový prostor \mathbf{U} nad \mathbf{T} je *podprostorem* \mathbf{V} , pokud $U \subseteq V$ a operace $+$ a \cdot v \mathbf{U} se shodují s příslušnými operacemi ve \mathbf{V} . Skutečnost, že \mathbf{U} je podprostorem \mathbf{V} zapisujeme $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$.

Protože operace v podprostoru \mathbf{U} jsou určené původními operacemi ve \mathbf{V} nemusíme je uvádět a stačí říkat, že množina U tvoří podprostor prostoru \mathbf{V} . K tomu aby U byl podprostor \mathbf{V} , musí být U neprázdná množina uzavřená na operace sčítání a násobení skalárem. Naopak, pokud U splňuje tyto podmínky, pak U spolu s příslušnými operacemi tvoří podprostor.

Tvrzení 5.6. Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor nad \mathbf{T} . Neprázdná podmnožina U množiny V je podprostorem \mathbf{V} právě tehdy, když

- („uzavřenost na sčítání“) pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ platí $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$ a
- („uzavřenost na násobení skalárem“) pro libovolné $\mathbf{v} \in U$ a $a \in T$ platí $a\mathbf{v} \in U$.

Důkaz. Pokud $U \leq \mathbf{V}$, pak U musí být zřejmě uzavřená na sčítání a násobení skalárem.

Předpokládejme, že U je neprázdná množina uzavřená na sčítání a násobení skalárem. Pak opačný vektor k $\mathbf{u} \in U$ je v U , protože $-\mathbf{u}$ lze napsat jako $(-1) \cdot \mathbf{u}$. Rovněž nulový vektor vektorového prostoru \mathbf{V} je prvkem U , protože U je neprázdná a platí $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o}$. Všechny axiomy nyní vyplývají z toho, že jsou splněny ve \mathbf{V} . \square

Množina tvořená pouze prvkem \mathbf{o} je vždy podprostorem, rovněž celý prostor \mathbf{V} je podprostorem \mathbf{V} . Těmto podprostorům říkáme *triviální*, ostatní podprostory nazýváme *netriviální* nebo *vlastní*. Zdůrazněme pozorování z důkazu předchozího tvrzení — nulový vektor je obsažen v každém podprostoru.

5.2.1. *Podprostory* \mathbb{R}^n . Uvažujme podprostor $U \leq \mathbb{R}^2$. Pokud U obsahuje nenulový vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, pak musí obsahovat všechny jeho násobky: $\{t\mathbf{x} : t \in \mathbb{R}\} \subseteq U$. Geometricky tvoří tyto násobky přímku procházející bodem \mathbf{x} a počátkem. Pokud U obsahuje ještě jiný nenulový vektor \mathbf{y} , který neleží na přímce $\{t\mathbf{x} : t \in \mathbb{R}\}$, pak opět obsahuje všechny jeho násobky, a z toho již geometricky nahlédneme, že $U = \mathbb{R}^2$, protože každý vektor z \mathbb{R}^2 je součtem nějakého vektoru na přímce $\{t\mathbf{x} : t \in \mathbb{R}\}$ a nějakého vektoru na přímce $\{t\mathbf{y} : t \in \mathbb{R}\}$.

OBRAZEK

Formální důkaz tohoto tvrzení přenecháme jako cvičení, později budeme podobné věci umět dokazovat snadno a rychle pomocí pojmu báze.

Ukázali jsme, že kromě triviálních podprostorů $\{(0,0)^T\}$ a \mathbb{R}^2 jsou jedinými kandidáty na podprostory \mathbb{R}^2 množiny tvaru $\{t\mathbf{x} : t \in \mathbb{R}\}$. Snadno ověříme, že pro libovolný vektor $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ je tato množina uzavřená na sčítání a násobení skalárem. Podprostory \mathbb{R}^2 jsou tedy $\{\mathbf{o}\}$, přímky procházející počátkem a celý prostor \mathbb{R}^2 .

Podobnou úvahou nalezneme všechny podprostory \mathbb{R}^3 . Pokud $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in U$, pak U obsahuje celou přímku $\{t\mathbf{x} : t \in \mathbb{R}\}$. Pokud U obsahuje ještě jiný vektor \mathbf{y} , pak $\{t\mathbf{y} : t \in \mathbb{R}\} \subseteq U$ a pak obsahuje celou rovinu určenou \mathbf{x}, \mathbf{y} a počátkem, což je rovina

$$\{s\mathbf{x} + t\mathbf{y} : s, t \in \mathbb{R}\} .$$

Obsahuje-li U ještě nějaký jiný vektor, pak $U = \mathbb{R}^3$. Podprostory \mathbb{R}^3 jsou tedy triviální podprostory, přímky procházející počátkem a roviny procházející počátkem.

I když vizuální představa prostoru \mathbb{R}^n pro $n > 3$ chybí, intuice stále je, že podprostory jsou rovné útvary procházející počátkem.

5.2.2. Podprostory \mathbf{T}^n . Nad jinými tělesy již nemáme tak dobrou vizuální představu aritmetického prostoru, ale stále můžeme podobné úvahy jako výše provádět algebraicky. Tak například stále platí (viz cvičení), že podprostory \mathbf{T}^2 jsou triviální podprostory a „přímky“ procházející počátkem, tj. množiny tvaru $\{t\mathbf{x} : t \in T\}$, kde $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in T^2$.

OBRAZEK přímky v Z_5^2

S podprostory \mathbb{R}^n jsme se již setkali při řešení homogenních soustav rovnic. Vlastnosti (p1), (p2) z věty 2.14 vlastně přesně říkají, že množina všech řešení homogenní soustavy rovnic nad \mathbb{R} s maticí A typu $m \times n$ je podprostorem \mathbb{R}^n . Tento podprostor zobecníme na případ libovolného tělesa.

Definice 5.7. Nechť A je matice nad tělesem \mathbf{T} typu $m \times n$. Pak množinu všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí A nazýváme *jádro matice A* a značíme $\text{Ker } A$, tzn.

$$\text{Ker } A = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{o}\} .$$

Tvrzení 5.8. Pro libovolnou matici A nad \mathbf{T} typu $m \times n$ platí $\text{Ker } A \leq \mathbf{T}^n$.

Důkaz. Podle tvrzení 5.6 stačí ověřit, že množina $\text{Ker } A$ je neprázdná a uzavřená na sčítání a násobení skalárem.

$\text{Ker } A$ obsahuje nulový vektor, takže je neprázdná.

Pokud $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Ker } A$, pak podle definice $\text{Ker } A$ je $A\mathbf{u} = \mathbf{o} = A\mathbf{v}$. Z distributivity násobení matic nyní dostaneme $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$, takže $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \text{Ker } A$.

Pokud $\mathbf{u} \in \text{Ker } A$ a $a \in T$, pak $A(a\mathbf{u}) = a(A\mathbf{u}) = a\mathbf{o} = \mathbf{o}$, tedy $a\mathbf{u} \in \text{Ker } A$. \square

Geometricky je $\text{Ker } A$ vzorem nulového vektoru při zobrazení f_A . Vzor jiného vektoru (neboli množina řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$) podprostor netvoří, viz cvičení. Tato množina je sice rovný útvar, ale neprochází počátkem. Takovým množinám budeme později říkat afinní podprostory \mathbf{T}^n .

5.2.3. Další příklady podprostorů. Množina spojitých funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{R} je podprostorem vektorového prostoru všech funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{R} , protože množina spojitých funkcí je uzavřená na operace sčítání a násobení reálným číslem. Podobně, prostor diferencovatelných funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{R} je podprostorem prostoru spojitých funkcí. Množina

reálných čísel je podprostorem prostoru komplexních čísel, kde obě tělesa chápeme jako vektorové prostory nad \mathbb{Q} .

5.2.4. *Lineární kombinace, podprostor generovaný množinou, množina generátorů.* Už několikrát jsme potkali množiny vektorů typu $t\mathbf{u} + s\mathbf{v} + \dots$, kde $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$ jsou nějaké vektory. Naposledy při popisu podprostorů \mathbb{R}^3 . Takovým výrazům se říká lineární kombinace vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$. Již jsme tento pojem definovali pro matice (tedy např. i pro aritmetické vektory) v definici 4.13.

Definice 5.9. Jsou-li $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektory z vektorového prostoru \mathbf{V} nad \mathbf{T} a t_1, t_2, \dots, t_k prvky \mathbf{T} , pak součet

$$t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \dots + t_k\mathbf{v}_k$$

se nazývá *lineární kombinace vektorů* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$. Skaláry t_1, t_2, \dots, t_k nazýváme *koefficienty lineární kombinace*.

Lineární kombinaci prázdného systému vektorů definujeme jako nulový vektor.

Zdůrazněme, že v lineární kombinaci máme vždy konečný počet vektorů.

Příklad 5.10. Lineární kombinaci vektorů \mathbf{u}, \mathbf{v} s koefficienty 2,3, tj. vektor $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$, je vlastně „vektor o souřadnicích (2, 3) vzhledem k soustavě souřadnic \mathbf{u}, \mathbf{v} “. Přesný význam dáme této větě později, ale smysl je snad zřejmý z obrázku.

OBRAZEK - lineární kombinace $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$

Lineární kombinace se vyskytují v popisu podprostorů, například množina $\{t\mathbf{x} + s\mathbf{y} : s, t \in \mathbf{T}\}$ je množinou všech lineárních kombinací vektorů \mathbf{x}, \mathbf{y} . Obecně definujeme *lineární obal množiny* X jako množinu všech lineárních kombinací prvků X . Tato množina tvoří vždy podprostor.

Definice 5.11. Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor nad \mathbf{T} a $X \subseteq \mathbf{V}$. Pak *lineárním obalem množiny* X rozumíme množinu $\langle X \rangle$ všech lineárních kombinací prvků X , tj. množinu

$$\langle X \rangle = \left\{ t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \dots + t_k\mathbf{v}_k : k \in \mathbb{N}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in X, t_1, \dots, t_k \in \mathbf{T} \right\}$$

Geometricky, lineární obal je „rovný útvar procházející počátkem“ obsahující dané vektory.

Příklad 5.12. $\langle \emptyset \rangle = \{\mathbf{o}\}$ – lineární obal prázdné množiny je triviální prostor tvořený nulovým vektorem.

Příklad 5.13. V prostoru \mathbb{R}^3 máme

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 9 \\ 12 \\ 15 \end{array} \right) \right\rangle &= \left\langle \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \right) \right\rangle = \\ &= \left\{ s \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right) + t \left(\begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \right) : s, t \in \mathbb{R} \right\} . \end{aligned}$$

Inkluze \subseteq v první rovnosti plyne z toho, že každou lineární kombinaci vektorů $(1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T, (9, 12, 15)^T$ lze psát jako lineární kombinace vektorů $(1, 2, 3)^T,$

$(4, 5, 6)^T$, protože vektor $(9, 12, 15)^T$ lze napsat jako lineární kombinaci prvních dvou vektorů:

$$\begin{aligned} t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} &= \\ &= t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t_3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = \\ &= (t_1 + t_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (t_2 + 2t_3) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Geometricky, lineární obal daných tří vektorů je rovina procházející počátkem, třetí vektor leží v rovině určené prvními dvěma vektory.

V zápisech lineární kombinace množiny vektorů dané výčtem jako výše vynecháváme pro přehlednost závorky $\{, \}$ označující množinu. Někdy říkáme „lineární obal vektorů ...“, místo formálně přesného „lineární obal množiny vektorů $\{\dots\}$ “.

Tvrzení 5.14. *Pro libovolný vektorový prostor \mathbf{V} nad \mathbf{T} a libovolnou $X \subseteq V$ je $\langle X \rangle$ podprostorem \mathbf{V} .*

Důkaz. Je třeba ověřit, že $\langle X \rangle$ je neprázdna množina uzavřená na sčítání a násobení libovolným $r \in T$.

Předně $\langle X \rangle$ je neprázdna, protože obsahuje lineární kombinaci prázdné množiny, tj. vektor \mathbf{o} .

Součet lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in X$ s koeficienty $s_1, s_2, \dots, s_k \in T$ a lineární kombinace vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_l \in X$ s koeficienty t_1, t_2, \dots, t_l je lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l \in X$ s koeficienty $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_l$.

Konečně, r -násobkem lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in X$ s koeficienty s_1, s_2, \dots, s_k je lineární kombinace stejných vektorů s koeficienty rs_1, rs_2, \dots, rs_k . \square

Obsahuje-li podprostor $U \leq \mathbf{V}$ množinu X , pak, díky uzavřenosti na sčítání a násobení skalárem, obsahuje i všechny lineární kombinace prvků X . To znamená, že $\langle X \rangle$ je „nejmenší“ podprostor, který obsahuje X . (Slovo nejmenší je zde třeba chápat vzhledem k inkluzi, tj. tak, že jakýkoliv podprostor obsahující X obsahuje $\langle X \rangle$.) Proto se rovněž hovoří o podprostoru generovaném X .

Definice 5.15. Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor nad \mathbf{T} a $X \subseteq V$. Pokud $\langle X \rangle = V$, pak říkáme, že X je *množina generátorů prostoru \mathbf{V}* , nebo říkáme, že X *generuje \mathbf{V}* .

Jinými slovy, množina $X \subseteq V$ generuje \mathbf{V} , pokud každý vektor ve V lze zapsat jako lineární kombinaci vektorů z X .

Příklad 5.16. Prázdna množina generuje triviální prostor $\{\mathbf{o}\}$.

Množina $\{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$ generuje pro libovolné \mathbf{T} prostor \mathbf{T}^2 , protože každý vektor $(x_1, x_2)^T$ v T^2 lze napsat jako lineární kombinaci vektorů $(1, 0)^T$ a $(0, 1)^T$ takto:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy také libovolná množina obsahující vektory $(1, 0)^T$ a $(0, 1)^T$ je množinou generátorů \mathbf{T} .

Množina $\{(1, 2, 3)^T\}$ generuje podprostor $\mathbf{V} = \langle (1, 2, 3)^T \rangle$ vektorového prostoru \mathbb{R}^3 . Jiné množiny generátorů stejného prostoru \mathbf{V} jsou například $\{(2, 4, 6)^T\}$, $\{(2, 4, 6)^T, (3, 6, 9)^T\}$, V . Množina $\{(1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T\}$ není množinou generátorů \mathbf{V} , protože není ani jeho podmnožinou.

Množina $\{1, x, x^2\}$ je množinu generátorů prostoru všech reálných polynomů stupně nejvýše 2.

Příklad 5.17. V části 5.2.1 jsme si geometricky zdůvodnili, že pro každý netriviální podprostor \mathbb{R}^3 existuje množina generátorů, která má jeden, nebo dva prvky.

Příklad 5.18. Definujeme \mathbb{R}^ω jako prostor všech posloupností reálných čísel s operacemi prováděnými po složkách, podobně jako s aritmetickými vektory. Množina

$$X = \{(1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, 0, \dots), (0, 0, 1, 0, \dots), \dots\}$$

negeneruje prostor \mathbb{R}^ω . Jako cvičení zjistěte lineární obal této množiny.

Zajímavým podprostorem \mathbb{R}^ω je například množina Y všech posloupností (a_1, a_2, \dots) splňujících $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pro každé $n \geq 3$. Mezi prvky tohoto podprostoru patří Fibonacciho posloupnost.

5.2.5. *Sloupcový a řádkový prostor matice.* Ke každé matici máme přirozeně přiřazeny dvě skupiny aritmetických vektorů, řádkové a sloupcové. Prostorům, které generují, říkáme řádkový a sloupcový prostor.

Definice 5.19. Nechť A je matice nad \mathbf{T} typu $m \times n$. *Sloupcovým prostorem matice* A rozumíme podprostor \mathbf{T}^m generovaný sloupci matice a značíme jej $\text{Im } A$.

$$\text{Im } A = \langle A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n} \rangle \leq \mathbf{T}^m$$

Řádkovým prostorem matice A rozumíme sloupcový prostor matice A^T , tj.

$$\text{Im } A^T = \langle A_{1*}^T, A_{2*}^T, \dots, A_{m*}^T \rangle \leq \mathbf{T}^n$$

Příklad 5.20. Pro reálnou matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

je

$$\begin{aligned} \text{Im } A &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \text{Im } A^T &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle . \end{aligned}$$

Jak poznáme, že vektor $\mathbf{b} \in T^m$ leží v $\text{Im } A$? Stačí si připomenout, že $A\mathbf{x}$ je lineární kombinace sloupců matice A , kde koeficienty jsou složky vektoru \mathbf{x} . Takže $\mathbf{b} \in \text{Im } A$ právě když rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení, přičemž koeficienty lineární kombinace jsou složky libovolného řešení. Také vidíme, že $\text{Im } A$ je obraz (obor hodnot) zobrazení f_A , což ospravedlňuje zavedené značení $\text{Im } A$:

$$\text{Im } A = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in T^n\} = \{f_A(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in T^n\} = f_A(T^n) .$$

Příklad 5.21. Pro matici A z předchozího příkladu zjistíme, zda $(0, 1)^T \in \text{Im } A$ a $(1, 0)^T \in \text{Im } A$. Protože máme dvě soustavy rovnic se stejnou maticí, můžeme je řešit najednou.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Pro pravou stranu $(1, 0)^T$ dostaneme volbou 0 za volnou proměnnou řešení $\mathbf{x} = (7, -2, 0)^T$, což dává vyjádření

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Koeficienty nejsou určeny jednoznačně, například volbou 2 za volnou proměnnou dostaneme $\mathbf{x} = (-55, 16, 2)^T$, což odpovídá vyjádření

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -55 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 16 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pro vektor $(0, 1)^T$ dostaneme například vyjádření

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tím jsme ukázali, že oba vektory $(1, 0)^T, (0, 1)^T$ patří do $\text{Im } A$, tím pádem $\text{Im } A = \mathbb{R}^2$, protože z příkladu 5.16 víme, že $\langle (1, 0)^T, (0, 1)^T \rangle = \mathbb{R}^2$.

Leží vektor $(2, 1, 1)^T$ v prostoru $\text{Im } A^T$?

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -9 & -7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -52 \end{array} \right)$$

Soustava nemá řešení, takže vektor $(2, 1, 1)^T$ v $\text{Im } A^T$ neleží.

5.2.6. Prostory přidružené k matici a elementární úpravy. Důležitým pozorováním je, že řádkové elementární úpravy nemění lineární obal řádků (tj. prostor $\text{Im } A^T$). Obecněji, násobení zleva regulární maticí nemění $\text{Im } A^T$ a násobení zprava nemění $\text{Im } A$. Násobení zleva obecně mění $\text{Im } A$ tak, že sloupcový prostor vzniklé matice je lineární obal R -násobků původních sloupců.

Dalším prostorem přidruženým k matici A je $\text{Ker } A$. Ten se řádkovými úpravami (nebo násobením zleva regulární maticí) rovněž nemění. To již vlastně víme: $\text{Ker } A$ je množina řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, ta se nemění provedením elementární úpravy. Maticově, $\text{Ker}(EA) = \text{Ker } A$ pro každou elementární matici E . Protože však každá regulární matice R je součinem elementárních matic, máme $\text{Ker}(RA) = \text{Ker } A$. V důkazu následujícího tvrzení zvolíme rychlejší postup.

Tvrzení 5.22. *Nechť A je matice nad \mathbf{T} typu $m \times n$ a R je regulární matice řádu m . Pak*

$$\text{Ker } A = \text{Ker}(RA), \quad \text{Im } A^T = \text{Im}(RA)^T, \quad \text{Im}(RA) = \langle RA_{*1}, RA_{*2}, \dots, RA_{*n} \rangle.$$

Důkaz. Třetí část je důsledkem vztahu $(RA)_{*i} = RA_{*i}$ z tvrzení o násobení matic vnímaném jako tvoření lineárních kombinací (tvrzení 4.14).

Je-li $\mathbf{x} \in \text{Ker } A$, pak $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Vynásobením R zleva získáme $RA\mathbf{x} = R\mathbf{o} = \mathbf{o}$, čili $\mathbf{x} \in \text{Ker}(RA)$. Naopak, je-li $\mathbf{x} \in \text{Ker}(RA)$, pak $RA\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Protože R je regulární, máme $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ (použijeme například bod (4) charakterizace regulárních matic z věty 4.30), ekvivalentně $\mathbf{x} \in \text{Ker } A$.

K důkazu druhé rovnosti si opět uvědomíme, že násobení matice A zleva maticí R odpovídá provádění lineárních kombinací na řádky matice A . Proto každý řádek matice RA je lineární kombinací řádků matice A , takže $\text{Im}(RA)^T \subseteq \text{Im}A^T$. Stejnou úvahou, kde místo A uvažujeme matici RA a místo R uvažujeme R^{-1} získáme $\text{Im}(R^{-1}RA)^T \subseteq \text{Im}(RA)^T$, což je po úpravě druhá inkluze. \square

Pro sloupcové úpravy máme obdobně například $\text{Im}A = \text{Im}(AR)$, pokud R je regulární matice řádu n . Důkaz můžeme provést buď užitím sloupcových úprav místo řádkových, nebo přechodem k transponované matici: Použitím předchozí věty pro A^T místo A a R^T místo R dostaneme $\text{Im}(A^T)^T = \text{Im}(R^T A^T)^T$, což je po úpravě dokazovaný vztah.

Důsledek 5.23. *Elementární řádkové úpravy nemění $\text{Ker}A$ a $\text{Im}A^T$. Elementární sloupcové úpravy nemění $\text{Ker}A^T$ a $\text{Im}A$.*

5.3. Lineární závislost a nezávislost.

5.3.1. *Definice.* Množina aritmetických vektorů $(1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T, (9, 12, 15)^T$ generuje ten samý podprostor $\mathbf{V} \leq \mathbb{R}^3$ jako množina $(1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T$, jak jsme viděli v příkladu 5.13. Důvod je ten, že třetí vektor lze napsat jako lineární kombinaci prvních dvou vektorů. Množinám vektorů, ve které žádné takové lineární závislosti nelze najít říkáme *lineárně nezávislé*. Z technických důvodů definujeme lineární (ne)závislost pro posloupnosti vektorů, nikoliv množiny.

Definice 5.24. Necht \mathbf{V} je vektorový prostor. Posloupnost vektorů $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ ve \mathbf{V} se nazývá *lineárně závislá*, pokud některý z vektorů \mathbf{v}_i je lineární kombinací ostatních vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_k$.

V opačném případě říkáme, že posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ je *lineárně nezávislá*.

(Lineární (ne)závislost definujeme i pro nekonečné skupiny vektorů, to ale necháme do samostatného oddílu.)

Užitím pojmu lineárního obalu můžeme definici přeformulovat tak, že posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ je lineárně závislá, pokud existuje $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tak, že

$$\mathbf{v}_i \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_k \rangle,$$

ekvivalentně

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_k \rangle.$$

Geometricky to znamená, že \mathbf{v}_i leží v „rovném útvaru“ určeném zbylými vektory.

Naopak, posloupnost je lineárně nezávislá, když žádné takové i neexistuje, jinými slovy, když každý vektor \mathbf{v}_i „něco přidá“ k lineárnímu obalu zbylých vektorů.

Často budeme hovořit poněkud nepřesně a říkat, že vektory ... jsou lineárně nezávislé, apod.

Příklad 5.25. Posloupnost $((1, 2, 3)^T, (9, 12, 15)^T, (4, 5, 6)^T)$ ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 je lineárně závislá, protože druhý vektor lze napsat jako lineární kombinaci zbylých dvou:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Geometricky to znamená, že vektor $(9, 12, 15)^T$ leží v rovině určené zbylými dvěma vektory.

Posloupnost vektorů $(1, 0, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0, 0)^T$, $(0, 0, 1, 0)^T$, $(0, 0, 0, 1)^T$ v prostoru \mathbb{Z}_3^4 je lineárně nezávislá, protože, žádný z vektorů není lineární kombinací ostatních: lineární obal druhého až čtvrtého vektoru je množina $\{(0, a, b, c)^T : a, b, c \in \mathbb{Z}_3^4\}$, do níž vektor $(1, 0, 0, 0)^T$ nepatří. Podobně pro ostatní vektory.

Posloupnost vektorů $(\cos x \sin x + 5, 1, \sin(2x) + 3)$ v prostoru reálných funkcí reálné proměnné (nad \mathbb{R}) je lineárně závislá, protože $\sin(2x) + 3$ lze napsat jako $2 \cdot (\cos x \sin x + 5) + (-7) \cdot 1$.

Několik snadných obecných pozorování:

- Kdykoliv posloupnost obsahuje nulový vektor, je lineárně závislá, protože nulový vektor je lineární kombinací prázdné skupiny vektorů.
- Jednočlenná posloupnost (\mathbf{v}) je lineárně nezávislá právě tehdy, když $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$.
- Kdykoliv posloupnost obsahuje dva stejné vektory, je lineárně závislá. Obecněji, pokud je některý z vektorů násobkem jiného, je posloupnost lineárně závislá. **Neplatí to ale naopak.** V posloupnosti $((1, 2, 3)^T, (9, 12, 15)^T, (4, 5, 6)^T)$ z předchozího příkladu není žádný z vektorů násobkem jiného, přesto je posloupnost lineárně závislá.
- Lineární závislost nebo nezávislost posloupnosti nezávisí na pořadí prvků.
- Podposloupnost lineárně nezávislé posloupnosti je lineárně nezávislá. Jinak řešeno, pokud je podposloupnost lineárně závislá, je lineárně závislá i původní posloupnost.

Pokud bychom ověřovali, že nějaká posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ je lineárně nezávislá, z definice, museli bychom pro každý z vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ ukázat, že nelze vyjádřit jako lineární kombinace ostatních. Snazší je použít bod (2) z následujícího snadného pozorování, které dává elegantnější charakterizaci lineární nezávislosti.

Tvrzení 5.26. *Nechť $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ je posloupnost vektorů ve vektorovém prostoru V nad tělesem T . Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) *Posloupnost $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ je lineárně nezávislá.*
- (2) *Vektor \mathbf{o} lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ pouze triviálním způsobem $\mathbf{o} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \dots + 0\mathbf{v}_k$.*

Jinými slovy, pro libovolné $a_1, a_2, \dots, a_k \in T$ platí, že když

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{o} \quad ,$$

pak $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$.

- (3) *Každý vektor $\mathbf{b} \in V$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ nejvýše jedním způsobem.*

Důkaz. (1) \Rightarrow (2). Pokud platí

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{o}$$

a jedno z čísel a_1, a_2, \dots, a_k , řekněme a_i , je nenulové, pak můžeme upravit

$$a_i\mathbf{v}_i = -a_2\mathbf{v}_2 - \dots - a_k\mathbf{v}_k$$

a

$$\mathbf{v}_i = -a_1^{-1}a_2\mathbf{v}_2 - \dots - a_1^{-1}a_k\mathbf{v}_k \quad ,$$

z čehož vidíme, že posloupnost je lineárně závislá.

(2) \Rightarrow (3). Pokud máme dvě vyjádření vektoru \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_k\mathbf{v}_k = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \dots + b_k\mathbf{v}_k \quad ,$$

pak úpravou získáme rovnost

$$\mathbf{o} = (a_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (a_k - b_k)\mathbf{v}_k,$$

takže z (2) dostáváme, že $a_i - b_i = 0$ pro každé i , neboli $a_i = b_i$ a tedy vyjádření vektoru \mathbf{u} jsou stejná.

(3) \Rightarrow (2) je triviální.

(2) \Rightarrow (1). Pokud je posloupnost $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ lineárně závislá, pak pro nějaké i je vektor \mathbf{v}_i lineární kombinací ostatních, tedy

$$\mathbf{v}_i = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + b_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + b_k\mathbf{v}_k .$$

Pak můžeme psát

$$\mathbf{o} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + (-1)\mathbf{v}_i + b_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + b_k\mathbf{v}_k ,$$

takže dostáváme netriviální kombinaci, která dává nulový vektor s koeficienty $a_i = -1$ a $a_j = b_j$ pro $j \neq i$. \square

Bod (2) lze formulovat tak, že posloupnost je lineárně závislá právě tehdy, když existuje její *netriviální* lineární kombinace, která dá nulový vektor. Netriviální znamená, že alespoň jeden koeficient je nenulový. Ještě jedna ekvivalentní formulace je ve cvičeních: Posloupnost vektorů $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ lineárně nezávislá právě tehdy, když žádný z vektorů není v lineárním obalu předchozích (tj. pro každé i platí $\mathbf{v}_i \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1} \rangle$).

Připomeňme, že vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ generují \mathbf{V} , pokud se každý vektor dá napsat jako lineární kombinace těchto vektorů alespoň jedním způsobem. Bod (3) ukazuje, že lineární nezávislost je jakýmsi opakem.

Příklad 5.27. Zjistíme, zda je posloupnost vektorů

$$((1, 1, 1, 1)^T, (1, 2, 1, 1)^T, (0, 1, 0, 1)^T)$$

v prostoru \mathbb{Z}_3^4 lineárně nezávislá. Pokusíme se vyjádřit nulový vektor jako lineární kombinaci vektorů z dané posloupnosti

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

To je vlastně homogenní soustava rovnic!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soustavu převedeme do odstupňovaného tvaru. Pravé strany psát nebudeme, protože je soustava homogenní.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nemáme žádnou volnou proměnnou, takže soustava má pouze triviální řešení $\mathbf{x} = (0, 0, 0)^T$. Jediná lineární kombinace daných vektorů, která dává nulový vektor je triviální, takže posloupnost je podle předchozího tvrzení lineárně nezávislá.

Tento příklad nám dává návod, jak zjistit, zda daná posloupnost aritmetických vektorů je lineárně (ne)závislá. Formulujeme učiněné pozorování jako tvrzení.

Tvrzení 5.28. *Sloupce matice A typu $m \times n$ nad \mathbf{T} tvoří lineárně nezávislou posloupnost v \mathbf{T}^m právě tehdy, když $\text{Ker } A = \{\mathbf{o}\}$, tj. rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ má jen triviální řešení $\mathbf{x} = \mathbf{o}$.*

Důkaz. Podle stále používaného tvrzení o vnímání násobení matic jako lineárního kombinování máme $A\mathbf{x} = x_1A_{*1} + x_2A_{*2} + \dots + x_nA_{*n}$, kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Tvrzení nyní okamžitě plyne z charakterizace v tvrzení 5.26. \square

Příklad 5.29. Posloupnost $(3i + 5, 2, 3)$, $(5, 2 + i, 1)$, $(4, 2, 12)$, $(\pi, e^\pi, 4)$ v prostoru \mathbb{C}^3 je lineárně závislá.

Můžeme argumentovat užitím předchozího tvrzení. Dané aritmetické vektory si napíšeme do sloupců matice A typu 3×4 . Při řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ máme díky typu alespoň jednu volnou proměnnou (protože proměnné jsou 4 a pivotů může být nejvíce tolik, kolik řádků, tedy 3). Z toho plyne, že soustava má netriviální řešení (stačí za volnou proměnnou dosadit například 1 a dopočítat zpětnou substitucí).

Později budeme moci argumentovat obecnějším tvrzením.

Na tomto místě si znovu uvědomme, že aritmetické prostory tvoří jen jeden z mnoha příkladů vektorových prostorů. (I když jsme v úvodu tvrdili, že jsou „v podstatě jediné“. Uvozovky jsou zde podstatné, na přesný význam si musíme ještě chvíli počkat.) Častá chybná odpověď studentů na otázku, jak určit, zda jsou dané vektory lineárně závislé, je typu „Napíšeme si je do sloupců, vyeliminujeme a zjistíme, zda existují volné proměnné“. Odpověď je správná jen v aritmetických vektorových prostorech, obecně nedává žádný smysl: Jak napsat do sloupců vektory $\cos(2x)$, $\sin x + e^x$, \dots z vektorového prostoru spojitých funkcí?

Příklad 5.30. Posloupnost $(1, \sqrt{2})$ je lineárně nezávislá v \mathbb{R} jako vektorovém prostoru nad \mathbb{Q} , protože $\sqrt{2}$ je iracionální. Stejná posloupnost je lineárně závislá v \mathbb{R} jako vektorovém prostoru nad \mathbb{R} , protože např. $\sqrt{2}$ je $\sqrt{2}$ -násobkem vektoru 1.

5.3.2. *Odstupňovaný tvar a elementární úpravy.* Jinou možností jak zjistit, zda jsou dané aritmetické vektory lineárně (ne)závislé je napsat je do řádků matice a elementárními řádkovými úpravami převádět matici do odstupňovaného tvaru. Tyto úpravy totiž nemění lineární (ne)závislost řádků a z odstupňovaného tvaru matice poznáme (ne)závislost řádků snadno. Výhodou také je, že řádkové úpravy nemění ani lineární obal řádků, což se nám bude později hodit při hledání báze.

Rovnou si také všimneme, že řádkové úpravy nemění ani lineární (ne)závislost sloupců. Tvrzení nejprve formulujeme pro sloupce. Řádkovou verzi dostaneme transponováním.

Tvrzení 5.31. *Nechť A je matice nad \mathbf{T} typu $m \times n$, R je regulární matice řádu m a Q je regulární matice řádu n . Pak platí:*

- (1) *Sloupce matice A jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou lineárně nezávislé sloupce matice AQ*
- (2) *Sloupce matice A jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou lineárně nezávislé sloupce matice RA .*

Důkaz. Použijeme pozorování formulované jako tvrzení 5.28, totiž, že sloupce matice B jsou lineárně nezávislé, právě tehdy, když $B\mathbf{x} = \mathbf{o}$ má pouze triviální řešení.

Předpokládejme, že sloupce matice A jsou lineárně nezávislé a že \mathbf{x} je řešením $AQ\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Pak $Q\mathbf{x} = \mathbf{o}$, protože sloupce A jsou lineárně nezávislé. Z toho plyne, že $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ (použijeme například bod (4) charakterizace regulárních matic z věty 4.30, nebo bod (7) a vynásobíme rovnost zleva Q^{-1}). Ukázali jsme, že soustava $AQ\mathbf{x} = \mathbf{o}$ má pouze triviální řešení, takže AQ má lineárně nezávislé sloupce.

Opačná implikace se dá dokázat užitím první implikace na matici AQ místo A a Q^{-1} místo Q .

Druhou ekvivalenci jsme již vlastně dokázali v tvrzení 5.22, protože $\text{Ker}(RA) = \text{Ker} A$, takže A má netriviální řešení právě tehdy, když má RA netriviální řešení. \square

Ekvivalence v bodu (2) jde zesílit. Matice A má stejné lineární závislosti mezi sloupci jako matice RA . Například pokud $2A_{*1} + 3A_{*2} - 4A_{*3} = \mathbf{o}$, pak $2(RA)_{*1} + 3(RA)_{*2} - 4(RA)_{*3} = \mathbf{o}$, a naopak. Slovy, součet 2-násobku prvního sloupce, 3-násobku druhého sloupce a (-4) -násobku třetího sloupce je nulový vektor v matici A právě tehdy, když stejný vztah platí pro sloupce matice RA .

Důsledek 5.32. *Sloupcové úpravy nemění lineární (ne)závislost sloupců ani řádků matice. Řádkové úpravy nemění lineární (ne)závislost sloupců ani řádků matice.*

Důkaz. Z předchozího tvrzení použitého na elementární matice plyne, že řádkové ani sloupcové úpravy nemění lineární obal sloupců. K důkazu řádkových verzí použijeme stejné tvrzení pro transponovanou matici. \square

Zbývá nahlédnout, kdy má řádkově odstupňovaný tvar lineárně nezávislé řádky. (Z předchozího tvrzení a tvrzení 5.28 vidíme, kdy má matice v odstupňovaném tvaru lineárně nezávislé sloupce: právě tehdy, když příslušná homogenní soustava nemá žádné volné proměnné, viz cvičení.) Je zřejmé, že je-li v matici nulový řádek, pak jsou řádky lineárně závislé. V opačném případě jsou již lineárně nezávislé.

Tvrzení 5.33. *Řádky matice v odstupňovaném tvaru jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když matice neobsahuje nulový řádek.*

Důkaz. Implikace zleva doprava je zřejmá.

Předpokládejme, že matice A typu $m \times n$ bez nulového řádku je v odstupňovaném tvaru a vezmeme r, k_1, \dots, k_r z definice odstupňovaného tvaru. Protože A nemá nulový řádek je $r = n$. Chceme ukázat, že rovnice $A^T \mathbf{x} = \mathbf{o}$ má pouze triviální řešení (viz opět tvrzení 5.28). To je však snadné, protože již rovnice s pořadovými čísly k_1, k_2, \dots, k_n určují dolní trojúhelníkovou matici s nenulovými prvky na diagonále a ta má pouze triviální řešení.

OBRAZEK \square

Myšlenku důkazu můžeme zobecnit na užitečné pozorování. Máme-li posloupnost vektorů v \mathbf{T}^n takovou, že již vybraných m souřadnic tvoří lineárně nezávislou množinu v \mathbf{T}^m , pak je původní posloupnost lineárně nezávislá.

Příklad 5.34. Posloupnost

$$((1, 37, 3, 45, 1)^T, (0, -e, 1, \pi^e, 4)^T, (0, -12, 0, 33, 2)^T)$$

v prostoru \mathbb{R}^5 je lineárně nezávislá, protože první, třetí a páté složky vektorů tvoří posloupnost

$$((1, 3, 1)^T, (0, 1, 4)^T, (0, 0, 2)^T),$$

v \mathbb{R}^3 , která je lineárně nezávislá podle předchozího tvrzení.

Příklad 5.35. Podíváme se znovu na příklad 5.27, tam jsme zjišťovali, zda je posloupnost

$$((1, 1, 1, 1)^T, (1, 2, 1, 1)^T, (0, 1, 0, 1)^T)$$

v prostoru \mathbb{Z}_3^4 lineárně nezávislá. Tentokrát si vektory napíšeme do řádků a převedeme řádkovými úpravami do odstupňovaného tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Původní posloupnost je podle důsledku 5.32 lineárně nezávislá právě tehdy, když jsou řádky vzniklé matice B lineárně nezávislé. Matice B je v odstupňovaném tvaru bez nulového řádku, takže podle předchozího tvrzení jsou řádky B lineárně nezávislé. Původní posloupnost je tedy lineárně nezávislá.

Příklad 5.36. Zjistíme, zda je posloupnost vektorů

$$((1, 1, 1, 0)^T, (0, 1, 0, 1)^T, (1, 0, 1, 1)^T)$$

v prostoru \mathbb{Z}_2^4 lineárně nezávislá. Napíšeme si vektory do řádků a upravujeme řádkovými úpravami.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V úpravách už nemusíme pokračovat, protože vidíme, že řádky vzniklé matice, tedy i původní matice, jsou lineárně závislé.

Shrneme poznatky o invariantech řádkových úprav. Řádkové úpravy nemění lineární závislost řádků ani sloupců, lineární obal řádků (to je $\text{Im } A^T$) a $\text{Ker } A$. Obecně mění lineární obal sloupců a $\text{Ker } A^T$.

5.4. Báze.

5.4.1. *Definice.* Dostali jsme se ke stěžejnímu pojmu *báze* vektorového prostoru. Jako u lineární nezávislosti zadefinujeme konečnou verzi a obecnou definici odložíme na později.

Definice 5.37. Posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ ve vektorovém prostoru \mathbf{V} nad \mathbf{T} se nazývá *báze*, pokud je lineárně nezávislá a generuje \mathbf{V} .

(Tím, že posloupnost $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ generuje \mathbf{V} přirozeně myslíme to, že množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ generuje \mathbf{V} .)

Intuice je taková, že báze je „dost malá“, ve smyslu, že mezi vektory nejsou žádné lineární závislosti, a zároveň dost velká, ve smyslu, že vektory generují celý prostor.

Daná posloupnost vektorů $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ generuje prostor \mathbf{V} právě tehdy, když lze každý vektor zapsat jako jejich lineární kombinace alespoň jedním způsobem. Podle tvrzení 5.26 je posloupnost lineárně nezávislá právě tehdy, když lze každý vektor vyjádřit jako lineární kombinace $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ nejvýše jedním způsobem. Dohromady dostáváme následující důležité pozorování.

Pozorování 5.38. Posloupnost vektorů $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ tvoří bázi vektorového prostoru \mathbf{V} právě tehdy, když lze každý vektor $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ vyjádřit právě jedním způsobem jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$.

Příklad 5.39. Sloupce jednotkové matice I_n nad tělesem \mathbf{T} , tj. n -tice vektorů $((1, 0, 0, \dots, 0)^T, (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)^T)$ je bázi aritmetického vektorového prostoru \mathbf{T}^n .

Tato posloupnost je totiž lineárně nezávislá, například podle tvrzení 5.33, a generuje \mathbf{T}^n , protože každý vektor $(x_1, \dots, x_n)^T$ jde vyjádřit jako lineární kombinaci

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Obě podmínky (lineární nezávislost i generování) jde najednou nahlédnout z toho, že každý vektor lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci uvedenou výše.

Báze z příkladu jsou význačné báze aritmetických prostorů, proto mají svoje pojmenování a značení.

Definice 5.40. *Kanonická báze* (též *standardní báze*) v aritmetickém prostoru \mathbf{T}^n je posloupnost

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) .$$

Příklad 5.41. Posloupnost $((1, 1)^T, (3, 2)^T)$ je bázi prostoru \mathbb{R}^2 . Můžeme argumentovat tak, že matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

je regulární, takže podle charakterizační věty regulárních matic má rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě jedno řešení pro každé \mathbf{b} . To znamená, že každý vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců matice A právě jedním způsobem, což nastane podle pozorování právě tehdy, když tvoří sloupce bázi.

Obecněji lze z charakterizační věty pro regulární matice nahlédnout, že sloupce (nebo řádky) čtvercové matice řádu n tvoří bázi \mathbf{T}^n právě tehdy, když A je regulární (viz cvičení). Tedy například sloupce (řádky) horní trojúhelníkové matice s nenulovými prvky na diagonále tvoří bázi.

Příklad 5.42. Jednočlenná posloupnost $((3, 3, 3)^T)$ je báze prostoru $\langle (1, 1, 1)^T \rangle \leq \mathbb{R}^3$.

Posloupnost $(1, x, x^2)$ je báze prostoru reálných polynomů stupně nejvýše 2, protože každý polynom lze napsat právě jedním způsobem ve tvaru $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2$.

Prázdná posloupnost je bázi triviálního prostoru $\{\mathbf{o}\}$.

Posloupnost $((1, 2, 3)^T, (9, 12, 15)^T, (4, 5, 6)^T)$ není bázi prostoru

$$\mathbf{V} = \langle (1, 2, 3)^T, (9, 12, 15)^T, (4, 5, 6)^T \rangle \leq \mathbb{R}^3 ,$$

protože je lineárně závislá podle příkladu 5.25. Posloupnost $((1, 2, 3)^T)$ je sice lineárně nezávislá, ale není bázi \mathbf{V} , protože daný prostor negeneruje (například vidíme, že $(4, 5, 6)^T$ není v lineárním obalu vektoru $(1, 2, 3)^T$). Posloupnost $((1, 2, 3)^T,$

$(2, 1, 1)^T$) není bázi \mathbf{V} , protože vektor $(2, 1, 1)^T$ není ani prvkem \mathbf{V} , jak jsme se přesvědčili v příkladu 5.21. Posloupnost $((1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T)$ je bázi \mathbf{V} , protože generuje \mathbf{V} (viz opět 5.25) a je lineárně nezávislá, jak se snadno přesvědčíme.

Příklad 5.43. Najdeme nějakou bázi prostoru

$$\mathbf{V} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{Z}_7^4 .$$

Využijeme toho, že řádkové úpravy matice nemění lineární obal řádků (viz důsledek 5.23). Vektory tedy napíšeme do řádků a převedeme řádkovými úpravami na odstupňovaný tvar. Nenulové řádky generují stejný prostor a navíc jsou podle tvrzení 5.33 lineárně nezávislé, tedy tvoří bázi.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bázi \mathbf{V} je tedy například posloupnost $((2, 1, 3, 0)^T, (0, 0, 6, 1)^T, (0, 0, 0, 4)^T)$.

Příklad 5.44. Uvažujme prostor \mathbf{V} nekonečných posloupností (a_1, a_2, \dots) splňujících $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pro každé $n \geq 3$, s běžnými operacemi sčítání a násobení skalárem. Prostor \mathbf{V} je podprostorem \mathbb{R}^ω mezi jehož prvky patří Fibonacciho posloupnost, viz příklad 5.18.

Příkladem báze je dvoučlenná posloupnost

$$(p_1, p_2) = ((\varphi^1, \varphi^2, \dots), ((1 - \varphi)^1, (1 - \varphi)^2, \dots)) ,$$

kde $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ je hodnota zlatého řezu. Tato posloupnost je lineárně nezávislá, protože již první dvě souřadnice tvoří lineárně nezávislou posloupnost v \mathbb{R}^2 . Rovněž generuje \mathbf{V} , protože první dvě souřadnice generují \mathbb{R}^2 a prvky \mathbf{V} jsou určeny prvními dvěma souřadnicemi. Jako cvičení si rozmyslete detaily, tedy například proč oba vektory p_1, p_2 patří do \mathbf{V} .

Nyní můžeme nalézt vzorec pro n -tý člen Fibonacciho posloupnosti, protože víme, že Fibonacciho posloupnost lze vyjádřit jako lineární kombinace posloupností p_1 a p_2 , takže stačí zjistit koeficienty. Dostaneme vzorec z části 4.5.1.

5.4.2. Steinitzova věta o výměně a důsledky, dimenze. Z vizuální představy prostorů \mathbb{R}^2 je patrné, že všechny báze mají dva prvky. Méně vektorů prostor nemůže generovat a množina třech a více vektorů nemůže být lineárně nezávislá. Podobně, v \mathbb{R}^3 mají všechny báze právě tři prvky. Obecně platí, že každý vektorový prostor má bázi a všechny báze mají stejný počet prvků. Tomuto počtu říkáme dimenze. Tyto zásadní skutečnosti v této části dokážeme pro konečně generované prostory.

Definice 5.45. Vektorový prostor se nazývá *konečně generovaný*, pokud má nějakou konečnou množinu generátorů.

Jedna možnost, jak se můžeme pokusit hledat bázi vektorového prostoru je vzít nějakou posloupnost generátorů a vynechávat vektory z posloupnosti, dokud vzniklé posloupnosti stále generují daný prostor. Pokud již nemůžeme pokračovat, máme

minimální posloupnost generátorů. Minimální zde znamená, že vynecháním libovolného vektoru vznikne posloupnost, která prostor nengeneruje. Následující tvrzení říká, že v tomto případě již máme bázi.

Tvrzení 5.46. *Minimální posloupnost generátorů $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ vektorového prostoru \mathbf{V} je báze \mathbf{V} .*

Důkaz. Podle poznámek za definicí 5.24 je posloupnost lineárně závislá právě tehdy, když

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$$

pro nějaké $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. To se ale nestane, protože předpokládáme, že máme minimální posloupnost generátorů. Posloupnost je tedy lineárně nezávislá, takže je to báze. \square

Důsledek 5.47. *Z každé konečné množiny generátorů vektorového prostoru lze vybrat bázi.*

Důkaz. Postupně vynecháváme vektory dokud nevznikne minimální množina generátorů. Množinu seřadíme do posloupnosti a ta je podle tvrzení bázi. \square

Obecně z každé (ne nutně konečné) množiny generátorů konečně generovaného prostoru jde vybrat bázi. Myšlenka je, že nejprve vybereme konečnou množinu generátorů a pak použijeme předchozí výsledek. Detaily si rozmyslete jako cvičení.

Speciálně dostáváme důležitý důsledek:

Důsledek 5.48. *Každý konečně generovaný vektorový prostor má bázi.*

Příklad 5.49. Podíváme znovu na příklad prostoru $\mathbf{V} = \langle X \rangle \leq \mathbb{R}^3$, kde $X = \{(1, 2, 3)^T, (9, 12, 15)^T, (4, 5, 6)^T\}$. Množina generátorů X není minimální, protože např. vektor $(9, 12, 15)^T$ lze vynechat (viz příklad 5.25). Množina $Y = \{(1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T\}$ je minimální množina generátorů, protože, jak je vidět, vynecháním kteréhokoliv ze dvou vektorů vznikne podprostor, který neobsahuje druhý z vektorů. Takže posloupnost $((1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T)$ musí být báze podle tvrzení 5.46, což skutečně je.

K důkazu dalších zásadních skutečností se nám bude hodit tzv. Steinitzova věta o výměně. Ta říká, že pro libovolnou lineárně nezávislou posloupnost N délky k lze v libovolné posloupnosti generující \mathbf{V} vyměnit některých k členů za členy N tak, že vzniklá posloupnost stále generuje \mathbf{V} .

Věta 5.50 (Steinitzova věta o výměně). *Nechť $N = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ je lineárně nezávislá posloupnost ve vektorovém prostoru \mathbf{V} nad \mathbf{T} a nechť $G = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_l)$ generuje \mathbf{V} . Pak $k \leq l$ a při vhodném uspořádání $G' = (\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \dots, \mathbf{w}'_l)$ posloupnosti G platí, že $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}'_{k+1}, \mathbf{w}'_{k+2}, \dots, \mathbf{w}'_l)$ generuje \mathbf{V} .*

Důkaz. Dokážeme indukcí podle k . Pro $k = 0$ je tvrzení zřejmé, takže předpokládáme, že $k > 0$ a že tvrzení platí pro $|N| < k$.

Podle indukčního předpokladu platí $k - 1 \leq l$ a můžeme najít přeuspořádání $G'' = (\mathbf{w}''_1, \mathbf{w}''_2, \dots, \mathbf{w}''_l)$ takové, že

$$P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{w}''_k, \mathbf{w}''_{k+1}, \dots, \mathbf{w}''_l)$$

generuje \mathbf{V} . Zbývá do P umístit vektor \mathbf{v}_k výměnou za některý z vektorů $\mathbf{w}''_k, \mathbf{w}''_{k+1}, \dots$

Protože P generuje \mathbf{V} , vektor \mathbf{v}_k jde napsat jako lineární kombinace vektorů z P :

$$\mathbf{v}_k = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + a_{k-1} \mathbf{v}_{k-1} + a_k \mathbf{w}_k'' + a_{k+1} \mathbf{w}_{k+1}'' + \cdots + a_l \mathbf{w}_l'' .$$

Posloupnost N je lineárně nezávislá, proto \mathbf{v}_k není lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$. To znamená, že platí $k \leq l$ a navíc alespoň jeden z prvků a_k, a_{k+1}, \dots, a_l tělesa \mathbf{T} je nenulový. Předpokládejme, že $a_k \neq 0$, jinak můžeme posloupnost G'' přeuspořádat do posloupnosti G' (a patřičně změnit P), aby toto platilo.

Ukážeme, že

$$Z = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{k+1}'', \mathbf{w}_{k+2}'', \dots, \mathbf{w}_l'')$$

generuje \mathbf{V} . Vektor \mathbf{w}_k'' jde napsat jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{k+1}'', \dots, \mathbf{w}_l''$, což lze nahlédnout z rovnosti výše (z rovnosti vyjádříme $a_k \mathbf{w}_k''$ a vynásobíme a_k^{-1}). Takže lineární obal Z obsahuje vektor \mathbf{w}_k'' a tím pádem

$$\langle Z \rangle \supseteq \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{w}_k'', \mathbf{w}_{k+1}'', \dots, \mathbf{w}_l'' \rangle = \langle P \rangle = V .$$

□

Nejdůležitější důsledek Steinitzovy věty je, že všechny báze obsahují stejný počet vektorů. To umožňuje dát přesný význam slovu dimenze.

Důsledek 5.51. *Každé dvě báze konečně generovaného vektorového prostoru mají stejný počet prvků.*

Důkaz. Předpokládejme, že $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ a $C = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l)$ jsou dvě báze vektorového prostoru \mathbf{V} . Protože posloupnost B je lineárně nezávislá a posloupnost C generuje \mathbf{V} , platí podle Steinitzovy věty $k \leq l$. Z téže věty plyne také $l \leq k$, protože C je lineárně nezávislá a B generuje \mathbf{V} . Dohromady dostáváme $k = l$. □

Definice 5.52. *Dimenzí* konečně generovaného vektorového prostoru \mathbf{V} nad \mathbf{T} rozumíme počet prvků jeho libovolné báze. Dimenzi prostoru \mathbf{V} značíme $\dim(V)$.

Příklad 5.53. V souladu s intuicí je dimenze aritmetického vektorového prostoru \mathbf{T}^n rovna n , protože kanonická báze má n prvků.

Triviální prostor $\{\mathbf{o}\}$ má dimenzi 0 protože prázdňná posloupnost je jeho báze.

Prostor $\langle (1, 1, 1) \rangle \leq \mathbb{R}^3$ má dimenzi 1, protože $((1, 1, 1))$ je jeho báze. To odpovídá geometrické představě, že daný prostor je přímkou.

Dimenze prostoru

$$\mathbf{V} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{Z}_7^4$$

je 3, protože v příkladu 5.43 jsme našli tříprvkovou bázi.

Zdůvodnění následujících tvrzení přenecháme do cvičení. Dimenze prostoru všech matic nad \mathbf{T} typu $m \times n$ je mn . Dimenze prostoru reálných polynomů stupně nejvýše n je $n + 1$. Dimenze prostoru \mathbb{C} jako vektorového prostoru nad \mathbb{R} je 2.

V důsledku 5.47 jsme viděli, že z každé konečné množiny generátorů lze vybrat bázi. Při hledání báze můžeme postupovat i opačně – k lineárně nezávislé množině doplnit vektory, aby vznikla báze. Následující důsledek říká, že to jde, navíc můžeme doplňovat pouze vektory z libovolně zvolené množiny generátorů. Důsledek formulujeme pro konečné množiny, obecněji necháme důkaz do cvičení.

Důsledek 5.54. *Nechť G je konečná množina generátorů vektorového prostoru \mathbf{V} . Každá lineárně nezávislá posloupnost N ve \mathbf{V} jde doplnit prvky G na bázi \mathbf{V} .*

Důkaz. Označme $N = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$. Nejprve pomocí důsledku 5.47 vybereme z G bázi $B = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l)$. Ze Steinitzovy věty dostaneme, že při vhodném přeuspořádání báze B , posloupnost $Z = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_l)$ generuje \mathbf{V} . Ze Z jde podle důsledku 5.47 vybrat bázi. My ale víme, že dimenze \mathbf{V} je l (protože B je báze), takže již Z musí být báze. \square

Formulujeme dva triviální důsledky.

Důsledek 5.55. *Maximální lineárně nezávislá posloupnost v konečně generovaném prostoru je báze.*

Obecněji, maximální lineárně nezávislá podposloupnost konečné množiny generátorů je báze.

Příklad 5.56. V příkladu 5.43 jsme hledali nějakou bázi prostoru

$$\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{Z}_7^4.$$

Teď z vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_5$ bázi \mathbf{V} vybereme. Z důsledku 5.47 plyne, že to jde. Předchozí důsledek 5.54 nám dává návod, jak to jde udělat. Stačí totiž vzít libovolnou maximální lineárně nezávislou podmnožinu $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5\}$, ta již musí být báze. Můžeme postupovat například tak, že začneme s lineárně nezávislou posloupností (\mathbf{v}_1) . Pokusíme se přidat \mathbf{v}_2 – otestujeme řádkovými úpravami, zda $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je lineárně nezávislá.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dvojice $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je lineárně závislá, vektor \mathbf{v}_2 tedy přidávat nebudeme. Zkusíme \mathbf{v}_3 .

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Máme lineárně nezávislou posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$. Pokusíme se k ní přidat \mathbf{v}_4 . Při testování lineární závislosti můžeme využít již provedených úprav.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vektor \mathbf{v}_4 přidávat nebudeme. Nakonec zkusíme \mathbf{v}_5 .

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Protože $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5)$ je lineárně nezávislá posloupnost a navíc je maximální lineárně nezávislá posloupnost tvořená vektory v množině $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_5\}$ (neboť přidáním \mathbf{v}_2 nebo \mathbf{v}_4 již vznikne lineárně závislá množina), tvoří tato posloupnost bázi \mathbf{V} .

Dokázaná tvrzení umožňují dokazovat a zobecňovat i další fakta, která jsou geometricky zřejmá pro \mathbb{R}^2 nebo \mathbb{R}^3 :

Pozorování 5.57. V každém prostoru \mathbf{V} dimenze n platí:

- (1) Každá množina generátorů \mathbf{V} obsahuje alespoň n vektorů.
- (2) Každá n -prvková posloupnost generátorů je báze \mathbf{V} .
- (3) Každá lineárně nezávislá posloupnost ve \mathbf{V} obsahuje nejvýše n vektorů.
- (4) Každá n -prvková lineárně nezávislá posloupnost ve \mathbf{V} je báze \mathbf{V} .

Důkaz. Z každé množiny generátorů lze vybrat bázi a všechny báze obsahují n vektorů. Z toho plynou první dva body.

Každou lineárně nezávislou množinu lze doplnit na n -prvkovou bázi. Z toho plynou zbylé dva body. \square

Příklad 5.58. V příkladu 5.29 jsme zdůvodnili, že posloupnost $(3i+5, 2, 3)^T, (5, 2+i, 1)^T, (4, 2, 12)^T, (\pi, e^\pi, 4)^T$ v prostoru \mathbb{C}^3 je lineárně závislá. Teď máme kratší zdůvodnění – podle třetího bodu v pozorování nemůže žádná lineárně nezávislá posloupnost v \mathbb{C}^3 obsahovat více než 3 vektory.

Podobně můžeme bez jakéhokoliv počítání rozhodnout, že množina $\{(1, 3, i+e^\pi, -10)^T, (i, 2i, 3+2i, -311)^T, (2, \pi, \pi, -4)^T\}$ negeneruje \mathbb{C}^4 podle prvního bodu.

Nakonec ukážeme, že podprostor má nejvýše takovou dimenzi jako původní prostor.

Tvrzení 5.59. Je-li \mathbf{W} podprostor konečně generovaného prostoru \mathbf{V} , pak \mathbf{W} je konečně generovaný a platí $\dim(\mathbf{W}) \leq \dim(\mathbf{V})$, přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $W = V$.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že \mathbf{W} je konečně generovaný. (Pozor, zde se často dělá chyba. Toto „intuitivně zřejmé“ tvrzení je třeba dokázat.) Předpokládejme pro spor, že \mathbf{W} nemá konečnou množinu generátorů. Vezmeme libovolný nenulový vektor $\mathbf{w}_1 \in W$. Protože $\{\mathbf{w}_1\}$ negeneruje W , existuje vektor $\mathbf{w}_2 \in W$ takový, že $\mathbf{w}_2 \notin \langle \mathbf{w}_1 \rangle$, atd.: Indukcí najdeme pro libovolné i vektor $\mathbf{w}_i \in W$, který neleží v lineárním obalu předchozích vektorů $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{i-1}$. Podle poznámky za tvrzením 5.26 (cvičení ??) je pro každé i posloupnost $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_i)$ lineárně nezávislá (ve \mathbf{W} , tedy i ve \mathbf{V}), což je spor s bodem (3) předchozího pozorování.

Již víme, že \mathbf{W} je konečně generovaný, takže má bázi B podle důsledku 5.48. Báze B prostoru \mathbf{W} je lineárně nezávislá množina ve \mathbf{V} , takže $\dim(\mathbf{W}) = |B| \leq \dim(\mathbf{V})$, opět podle bodu (3). Pokud se dimenze rovnají, pak B je báze \mathbf{W} podle (4), z čehož vyplývá, že $V = W$. (Naopak z $V = W$ triviálně plyne $\dim(V) = \dim(W)$.) \square

Příklad 5.60. Podle tvrzení mají podprostory \mathbb{R}^3 dimenzi 0 (triviální podprostor $\{\mathbf{o}\}$), 1 (podprostory tvaru $\langle \mathbf{u} \rangle$, kde \mathbf{u} je nenulový vektor, tedy přímky procházející počátkem), 2 (podprostory tvaru $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, kde (\mathbf{u}, \mathbf{v}) je lineárně nezávislá, tedy roviny procházející počátkem) nebo 3 (triviální podprostor \mathbb{R}^3). Nyní tedy máme precizní důkaz, že diskuze o podprostorech \mathbb{R}^3 v části 5.2.1 byla správná.

Obecněji z tvrzení vyplývá, že každý netriviální podprostor \mathbf{T}^n lze zapsat jako lineární obal 1 až $n-1$ (lineárně nezávislých) vektorů.

5.4.3. *Báze jako souřadnicový systém.* Vraťme se teď k pozorování 5.38, které říká, že máme-li bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{V} , pak každý vektor \mathbf{v} ve \mathbf{V} lze jednoznačným způsobem vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Koeficientům této lineární kombinace říkáme souřadnice \mathbf{v} vzhledem k B .

Definice 5.61. Necht $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ je báze vektorového prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} a $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$. *Souřadnicemi* (též *vyjádřením*) vektoru \mathbf{w} vzhledem k B rozumíme (jednoznačně určený) aritmetický vektor $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbf{T}^n$ takový, že

$$\mathbf{w} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_n \mathbf{v}_n .$$

Souřadnice \mathbf{w} vzhledem k B značíme $[\mathbf{w}]_B$, tj.

$$[\mathbf{w}]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} .$$

ZNOVU OBRAZEK

Souřadnice závisí na pořadí vektorů v bázi. Z tohoto důvodu jsme bázi definovali jako posloupnost vektorů, nikoliv množinu.

Zvolíme-li v prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} dimenze n bázi B , pak předchozí definice jednoznačně přiřazuje každému vektoru $\mathbf{v} \in V$ aritmetický vektor $[\mathbf{v}]_B \in T^n$. Naopak, každý aritmetický vektor v \mathbf{T}^n je roven $[\mathbf{v}]_B$ pro nějaký (jednoznačně určený) vektor $\mathbf{v} \in V$. Zobrazení přiřazující $[\mathbf{v}]_B$ vektoru \mathbf{v} je tedy bijekcí mezi V a T^n .

Příklad 5.62. V příkladu 5.39 jsme si všimli, že pro kanonickou bázi $K = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru \mathbf{T}^n a libovolný vektor $\mathbf{v} \in T^n$ platí

$$[\mathbf{v}]_K = \mathbf{v} .$$

Jednou z bází prostoru $\mathbf{V} = \langle (1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T \rangle \leq \mathbb{R}^3$ je posloupnost $B = ((1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T)$ (viz příklad 5.42. Vektor $(9, 12, 15)^T$ leží v prostoru \mathbf{V} , protože $(9, 12, 15)^T = (1, 2, 3)^T + 2 \cdot (4, 5, 6)^T$. Jeho vyjádření v bázi B je podle tohoto vztahu

$$[(9, 12, 15)]_B = (1, 2)^T .$$

Posloupnost $B = (x, x^2, 1)$ je bázi prostoru reálných polynomů stupně nejvýše dva. Souřadnice vektoru $a + bx + cx^2$ vzhledem k této bázi je

$$[a + bx + cx^2]_B = (b, c, a)^T .$$

Příklad 5.63. Uvažujme posloupnost

$$B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

v prostoru \mathbb{Z}_5^3 . Ověříme, že B je bázi a najdeme souřadnice vektoru $\mathbf{w} = (4, 0, 1)^T$ vzhledem k B .

Obojí uděláme najednou, pokusíme se \mathbf{w} vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů v B . Z mnohokrát použitého pohledu na násobení jako na lineární kombinování nahlédneme, že souřadnice $[\mathbf{w}]_B$ jsou řešením soustavy rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$, kde $A = (\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3)$ (tj. vektory z báze napíšeme do sloupců). Soustavu vyřešíme.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right) .$$

Vidíme, že A je regulární (odstupňovaný tvar je horní trojúhelníková matice s nenulovými prvky na diagonále), takže B je báze podle poznámky za příkladem 5.41. Řešením soustavy je

$$\mathbf{x} = [\mathbf{w}]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Pro kontrolu můžeme ověřit, že skutečně platí $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3$.

Korespondence mezi vektory a souřadnicemi ve zvolené bázi je ještě těsnější, zachovává totiž operace vektorového prostoru. Konkrétně, souřadnice součtu vektorů ve \mathbf{V} (vzhledem k B) jsou rovny součtu jejich souřadnic (vzhledem k B) v prostoru \mathbf{T}^n . Podobně pro násobení skalárem.

Tvrzení 5.64. *Nechť $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ je báze vektorového prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} , nechť $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$ a $t \in T$. Pak platí*

- (1) $[\mathbf{u} + \mathbf{w}]_B = [\mathbf{u}]_B + [\mathbf{w}]_B$ a
- (2) $[t\mathbf{u}]_B = t[\mathbf{u}]_B$

Na levých stranách vystupují operace v prostoru \mathbf{V} , na pravých stranách jsou operace v \mathbf{T}^n .

Důkaz. Je-li $[\mathbf{u}]_B = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ a $[\mathbf{w}]_B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, pak podle definice souřadnic platí

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n, \quad \mathbf{w} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \dots + b_n\mathbf{v}_n .$$

Sečtením a úpravou získáme

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = (a_1 + b_1)\mathbf{v}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (a_n + b_n)\mathbf{v}_n ,$$

což podle definice znamená $[\mathbf{u} + \mathbf{w}]_B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)^T = [\mathbf{u}]_B + [\mathbf{w}]_B$.

Druhá část tvrzení je rovněž snadné cvičení. \square

Příklad 5.65. V prostoru $\mathbf{V} = \langle (1, 2, 3), (4, 5, 6) \rangle \leq \mathbb{R}^3$ uvažujme bázi $B = ((1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T)$ a vektory \mathbf{u}, \mathbf{w} se souřadnicemi $(1, 2)^T, (3, -1)^T$ vzhledem k B :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}, [\mathbf{u}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, [\mathbf{w}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Součtem \mathbf{u} a \mathbf{w} je vektor $(8, 13, 18)^T$, jeho souřadnice vzhledem k B jsou $(1, 2)^T + (3, -1)^T = (4, 1)^T$. Skutečně, $4 \cdot (1, 2, 3)^T + 1 \cdot (4, 5, 6)^T = (8, 13, 18)^T$.

Teď již vidíme přesný význam hesla „všechny konečně generované vektorové prostory jsou v podstatě \mathbf{T}^n “. Zvolíme-li v prostoru bázi B , můžeme místo původních vektorů počítat s jejich souřadnicemi vzhledem k B a tím se vše převádí do \mathbf{T}^n . Otázku, jak se souřadnice mění při přechodu od báze B k jiné bázi, vyřešíme v kapitole 7 o lineárních zobrazení.

Do \mathbf{T}^n můžeme převádět celé podmnožiny, tj. pro $X \subseteq V$ definujeme

$$[X]_B = \{[\mathbf{v}]_B : \mathbf{v} \in X\} \subseteq \mathbf{T}^n .$$

Tento přechod také zachovává důležité vlastnosti, jako lineární nezávislost, generování, báze, apod. Důkaz tohoto pozorování přenecháme jako cvičení.

Pozorování 5.66. *Nechť B je báze vektorového prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} dimenze n . Pak platí*

- (1) posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ je lineárně nezávislá ve \mathbf{V} právě tehdy, když je posloupnost $([\mathbf{v}_1]_B, [\mathbf{v}_2]_B, \dots, [\mathbf{v}_k]_B)$ lineárně nezávislá v \mathbf{T}^n ;
- (2) množina X generuje \mathbf{V} právě tehdy, když $[X]_B$ generuje \mathbf{T}^n ;
- (3) posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ je báze \mathbf{V} právě tehdy, když je posloupnost $([\mathbf{v}_1]_B, [\mathbf{v}_2]_B, \dots, [\mathbf{v}_k]_B)$ báze \mathbf{T}^n .

5.5. Dimenze podprostorů určených maticí, soustavy rovnic podruhé.

K matici A nad tělesem \mathbf{T} typu $m \times n$ máme přiřazeny řádkový a sloupcový prostor $\text{Im } A^T \leq \mathbf{T}^m$ a $\text{Im } A \leq \mathbf{T}^n$. Ukážeme, že mají stejnou dimenzi. Dále dáme do souvislosti dimenzi prostoru $\text{Ker } A \leq \mathbf{T}^n$ a $\text{Im } A$, a podíváme se ještě jednou na řešení soustav lineárních rovnic v terminologii zavedené v této kapitole. V této části budou vystupovat pouze aritmetické vektorové prostory a jejich podprostory.

5.5.1. *Bázové sloupce matice.* Po převodu soustavy lineárních rovnic elementárními řádkovými úpravami do odstupňovaného tvaru jsme rozdělili proměnné na bázové a volné (parametry). Nyní ukážeme, že toto rozdělení nezávisí na konkrétních provedených úpravách, ale pouze na původní soustavě (viz tvrzení 5.71). Výsledek samozřejmě formulujeme v jazyku matic.

Definice 5.67. Nechť A je matice nad \mathbf{T} . Říkáme, že i -tý sloupec matice A je *bázový*, pokud není lineární kombinací předchozích sloupců, tj. pokud platí

$$A_{*i} \notin \langle A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*(i-1)} \rangle .$$

Pojmenování ospravedlňuje skutečnost, že bázové sloupce tvoří bázi sloupcového prostoru matice. To si rozmyslete jako cvičení.

Pozorování 5.68. Pro libovolnou matici A tvoří bázové sloupce bázi sloupcového prostoru. Speciálně, dimenze $\text{Im } A$ je rovna počtu bázových sloupců.

Příklad 5.69. V matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

je bázový druhý a čtvrtý sloupec. První, třetí ani pátý sloupec není bázový. Je to vidět u prvního a třetího sloupce, pátý je součtem druhého a čtvrtého, takže také není bázový.

Za okamžik ukážeme, že řádkové úpravy neovlivňují skutečnost, zda je sloupec bázový nebo ne. Nejdříve ale ukážeme, že bázové sloupce matice v odstupňovaném tvaru jsou právě sloupce obsahující pivoty.

Tvrzení 5.70. Bázové sloupce matice A nad \mathbf{T} typu $m \times n$ v odstupňovaném tvaru jsou právě sloupce k_1, k_2, \dots, k_r , kde r, k_1, \dots, k_r jsou parametry z definice 2.10 odstupňovaného tvaru.

Důkaz. OBRAZEK

Pro $j = 1, 2, \dots, n$ označme W_j lineární obal prvních j sloupců, tj. $W_j = \langle A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*j} \rangle$. Dále nechť \mathbf{V}_j je následující podprostor \mathbf{T}^m :

$$\mathbf{V}_j = \{(x_1, x_2, \dots, x_j, 0, 0, \dots, 0) : x_1, x_2, \dots, x_j \in T\} .$$

Pro libovolné i je W_{k_i-1} podprostorem prostoru \mathbf{V}_{i-1} . Sloupec A_{*k_i} do tohoto prostoru nepatří, takže je bázový.

Zbývá ukázat, že ostatní sloupce bázové nejsou. Za tím účelem si všimneme, že $W_{k_i} = V_i$ pro libovolné i . Je to proto, že za prvé $(A_{*k_1}, A_{*k_2}, \dots, A_{*k_i})$ je lineárně nezávislá posloupnost (žádný z vektorů v posloupnosti není lineární kombinací předchozích, takže posloupnost je lineárně nezávislá podle cvičení ??), čili $\dim(W_{k_i}) \geq i$, a za druhé $\dim(V_i) = i$. Prostor W_i dimenze alespoň i je podprostorem V_i dimenze i , takže skutečně platí $W_{k_i} = V_i$ podle tvrzení 5.59.

Nyní již důkaz dokončíme snadno. Sloupce $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*k_1-1}$ jsou celé nulové, takže nejsou bázové. Sloupce $A_{*(k_1+1)}, A_{*(k_1+2)}, \dots, A_{*(k_2-1)}$ nejsou bázové, protože patří do V_2 , tedy i do W_{k_1} , atd. \square

Tvrzení 5.71. *Nechť A je matice nad tělesem \mathbf{T} typu $m \times n$ a R je regulární matice řádu m . Pak pro libovolné $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí, že i -tý sloupec matice A je bázový právě tehdy, když je bázový i -tý sloupec matice RA .*

Důkaz. Tvrzení je důsledkem definice a pozorování, že matice A má stejné lineární závislosti mezi sloupci jako matice RA (toho jsme si všimli v poznámce za tvrzením 5.59). Obširněji, i -tý sloupec matice A je bázový právě tehdy, když není lineární kombinací předchozích sloupců, tj. právě tehdy, když $A(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, 0, 0, \dots, 0)^T = \mathbf{o}$ pro nějaké prvky $a_1, \dots, a_{i-1} \in T$. To nastane právě tehdy, když $RA(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, 0, 0, \dots, 0)^T = \mathbf{o}$. (Připomeňme, že implikaci zprava doleva v této ekvivalenci lze dokázat například vynásobením zleva maticí R^{-1} .) \square

Příklad 5.72. Jako ilustraci provedeme v předchozím příkladu Gaussovu eliminaci a přesvědčíme se, že bázové sloupce jsou právě sloupce obsahující pivoty.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.5.2. *Hodnost.* Z dokázaného tvrzení je již jen krok k důkazu, že sloupcový a řádkový prostor matice mají stejnou dimenzi. Této dimenzi říkáme hodnost matice.

Věta 5.73. *Pro libovolnou matici A platí $\dim(\text{Im } A) = \dim(\text{Im } A^T)$.*

Důkaz. Myšlenka je taková, že pro matice v odstupňovaném tvaru tvrzení platí a ani jedna dimenze se řádkovými úpravami nemění, takže tvrzení platí pro jakoukoliv matici.

Detailněji. Každou matici lze elementárními řádkovými úpravami převést do odstupňovaného tvaru. Jinými slovy, existuje regulární matice R taková, že RA je v odstupňovaném tvaru. Dimenze sloupcového prostoru matice A i RA je počet bázových sloupců (viz pozorování 5.68), tyto dimenze jsou stejné (viz tvrzení 5.71) a rovnají se počtu nenulových řádků matice RA (viz tvrzení 5.70).

Dimenze řádkového prostoru matice RA je také rovna počtu nenulových řádků, protože nenulové řádky tvoří lineárně nezávislou posloupnost (viz tvrzení 5.33), která zřejmě generuje řádkový prostor. Ale násobení regulární maticí zleva nemění lineární obal řádků (viz tvrzení 5.22), speciálně, dimenze řádkového prostoru matice RA je stejná jako dimenze řádkového prostoru matice A . \square

Definice 5.74. *Hodností matice A rozumíme dimenzi řádkového (sloupcového) prostoru matice A . Značíme $\text{rank}(A)$.*

Shrneme některé důležité triviální důsledky do pozorování.

Pozorování 5.75. Pro libovolnou matici A platí $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$. Hodnost se nemění elementárními řádkovými ani sloupcovými úpravami. Hodnost matice v řádkově odstupňovaném tvaru je rovna počtu nenulových řádků.

Poslední věta pozorování také vysvětluje volbu písmena r pro počet nenulových řádků v odstupňovaném tvaru.

Příklad 5.76. V závislosti na $a, b \in \mathbb{Z}_3$ určíme dimenzi prostoru

$$\mathbf{V}_{a,b} = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{Z}_3^3,$$

přičemž nás nebude zajímat konkrétní báze.

Vektory si napíšeme do řádků nebo sloupců a určíme hodnost matice. Přitom můžeme využívat jak řádkové, tak sloupcové úpravy. Zvolíme například řádky.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & b & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 2 & b & 1 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & b+2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & b+2 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

V první úpravě jsme přeuspořádali řádky a v druhé jsem prohodili sloupce. Bývá totiž výhodnější mít parametry co nejvíce vpravo dole, aby se do úprav dostaly co nejpozději. Následně jsme vyeliminovali první sloupec a nakonec ještě prohodili řádky.

Pokud $b \neq 1$ a $a \neq 2$, pak je matice v odstupňovaném tvaru se třemi nenulovými řádky a $\dim(\mathbf{V}_{a,b}) = 3$. Pokud $b \neq 1$ a $a = 2$, pak je matice rovněž v odstupňovaném tvaru tentokrát s dvěma nenulovými řádky a $\dim(\mathbf{V}_{a,b}) = 2$. Pokud $b = 1$, pak můžeme ještě upravit (pozor, v tomto případě je matice v odstupňovaném tvaru pouze když $a = 2$!)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a dimenze je 2.

Shrnutí: Pokud $b \neq 1$ a $a \neq 2$ je $\dim(\mathbf{V}_{a,b}) = 3$, ve všech ostatních případech je $\dim(\mathbf{V}_{a,b}) = 2$.

Hodnost matice A je rovná dimenzi obrazu příslušného zobrazení f_A . Máme-li ještě matici B , aby byl definován součin AB , pak hodnost AB je rovná dimenzi obrazu zobrazení f_{AB} . Ale obraz zobrazení $f_{AB} = f_A \circ f_B$ je podprostorem obrazu zobrazení f_A , takže hodnost AB je menší nebo rovna hodnosti A . Tuto nerovnost a obdobnou nerovnost pro násobení zleva dokážeme algebraicky.

Tvrzení 5.77. Nechť A je matice nad \mathbf{T} typu $m \times n$ a B matice nad \mathbf{T} typu $n \times p$. Pak platí

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A), \quad \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B) .$$

Důkaz. Opět použijeme tvrzení 4.14 o pohledu na násobení jako počítání lineárních kombinací. Dostáváme $\text{Im}(AB) \leq \text{Im}(A)$, takže $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$ (podle tvrzení 5.59 o dimenzi podprostoru). Podobně $\text{Im}(AB)^T \leq \text{Im} B^T$, takže $\text{rank}(AB)^T \leq \text{rank}(B^T)$, z toho plyne $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$. \square

Důsledek 5.78. *Nechť A je matice nad \mathbf{T} typu $m \times n$ a R je regulární matice nad \mathbf{T} řádu m . Pak $\text{rank}(RA) = \text{rank}(A)$. Podobně pro násobení regulární maticí zprava.*

Důkaz. Podle předchozího tvrzení platí $\text{rank}(RA) \leq \text{rank}(A)$, ale také $\text{rank}(A) = \text{rank}(R^{-1}(RA)) \leq \text{rank}(RA)$. \square

Pomocí hodnosti můžeme také doplnit charakterizaci regulárních matic dokázanou ve větě 4.30. Uvažujme čtvercovou matici A nad \mathbf{T} řádu n . Bod (2) ve větě říká, že f_A je zobrazení na, neboli $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení pro každou pravou stranu, neboli $\text{Im } A = T^n$ (sloupce generují T^n), což nastane podle tvrzení 5.59 právě tehdy, když $\dim(\text{Im } A) = \text{rank}(A) = n$. Bod (4) říká, že $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ má jediné řešení, neboli sloupce A jsou lineárně nezávislé. Protože $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$ můžeme podobné charakterizace formulovat i pro řádky. Dostáváme následující pozorování.

Pozorování 5.79. *Nechť A je čtvercová matice nad \mathbf{T} řádu n . Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) A je regulární.
- (2) $\text{rank}(A) = n$.
- (3) Sloupce (řádky) matice A jsou lineárně nezávislé.
- (4) Sloupce (řádky) matice A generují T^n .
- (5) Sloupce (řádky) matice A tvoří bázi T^n .

Všimněte si, že ekvivalence sloupcových (a řádkových) verzí také plyne z pozorování 5.57.

Příklad 5.80. Ukážeme řešení jedné kombinatorické úlohy pomocí hodnosti matice. Příklad byl převzat ze sbírky *Šestnáct miniatur* Jiřího Matouška, kde jsou popsány některé zajímavé aplikace lineární algebry v jiných oborech. Lze ji najít na domovské stránce autora.

Ve městě žije n občanů, kteří jsou sdruženi v m klubech. Podle vyhlášky městské rady má každý klub lichý počet členů, zatímco pro každé dva různé kluby musí být počet společných členů sudý. Dokážeme, že v této situaci je $m \leq n$, tedy klubů není více než občanů.

Občany označíme čísly $1, 2, \dots, n$ a kluby čísly $1, 2, \dots, m$. Utvoříme matici $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$ nad tělesem \mathbb{Z}_2 tak, že $a_{ij} = 1$, pokud občan j je v klubu i , a $a_{ij} = 0$, jinak. Každý řádek tedy popisuje členy jednoho klubu, má na j -té pozici jedničku právě tehdy, když občan j je jeho členem. Například

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

popisuje situaci, kdy ve městě je 5 občanů a 3 kluby. Členy klubu 1 jsou občané 1, 2, 3, členy klubu 2 jsou občané 2, 3, 4 a jediným členem klubu 3 je občan 5. Všimněte si, že tato situace je v souladu s vyhláškou městské rady.

Spočítáme součin matic $AA^T = (b_{kl})$. Prvek na místě kl je součtem n sčítanců $a_{k1}a_{l1} + a_{k2}a_{l2} + \dots + a_{kn}a_{ln}$. Sčítanec $a_{km}a_{lm}$ je roven jedné právě tehdy, když občan m je v obou klubech k, l , jinak je roven nule. Počítáme v \mathbb{Z}_2 , takže celý součet je roven jedné, pokud je počet společných členů klubů k a l lichý, jinak je roven nule. Vyhlášku nyní můžeme přeformulovat tak, že $a_{kk} = 1$ a $a_{kl} = 0$ pro libovolná $k \neq l$. Jinými slovy $AA^T = I_m$.

Hodnost matice A je nejvýš n , protože hodnost nemůže být vyšší než počet sloupců. Z tvrzení 5.77 o hodnosti součinu dostaneme

$$\text{rank}(A) \geq \text{rank}(AA^T) = \text{rank}(I_m) = m .$$

Celkově $n \geq \text{rank}(A) \geq m$ a jsme hotovi.

5.5.3. *Ještě jednou soustavy rovnic, dimenze jádra a obrazu.* Nyní si zopakujeme různé pohledy na řešení soustav lineárních rovnic a utřídíme již známé skutečnosti o existenci a tvaru řešení. Většina tvrzení již byla dokázána (hlavně ve větě 2.14), přesto některé důkazy stručně zopakujeme, aby vynikla elegance a užitečnost pojmů zavedených v této kapitole. (Navíc věta 2.14 byla formulována jen nad reálnými čísly, formálně jsme ji nedokazovali pro případ libovolného tělesa.)

Budeme předpokládat, že A je matice nad tělesem \mathbf{T} typu $m \times n$ a $\mathbf{b} \in T^m$. Na řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se můžeme dívat několika způsoby:

- (1) Hledání průniku m „nadrovin“ v prostoru T^n (každá rovnice, neboli řádek matice A , určuje jednu „nadrovinu“).
- (2) Hledání koeficientů lineárních kombinací sloupců matice A , jejímž výsledkem je \mathbf{b} .
- (3) Určování vzoru vektoru \mathbf{b} při zobrazení f_A .

Pomocí pojmu hodnost můžeme formulovat kritérium řešitelnosti.

Věta 5.81 (Frobeniova věta). *Soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení právě tehdy, když $\text{rank}(A) = \text{rank}(A | \mathbf{b})$.*

Důkaz. Rovnost $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je pro nějaké $\mathbf{x} \in T^n$ splněna právě tehdy, když \mathbf{b} je lineární kombinací sloupců matice A , což platí právě tehdy, když $\text{Im } A = \text{Im } (A | \mathbf{b})$. Uvážíme-li, že $\text{Im } A \leq \text{Im } (A | \mathbf{b})$, vidíme, že podprostory jsou rovny právě tehdy, když se rovnají jejich dimenze (viz tvrzení 5.59). \square

Prakticky, hodnosti vidíme z odstupňovaného matice soustavy, protože hodnost je rovna počtu nenulových řádků v odstupňovaném tvaru, takže kritérium ve Frobeniově větě se shoduje s předchozím kritériem na řešitelnost (neexistence řádku tvaru $(0, 0, \dots, 0, a)$, $a \neq 0$ v odstupňovaném tvaru).

Tvar řešení je určený řešením příslušné homogenní soustavy. Řešením je vždy posunutí podprostoru o nějaký vektor, tedy obecný rovný útvar.

Tvrzení 5.82. *Pokud je soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ řešitelná, pak množina všech jejích řešení je rovná množině*

$$\mathbf{u} + \text{Ker } A = \{ \mathbf{u} + \mathbf{w} : \mathbf{w} \in \text{Ker } A \} ,$$

kde \mathbf{u} je libovolné (partikulární) řešení soustavy.

Důkaz. Libovolný vektor tvaru $\mathbf{u} + \mathbf{w}$, $\mathbf{w} \in \text{Ker } A$ je řešením soustavy, protože $A(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{w} = \mathbf{b} + \mathbf{o} = \mathbf{b}$ (dokázali jsme vlastně (p3) z věty 2.14).

Naopak, pokud \mathbf{v} řeší soustavu $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$, pak $\mathbf{v} \in \mathbf{u} + \text{Ker } A$, protože $\mathbf{v} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} - \mathbf{u})$ a vektor $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ leží v $\text{Ker } A$, jak ukazuje výpočet $A(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = A\mathbf{v} - A\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{o}$ (zde znovu dokazujeme (p4) z věty 2.14). \square

Prostor $\text{Ker } A$ můžeme určit nalezením jeho báze. Označme $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-r}$ nebázové sloupce matice A (příslušným proměnné nazýváme volné). Každý prvek $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \text{Ker } A$ (neboli každé řešení homogenní soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$) je jednoznačně určen vektorem $(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n-r}}) \in T^{n-r}$ (a naopak, libovolný

vektor v T^{n-r} určuje jedno řešení). Toto jsme nahlédli v pozorování 2.13 použitím odstupňovaného tvaru, můžeme to ale dokázat přímo z definice bázevých sloupců (viz cvičení).

Bázi $\text{Ker } A$ můžeme získat volbou nějaké báze T^{n-r} (ve větě 2.14 jsme použili kanonickou bázi) a dopočítáním zbylých složek (prakticky provedeme z odstupňovaného tvaru; ve větě 2.14 jsme výsledné vektory značili $\mathbf{v}^{(p)}$). Dimenze $n-r$ prostoru $\text{Ker } A$ je rovná počtu nebázevých sloupců, ta je rovná počet všech sloupců (to je n) minus počet bázevých (to je hodnota r matice A). Po úpravě dostáváme větu o dimenzi jádra a obrazu.

Věta 5.83 (Věta o dimenzi jádra a obrazu). *Pro libovolnou matici A nad \mathbf{T} typu $m \times n$ platí*

$$\dim(\text{Ker } A) + \dim(\text{Im } A) = n \quad (= \dim(\text{Ker } A) + \text{rank}(A)) .$$

Příklad 5.84. Vrátime se k soustavě z části 2.3.4.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Převodem do odstupňovaného tvaru jsme získali

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Vidíme, že $\dim(\text{Im } A) = \text{rank}(A) = \text{rank}(A | \mathbf{b}) = 2$, takže soustava je řešitelná. Dimenze $\text{Ker } A$ je $6 - 2 = 4$. Partikulární řešení získáme dopočítáním z libovolné volby volných proměnných. V 2.3.4 jsme zvolili nulový vektor a dostali jsme vektor $(-1, 0, -3, 0, 0)^T$. Bázi $\text{Ker } A$ získáme dopočítáním z nějaké báze T^3 . V 2.3.4 jsme volili kanonickou bázi T^3 a získali jsme následující bázi $\text{Ker } A$: $((-2, 1, 0, 0, 0)^T, (-3, 0, 0, 1, 0)^T, (-2, 0, -2, 0, 1)^T)$. Celkově můžeme řešení psát ve tvaru

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Podívejme se ještě na geometrickou interpretaci věty o dimenzi jádra a obrazu. Matice A určuje zobrazení $f_A : T^n \rightarrow T^m$. Dimenze jádra určuje dimenzi prostoru vektorů, které se zobrazí na nulový vektor. To si můžeme představovat jako počet dimenzí, které zobrazení f_A „zkolabuje“ do bodu. Větu lze nyní interpretovat tak, že dimenze obrazu je rovná dimenzi prostoru, který zobrazujeme (n) minus počet zkolabovaných dimenzí. Například pokud $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je projekce na nějakou rovinu, pak $\dim(\text{Ker } A) = 1$ a $\text{rank}(A) = \dim(\text{Im } A) = 2$. Pro zobrazení $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (viz obrázek ??), které „věrně“ zobrazuje rovinu do nějaké roviny v \mathbb{R}^3 , je $\dim(\text{Ker } A) = 0$ a $\text{rank}(A) = 2$.

5.6. Průnik a součet podprostorů.

Průnik dvou i více podprostorů nějakého vektorového prostoru je vždy podprostor.

Tvrzení 5.85. *Jsou-li $V_i, i \in I$ podprostory vektorového prostoru \mathbf{V} , pak $\bigcap_{i \in I} V_i$ je podprostorem \mathbf{V} .*

Důkaz. Stačí ověřit, že průnik je neprázdný a je uzavřený na sčítání a násobení skalárem (viz tvrzení 5.6). Průnik je neprázdný, protože obsahuje nulový vektor. Jsou-li \mathbf{u}, \mathbf{w} dva vektory z průniku, pak pro každé $i \in I$ platí $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V_i$. Protože V_i jsou podprostory, platí $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in V_i$ pro každé $i \in I$. To ale znamená, že $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ leží v průniku podprostorů V_i . Uzavřenost na násobení skalárem se dokáže podobně. \square

Sjednocení dvou podprostorů je zřídka podprostorem. Například sjednocení dvou různých přímek v \mathbb{R}^2 zřejmě není podprostorem, protože není uzavřený na sčítání. Nejmenší podprostor obsahující dané podprostory nazýváme jejich součet.

Definice 5.86. Necht $V_i, i \in I$ jsou podprostory vektorového prostoru \mathbf{V} . *Součtem* (též *spojením*) podprostorů $V_i, i \in I$ rozumíme lineární obal jejich sjednocení, značíme jej $\sum_{i \in I} V_i$, tj.

$$\sum_{i \in I} V_i = \left\langle \bigcup_{i \in I} V_i \right\rangle .$$

Součet podprostorů V_1, V_2, \dots, V_k také značíme $V_1 + V_2 + \dots + V_k$.

Jako cvičení dokažte, že součet je asociativní.

Při tvorbě lineárního obalu stačí sjednocení $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ uzavřít na součty vektorů z různých podprostorů, tj. platí

$$V_1 + V_2 + \dots + V_k = \{v_1 + v_2 + \dots + v_k : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \dots, v_k \in V_k\} .$$

Důkaz přenecháme jako cvičení. Rovněž si všimněme, že sjednocením množiny generátorů prostoru \mathbf{U} a množiny generátorů prostoru \mathbf{V} je množina generátorů prostoru $\mathbf{U} + \mathbf{V}$.

Pro dimenze dvou podprostorů a jejich součtu a průniku platí podobný vztah jako pro počty prvků ve dvou množinách a jejich sjednocení a průniku.

Věta 5.87 (Věta o dimenzi součtu a průniku). *Pro libovolné dva konečně generované podprostory \mathbf{U}, \mathbf{V} vektorového prostoru \mathbf{W} platí*

$$\dim(\mathbf{U}) + \dim(\mathbf{V}) = \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) + \dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) .$$

Důkaz. Prostor $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ je podprostorem konečně generovaného prostoru \mathbf{U} , proto je konečně generovaný (viz tvrzení 5.59). Vezmeme libovolnou bázi $B = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$ průniku $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ (báze existuje v libovolném konečně generovaném prostoru podle důsledku 5.48). Množina B je lineárně nezávislá v prostoru \mathbf{U} , takže ji můžeme doplnit na bázi $C = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_l)$ prostoru \mathbf{U} (viz důsledek 5.54). Podobně doplníme B na bázi $D = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ prostoru \mathbf{V} .

Ukážeme, že $E = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ je báze $\mathbf{U} + \mathbf{V}$. Posloupnost E generuje $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ podle poznámky nad větou (cvičení ??). Zbývá ukázat, že E je lineárně nezávislá. Předpokládejme, že

$$\sum_{i=1}^k a_i \mathbf{w}_i + \sum_{i=1}^l b_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{o} .$$

Chceme dokázat, že všechny koeficienty jsou nutně nulové. Vztah drobně upravíme.

$$\sum_{i=1}^l b_i \mathbf{u}_i = - \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{w}_i$$

Vektor $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^l b_i \mathbf{u}_i$ leží v prostoru \mathbf{U} a také leží, podle odvozeného vztahu, v lineárním obalu vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$, čili v prostoru \mathbf{V} . Vektor \mathbf{u}

tedy leží v průniku $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ a proto jej lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ báze B .

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^k d_i \mathbf{w}_i$$

Z toho získáme následující vyjádření \mathbf{o} jako lineární kombinaci prvků C :

$$\mathbf{o} = \sum_{i=1}^k d_i \mathbf{w}_i - \sum_{i=1}^l b_i \mathbf{u}_i,$$

takže $b_1 = b_2 = \dots = b_l = d_1 = d_2 = \dots = d_k = 0$, protože C je lineárně nezávislá.

Podobně bychom dokázali, že koeficienty c_1, c_2, \dots, c_m jsou rovněž všechny nulové. Nyní ale $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$, protože B je lineárně nezávislá. \square

Věta se geometricky dobře představí, když si ze vztahu vyjádříme dimenzi součtu podprostorů jako součet dimenzí jednotlivých prostorů minus dimenze společné části (průniku). Věta se může hodit třeba při určování dimenze průniku, protože dimenze prostorů a jejich součtu nebývá problém spočítat.

Příklad 5.88. Určíme dimenzi průniku podprostorů $\mathbf{U}, \mathbf{V} \leq \mathbb{Z}_5^4$.

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Dimenzi U a V zjistíme tím, že si vektory napíšeme do řádků a řádkovými úpravami převedeme do odstupňovaného tvaru (víme, že hodnost se nemění ani sloupcovými úpravami, my ale později využijeme toho, že řádkové úpravy nemění lineární obal řádků).

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = B$$

Vidíme, že $\dim(\mathbf{U}) = 2$ a $\dim(\mathbf{V}) = 2$. Nenulové řádky matice A generují \mathbf{U} a řádky matice B generují \mathbf{V} (protože elementární řádkové úpravy nemění lineární obal), takže dohromady máme množinu generátorů $\mathbf{U} + \mathbf{V}$, která už je částečně upravená. Dokončíme Gaussovu eliminaci.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = 3$. Z věty o dimenzi součtu a průniku dostáváme

$$\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = \dim(\mathbf{U}) + \dim(\mathbf{V}) - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Příklad 5.89. Dokážeme, že průnikem dvou různých podprostorů \mathbf{U}, \mathbf{V} dimenze 2 (rovin) v prostoru \mathbf{W} dimenze 3 (např. \mathbb{R}^3) je podprostor dimenze 1 (přímka).

Protože podprostory \mathbf{U} a \mathbf{V} jsou různé, \mathbf{U} je vlastním podprostorem $\mathbf{U} + \mathbf{V}$. Podle tvrzení 5.59 o dimenzi podprostorů máme $2 = \dim \mathbf{U} < \dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) \leq \dim(\mathbf{W}) = 3$, takže dimenze součtu je 3 (součet je podle stejného tvrzení celý prostor \mathbf{W}). Z věty o dimenzi součtu a průniku teď můžeme spočítat

$$\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = \dim(\mathbf{U}) + \dim(\mathbf{V}) - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = 2 + 2 - 3 = 1 .$$

Na rozdíl od sjednocení a průniku, pro součet a průnik **neplatí distributivní zákony**. Z toho důvodu také neplatí „přimočaré zobecnění“ věty o dimenzi součtu a průniku na případ tří podprostorů, viz cvičení.

Jak jsme si již všimli, každý vektor \mathbf{v} součtu $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_k$ lze psát jakou součet $v_1 + v_2 + \dots + v_k$. Pokud je tento zápis jednoznačný hovoříme o direktním součtu. Tento pojem je obdobou pojmu báze pro podprostory.

Definice 5.90. Říkáme, že \mathbf{V} je *direktním součtem* podprostorů $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_k$, pokud jsou splněny dvě podmínky.

- (1) $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_k$
- (2) $\mathbf{V}_i \cap (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_{i-1} + \mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_{i+2} + \dots + \mathbf{V}_k) = \{\mathbf{o}\}$ pro libovolné $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Skutečnost, že \mathbf{V} je direktním součtem $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_k$ zapisujeme

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{V}_k .$$

Pro dva podprostory $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ se podmínky zjednoduší na $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}$ a $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 = \{\mathbf{o}\}$

Tvrzení 5.91. Necht' $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_k$ jsou podprostory vektorového prostoru \mathbf{V} . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

- (1) $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{V}_k$.
- (2) Každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ lze zapsat právě jedním způsobem ve tvaru $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_k$, kde $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_k$. Pak \mathbf{V} je součtem podprostorů $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_k$, takže každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ lze zapsat ve tvaru $\mathbf{v} = v_1 + v_2 + \dots + v_k$, kde $v_i \in \mathbf{V}_i$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. K důkazu jednoznačnosti uvažujme dvě taková vyjádření

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_k = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2 + \dots + \mathbf{v}'_k .$$

Pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ leží vektor $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}'_i$ v prostoru \mathbf{V}_i , ale také v součtu zbylých podprostorů, jak je vidět z vyjádření

$$\mathbf{v}_i - \mathbf{v}'_i = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1) + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}'_2) + \dots + (\mathbf{v}_{i-1} - \mathbf{v}'_{i-1}) + (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}'_{i+1}) + \dots + (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}'_k) .$$

Podle podmínky (2) z definice direktního součtu platí $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}'_i$, čili $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i$.

Předpokládejme naopak, že platí podmínka (2). Pak $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_k$. Pro spor předpokládejme, že pro nějaké i existuje nenulový vektor \mathbf{u} v průniku \mathbf{V}_i a $\sum_{j \neq i} \mathbf{V}_j$. Pak existují $a_1, a_2, \dots \in T$ taková, že

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_{i-1} \mathbf{v}_{i-1} + 0 \mathbf{v}_i + a_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} + \dots + a_k \mathbf{v}_k \\ &= 0 \mathbf{v}_1 + 0 \mathbf{v}_2 + \dots + 0 \mathbf{v}_{i-1} + \mathbf{u} + 0 \mathbf{v}_{i+1} + \dots + 0 \mathbf{v}_k . \end{aligned}$$

Dostali jsme dvě různá vyjádření vektoru \mathbf{u} jako součet vektorů z $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_k$, spor. \square

Direktní součet lze chápat jako rozklad podprostoru na vzájemně nezávislé části. Všimněte si, že \mathbf{V} je direktním součtem jednodimenzionálních podprostorů $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}_1 \rangle \oplus \langle \mathbf{v}_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \mathbf{v}_k \rangle$ právě tehdy, když $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ je báze.

5.7. Prostory nekonečné dimenze.

Pro zjednodušení jsme pojmy lineární nezávislosti a báze definovali pro konečné posloupnosti vektorů, a tím pádem jsme mohli dokazovat některá tvrzení jen pro konečně generované prostory. V této části stručně probereme obecný případ. Příklady prostorů, které nejsou konečně generované, zahrnují prostor reálných funkcí reálné proměnné, nebo reálná čísla chápaná jako vektorový prostor nad \mathbb{Q} .

Lineární (ne)závislost a bázi definujeme jako indexovaný soubor vektorů:

Definice (Zobecnění definic 5.24 a 5.37). Soubor $(\mathbf{v}_i : i \in I)$ vektorů ve \mathbf{V} nazýváme *lineárně závislý*, pokud některý z vektorů \mathbf{v}_i je lineární kombinací ostatních vektorů $\mathbf{v}_j, j \neq i$. V opačném případě říkáme, že je soubor *lineárně nezávislý*.

Bázi rozumíme lineárně nezávislý soubor generátorů.

Tato definice skutečně rozšiřuje stávající definici, protože posloupnost n vektorů můžeme chápat jako soubor indexovaný množinou $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

Připomeňme, že v lineární kombinaci může mít nenulový koeficient pouze konečně mnoho vektorů, součet nekonečně mnoha vektorů nemáme definován. Tedy například v prostoru \mathbb{R}^ω všech nekonečných posloupností reálných čísel soubor $(\mathbf{e}_i : i \in \mathbb{N})$, kde $\mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ s jedničkou na i -tém místě, negeneruje \mathbb{R}^ω . Tento soubor generuje podprostor $\mathbb{R}^{(\omega)}$ všech posloupností s konečným počtem nenulových členů a je jeho bázi.

Mnoho dokázaných tvrzení lze zobecnit, konkrétně platí obdoby následujících tvrzení. Důkazy dělat nebudeme.

- Tvrzení 5.26 charakterizující lineární nezávislost.
- Pozorování 5.38, které říká, že každý vektor lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků báze. To umožňuje zavést souřadnice vektoru vzhledem k bázi. Roli aritmetických vektorových prostorů hrají prostory $\mathbf{T}^{(I)}$: Vektory jsou „skoro všude nulové“ I -tice prvků tělesa I , formálněji, soubory $(a_i : i \in I)$, takové, že všechna $a_i \in T$ až na konečný počet jsou nulové. Operace jsou definovány po složkách. Obdoba tvrzení 5.64 o souřadnicích a operacích i obdoba pozorování 5.66 o zachovávání důležitých vlastností jako lineární nezávislost platí.
- Minimální soubor generátorů je vždy báze (obdoba tvrzení 5.46). Obdoba důsledku 5.47, tj. že z každé množiny generátorů lze vybrat bázi platí, ale není to zřejmé, protože není apriori jasné, že minimální generující podmnožina existuje. Speciálně, každý konečně generovaný vektorový prostor má bázi (obdoba důsledku 5.48). Poznamenejme, že důkaz vyžaduje axiom výběru.
- Všechny báze mají stejnou mohutnost (obdoba důsledku 5.51), takže má smysl zavést dimenzi jako mohutnost libovolné báze. Rovněž platí obdoba důsledku 5.54, že libovolný lineárně nezávislý soubor lze doplnit do báze vektory z libovolné množiny generátorů. Z toho plyne obdoba důsledku 5.55, že maximální lineárně nezávislý soubor je báze.
- Obdoba tvrzení 5.59 platí jen částečně. Je pravda, že podprostor má vždy dimenzi menší nebo rovnou dimenzi původního prostoru. Není ale pravda,

že rovnost nastane pouze tehdy, když se prostory rovnají. Například dimenze prostoru $\mathbb{R}^{(\omega)}$ skoro všude nulových posloupností je stejná jako dimenze jeho vlastního podprostoru tvořeného posloupnostmi, které začínají nulou.

5.8. Samoopravné kódy. Představíme základní pojmy teorie samoopravných kódů a ukážeme si, jak se v ní uplatňuje lineární algebra.

5.8.1. Kódy neformálně. V roce 1947 byl v Bellových laboratořích v provozu jeden z prvních reléových počítačů. Relé byla uspořádána do pětic. Jednotlivé cifry $0, 1, \dots, 9$ byly reprezentovány tak, že vždy dvojice z pěti relé byla sepnuta a zbylá tři nikoliv. Protože existuje deset možných výběrů dvojice prvků z pěti, každá z dvojic reprezentovala právě jednu cifru.

Pokud během výpočtu došlo k nějaké chybě, projevila se tak, že v nějaké pěti relé byl počet sepnutých relé různý od dvou. Počítač to zaregistroval a zastavil se. V té chvíli nastoupila obsluha, nějakým způsobem zjistila, jaká dvojice relé má být správně sepnuta, ručně to zařídila, a spustila pokračování výpočtu.

V režimu bez obsluhy (mimo pracovní dobu) počítač výpočet ukončil a ze zásobníku programů vzal ten následující. Toto ukončování výpočtu bez náhrady motivovalo Richarda W. Hamminga (1915-1998) k návrhu prvních *samoopravných kódů*.

Bellův počítač pracoval s desetiprvkovou abecedou $0, 1, \dots, 9$. Každou z těchto cifer reprezentoval pomocí posloupnosti pěti nul a jednotek: 00110, 01010, atd. *Binární* vyjádření prvků nějaké abecedy jako posloupnosti nul a jednotek je v současnosti tak běžné, že je považujeme za samozřejmé. Tak například odpovědi v testu s výběrem ze čtyř možností a, b, c, d můžeme přeložit do binárního vyjádření třeba následovně:

$$a = 00, \quad b = 01, \quad c = 10, \quad d = 11.$$

Vyplněný test s 90 otázkami a nabídkou čtyř možných odpovědí je pak totéž, co posloupnost 180 nul a jednotek. Analogicky můžeme zapsat celý genetický kód člověka, použijeme-li překlad

$$G = 00, \quad C = 01, \quad T = 10, \quad H = 11.$$

Zápis bude jenom o něco delší.

Morseova abeceda je příklad jiného kódování. Používá sice také jenom dva symboly - tečka, čárka - ale mezi symboly do abecedy je třeba také zařadit mezeru. To je cena, kterou je nutné zaplatit za to, že posloupnosti teček a čárek reprezentující různá písmena abecedy mohou mít různou délku a Morseova volba byla taková, že vyjádření jednoho písmene může být počátečním úsekem jiného písmene. Např. $e = \cdot, \quad a = \cdot -$.

My se budeme v dalším zabývat pouze kódováním, které každému symbolu původní abecedy přiřazuje posloupnost n nul a jedniček pro nějaké pevné n .

Definice 5.92. *Binární blokový kód* délky n je libovolná podmnožina C aritmetického vektorového prostoru \mathbb{Z}_2^n . Prvkům C říkáme *slova* nebo také *bloky* kódu C . *Zprávou* v kódu C potom rozumíme posloupnost slov kódu C .

Tak například, je-li $C = \{000, 001, 010, 001, 110, 111\}$ kód délky 3, pak posloupnost

$$000 \ 111 \ 110 \ 010 \ 001$$

je zpráva v tomto kódu. Mezery mezi jednotlivými slovy kódu děláme pro pohodlí. Také vynecháváme závorky při zápisu vektorů a čárky mezi jejich složkami, jak je v

teroií kódování běžné. Stejná délka jednotlivých bloků v binárním kódu umožňuje jednoznačně interpretovat tutěž zprávu zapsanou bez mezer

000111110010001.

Zprávu zapsanou v jakékoliv abecedě s konečným počtem symbolů můžeme jednoznačně zakódovat pomocí bloků binárního kódu vhodné délky n . Stačí pouze, aby bylo číslo 2^n aspoň tak velké jako počet znaků v původní abecedě.

V této "digitalizované" podobě můžeme zprávu přenést nějakým *komunikačním kanálem*. Pokud je kanál bez jakéhokoliv šumu, není žádné nebezpečí, že přijímací strana přijme zprávu v jiné podobě, než v jaké byla vyslána. Takové kanály ale v reálném světě neexistují, vždy je nenulová pravděpodobnost, že některá z cifer 0 nebo 1 se během přenosu změní na opačnou. Pro kanály se šumem nejsou blokové kódy typu $C = \mathbb{Z}_2^n$ vhodné. Skutečnost, že každý blok z n cifer 0 nebo 1 je kódovým slovem, znamená že přijímací strana nemá možnost poznat, že během přenosu zprávy byl nějaký blok pozměněn. Každý přijatý blok mohl být také vyslán.

Řešením je nepoužívat jako kódová slova všechny bloky dané délky n , ale pouze některé. Pokud jsou kódová slova dobře vybrána, může přijímací strana poznat, že během přenosu bloku zprávy došlo k nějaké chybě díky tomu, že přijme posloupnost délky n , která není kódovým slovem. Takový blok vysílající strana nemohla vyslat. Daní, kterou je nutné za to zaplatit, je snížení *rychlosti přenosu informace*, množství informace, kterou kanálem přeneseme za jednotku času. Do kódu vnášíme *nadbytečnost*, cizím slovem *redundanci* - pro přenášení informace používáme více symbolů, než kolik je potřeba. nadbytečnost ale umožňuje odhalovat a opravovat chyby při přenosu dat.

Nejjednodušší způsob jak bojovat se šumem, je vyslat každý blok dvakrát po sobě. Příkladem takového *opakovacího kódu* je následující kód délky 4:

$$C = \{0000, 0101, 1010, 1111\}.$$

Každé slovo má dvě části. První dva symboly jsou *informační symboly*, zbylé dva jsou *kontrolní symboly*. Kontrolní symboly nenesou žádnou informaci, pouze opakují předchozí dva symboly. Z každých čtyř symbolů vyslaného slova pouze první dva nesou informaci. Rychlost přenosu informace pomocí takového kódu je poloviční oproti rychlosti přenosu informace kódem $D = \{00, 01, 10, 11\}$.

Narozdíl od kódu D ale kód C umožňuje přijímací straně poznat, pokud během přenosu slova došlo k jedné chybě. První a druhá polovina přijatého čtyřprvkového bloku se v takovém případě liší. Říkáme, že kód C *odhalí jednu chybu*.

V opakovacím kódu můžeme počáteční informační část opakovat vícekrát. Kód

$$\{000, 111\} \subseteq \mathbb{Z}_2^3$$

obsahuje pouze dva bloky, v každém z nich se první symbol opakuje třikrát. Je to příklad *3-opakovacího kódu*. Jiným příkladem 3-opakovacího kódu je

$$\{000000, 010101, 101010, 111111\} \subseteq \mathbb{Z}_2^6,$$

ve kterém opakujeme třikrát vždy první dva informační symboly. Rychlost přenosu informace kterýmkoliv z těchto dvou kódů je $1/3$. V každém bloku je pouze jedna třetina symbolů informačních, zbylé dvě třetiny jsou kontrolní.

Každý 3-opakovací kód odhalí jednu chybu - změníme-li v libovolném bloku jeden symbol, dostaneme slovo, které do kódu nepatří. Oproti prostému opakovacímu kódu ale dokáže navíc *lokalizovat (opravit) jednu chybu*. Ukážeme si to na

příkladu, kdy vyslaný blok 010101 přijme přijímající strana jako 010001. Graficky to znázorníme takto:

$$010101 \longrightarrow 010001.$$

Rozdělíme-li libovolné slovo 3-opakovacího kódu na tři stejně dlouhé úseky, jsou tyto úseky stejné. Tak jsou kódová slova definována. Pokud tomu tak u přijatého slova není, došlo během přenosu informace k nějaké chybě. Pokud došlo k jedné chybě, dva z těchto úseků zůstanou stejné, třetí (ten, ve kterém se chyba vyskytla) se od nich liší. Předpokládáme, že vysláno bylo to kódové slovo, ve kterém se všechny tři úseky rovnají těm dvěma stejným přijatým. Je to jediná možnost, jak z přijatého slova dostat kódové slovo změnou jediného symbolu. V našem případě změním čtvrtý přijatý symbol z 0 na 1 a dostaneme kódové slovo. Jakékoliv jiné kódové slovo dostaneme z přijatého pomocí změny aspoň dvou symbolů. Například tak, že obě přijaté 1 změním na 0.

Pokud předpokládáme, že pravděpodobnost změny symbolu vlivem šumu je $p < 1/2$, a tedy pravděpodobnost, že symbol byl přijatý správně (tj. tak jak byl vyslán) je $1 - p > 1/2 > p$, pak v případě přijetí nekódového slova je nejpravděpodobnější, že bylo vysláno to slovo, které se od přijatého liší v co nejméně symbolech.

5.8.2. *Hammingova vzdálenost.* Pro teorii samoopravných kódů je následující definice klíčová.

Definice 5.93. Jsou-li $\mathbf{a} = a_1a_2 \cdots a_n$ a $\mathbf{b} = b_1b_2 \cdots b_n$ libovolné dva prvky \mathbb{Z}_2^n , pak jejich *Hammingova vzdálenost* $h(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ se rovná počtu indexů $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, pro které platí $a_i \neq b_i$. *Hammingova váha* slova $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_2^n$ je definována jako Hammingova vzdálenost $h(\mathbf{a}, \mathbf{o})$ slova \mathbf{a} od nulového slova \mathbf{o} .

Hammingova vzdálenost je tak definována pro posloupnosti téže délky a rovná se počtu míst (indexů), na kterých se obě posloupnosti liší. Hammingova váha slova \mathbf{a} se pak rovná počtu cifer 1 ve slově \mathbf{a} . Pro Hammingovu vzdálenost zřejmě platí $h(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ a $h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = h(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ pro libovolná dvě slova $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}_2^n$. Platí také trojúhelníková nerovnost

$$h(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \leq h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + h(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

pro libovolná tři slova $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{Z}_2^n$. Snadno si to ověříte sami. Pokud totiž pro nějaký index $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $a_i \neq c_i$, platí také $a_i \neq b_i$ nebo $b_i \neq c_i$. Jestliže index i přispívá ke vzdálenosti $h(\mathbf{a}, \mathbf{c})$, přispívá také k aspoň jedné ze vzdáleností $h(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ nebo $h(\mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Hammingovu vzdálenost si můžeme také představit pomocí délky (počtu hran) cest v nějakém neorientovaném grafu. Jeho vrcholy jsou prvky \mathbb{Z}_2^n a dva vrcholy \mathbf{a}, \mathbf{b} jsou spojené hranou pokud se liší v právě jednom symbolu, tj. pokud je jejich Hammingova vzdálenost rovná 1. Pro $n = 2$ se tento graf rovná čtverci, pro $n = 3$ je jím třídimenzionální krychle. Hammingova vzdálenost libovolných dvou vrcholů $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}_2^n$ se pak rovná délce (tj. počtu hran) v nejkratší cestě z \mathbf{a} do \mathbf{b} . Proto se také někdy tomuto grafu říká *Hammingova krychle* i v případě libovolného n .

Pro schopnost kódu odhalovat a lokalizovat chyby je důležitý pojem minimální vzdálenost kódu.

Definice 5.94. Je-li $C \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ binární blokový kód délky n , pak definujeme *minimální vzdálenost* kódu C jako číslo

$$h(C) = \min\{h(\mathbf{a}, \mathbf{b}); \mathbf{a}, \mathbf{b} \in C, \mathbf{a} \neq \mathbf{b}\}.$$

- Příklad 5.95.**
- Minimální vzdálenost 3-opakovacího kódu $\{000, 111\}$ se rovná 3.
 - Minimální vzdálenost opakovacího kódu $\{0000, 0101, 1010, 1111\}$ se rovná 2.
 - Minimální vzdálenost kódu používaného v roce 1947 v reléovém počítači v Bellových laboratořích se rovná 2.
 - Minimální vzdálenost kódu $C = \mathbb{Z}_2^n$ se rovná 1.

Nyní můžeme přesně formulovat, co myslíme tím, že nějaký kód $C \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ odhalí jednu chybu. Pokud při přenosu slova $\mathbf{a} \in C$ dojde k jedné chybě, přijímající strana to pozná, přijme-li v takovém případě slovo, které není prvkem C . Znamená to, že žádné slovo $\mathbf{b} \in C$, jehož Hammingova vzdálenost od \mathbf{a} se rovná 1, není blokem kódu C . Jinak řečeno, Hammingova vzdálenost libovolných dvou různých kódových slov $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C$ je aspoň 2, a to znamená, že minimální vzdálenost kódu C je aspoň 2.

Každý kód C , jehož minimální vzdálenost je $d > 1$, odhalí až $d - 1$ chyb. Pokud při přenosu slova $\mathbf{a} \in C$ dojde k nejvýše $d - 1$ chybám, přijímající strana přijme slovo \mathbf{c} , jehož Hammingova vzdálenost od vyslaného slova \mathbf{a} je nejvýše $d - 1$. Slovo \mathbf{c} tak nepatří do kódu C , a přijímající strana proto odhalí, že při přenosu došlo k nějakým chybám. Počet chyb ale jednoznačně nezjistí stejně jako kde k nim došlo.

Předpokládejme nyní, že minimální vzdálenost nějakého kódu $C \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ se rovná 3. Pokud při přenosu slova \mathbf{a} dojde k jedné chybě, přijímající strana přijme slovo \mathbf{c} , které má od slova \mathbf{a} Hammingovu vzdálenost $h(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = 1$. Vzdálenost přijatého slova \mathbf{c} od jakéhokoliv jiného slova $\mathbf{b} \in C$ je v důsledku trojúhelníkové nerovnosti

$$h(\mathbf{c}, \mathbf{b}) \geq h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - h(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \geq 3 - 1 = 2,$$

použili jsme navíc skutečnost, že minimální vzdálenost kódu C je 3, a tedy $h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 3$ pro jakékoliv dva různé bloky $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C$.

Vyslané slovo \mathbf{a} je tedy ze všech možných vyslaných slov $\mathbf{b} \in C$ nejbližší (vzhledem k Hammingově vzdálenosti) k přijatému slovu \mathbf{c} . Předpokládáme, že pravděpodobnost poškození přenášeného symbolu šumem v kanálu je $p < 1/2$ a tedy menší než pravděpodobnost $1 - p$ že k poškození symbolu nedošlo. V případě přijetí slova \mathbf{c} je nejpravděpodobnější, že bylo vysláno slovo $\mathbf{a} \in C$, které je ze všech slov kódu C nejbližší k přijatému slovu \mathbf{c} . V tomto smyslu tedy kód s minimální vzdáleností 3 dokáže opravit (lokalizovat) jednu chybu.

Zcela analogicky lze odůvodnit, že kód s minimální vzdáleností $2d + 1$ dokáže opravit d chyb. Schopnost kódu odhalovat a opravovat daný počet chyb je tak dána jeho minimální vzdáleností.

5.8.3. *Paritní kód, lineární kódy.* Nejjednodušší příklad kódu, který je schopen odhalit jednu chybu, je *paritní kód*.

Definice 5.96. *Paritní kód* délky n je podmnožina $S \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ tvořená všemi slovy, které obsahují sudý počet jednotek.

Minimální vzdálenost paritního kódu S je 2, paritní kód tedy dokáže odhalit jednu chybu. Známe-li $a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$, existuje právě jedno $a_n \in \{0, 1\}$ takové, že slovo $\mathbf{a} = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \in S$. Prvních $n - 1$ symbolů ve slově \mathbf{a} tak můžeme považovat za informační symboly, zatímco poslední symbol a_n je kontrolní. Nenesou žádnou dodatečnou informaci, lze je doplnit na základě znalosti $a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$. Proto se kontrolnímu bitu říká také *paritní bit* nebo *paritní kontrola*. Samozřejmě

můžeme za kontrolní bit považovat kterýkoliv symbol ve slově \mathbf{a} a zbylé symboly za informační. Obvyklé ale bývá seřadit symboly v kódovém slově tak, že informační symboly jsou na začátku a kontrolní symboly následují po nich. Rychlost přenosu informace paritním kódem je tak $n - 1/n$.

Kódy, které dokážou nejen odhalit, ale i opravit chyby se konstruují kombinací více paritních kontrol.

Paritní kód S délky n má jednu důležitou vlastnost. Tvoří nejenom podmnožinu \mathbb{Z}_2^n , ale dokonce podprostor. Obsahuje totiž nulové slovo \mathbf{o} , je proto uzavřený na násobení skaláry ze \mathbb{Z}_2 a zřejmě také na sčítání. Takové kódy jsou důležité a zaslouží si zvláštní pojmenování.

Definice 5.97. Binární blokový kód $C \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ délky n se nazývá *lineární kód*, je-li C podprostor \mathbb{Z}_2^n . Je-li dimenze C rovna r , říkáme také, že jde o *lineární (n, r) -kód*.

Minimální vzdálenost lineárních kódů lze zjistit snáze než u obecných kódů.

Tvrzení 5.98. *Minimální vzdálenost lineárního kódu C se rovná*

$$\min\{h(\mathbf{a}, \mathbf{o}); \mathbf{a} \in C, \mathbf{a} \neq \mathbf{o}\},$$

tj. rovná se minimální Hammingově váze nenulových prvků C .

Důkaz. Připomeňme si, že minimální vzdálenost kódu C označujeme $h(C)$. Je-li C lineární kód, platí $\mathbf{o} \in C$ a $h(\mathbf{a}, \mathbf{o}) \geq h(C)$ pro libovolné nenulové slovo $\mathbf{a} \in C$. Dále platí pro libovolná dvě slova $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C$, že

$$h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = h(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{o}).$$

Je-li tedy $h(C) = h(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, platí, že $h(C)$ se rovná Hammingově váze vektoru $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. □

Je-li C lineární (n, r) -kód, má prostor C dimenzi r . Zvolíme-li v něm nějakou bázi $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$, je každý prvek \mathbf{b} kódu (podprostoru) C jednoznačně určen r -ticí jeho souřadnic vzhledem ke zvolené bázi. K jeho jednoznačnému určení nám tedy stačí posloupnost koeficientů lineární kombinace, která vyjadřuje \mathbf{b} pomocí prvků zvolené báze. Naopak, každá posloupnost r nul a jednotek určuje jednoznačně nějaký prvek kódu C . To jenom jinak vyjadřujeme skutečnost, že C je izomorfní aritmetickému prostoru \mathbb{Z}_2^r . K předání informace o bloku \mathbf{b} nám tedy stačí předat r koeficientů vyjadřujících \mathbf{b} jako lineární kombinaci báze $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$. Kód C ale předává celý vektor \mathbf{b} délky n . Intuitivně tak můžeme říct, že rychlost přenosu informace lineárním (n, r) -kódem je r/n .

5.8.4. Hammingovy kódy. Hamming předložil tři konstrukce kódů, které opravují jednu chybu. Všechny tři jsou založené na kombinaci několika paritních testů. Všechny tři návrhy jsou lineární kódy. Jejich konstrukci si ukážeme na příkladu, který má čtyři informační symboly. Protože kódy mají opravovat jednu chybu, musí být jejich minimální vzdálenost 3.

Příklad 5.99. V první konstrukci si čtyři informační symboly a, b, c, d napíšeme do prvních dvou řádků a prvních dvou sloupců čtvercové matice řádu 3.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & ? \\ c & d & ? \\ ? & ? & ? \end{array} \right)$$

Místo otazníků doplníme další prvky tak, aby v každém řádku a každém sloupci byl sudý počet jednotek. Doplněná matice je

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & r_1 \\ c & d & r_2 \\ \hline s_1 & s_2 & t \end{array} \right),$$

kde

$$r_1 = a + b, \quad r_2 = c + d, \quad s_1 = a + c, \quad s_2 = b + d, \quad t = s_1 + s_2 = a + b + c + d = r_1 + r_2.$$

Celé kódové slovo je potom $abr_1cdr_2s_1s_2t$. Informační symboly jsou na prvním, druhém, čtvrtém a pátém místě, zbylé symboly jsou kontrolní.

Kód C je tvořen všemi slovy $\mathbf{a} = a_1a_2 \cdots a_9 \in \mathbb{Z}_2^9$, pro která platí

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + a_2 \\ a_6 &= a_4 + a_5, \\ a_7 &= a_1 + a_4, \\ a_8 &= a_2 + a_5, \\ a_9 &= a_1 + a_2 + a_4 + a_5. \end{aligned}$$

Prvky a_1, a_2, a_4, a_5 můžeme zvolit libovolně a právě uvedené rovnosti ukazují, že matice

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ \hline a_7 & a_8 & a_9 \end{array} \right)$$

splňuje všechny požadované paritní testy, tj. každý řádek a každý sloupec obsahuje sudý počet jednotek.

Z konstrukce kódu také snadno nahlédneme, že kód C opravuje jednu chybu. Pokud totiž při přenosu slova $\mathbf{a} = a_1a_2 \cdots a_9 \in C$ dojde k jedné chybě, přijaté slovo nebude splňovat dva paritní testy, jeden pro řádek a druhý pro sloupec, ve kterých leží chybně přijatý symbol. Tyto dva neplatné paritní testy tak přesně určují polohu poškozeného symbolu.

Kód C je lineární, protože jeho prvky jsou právě všechna řešení $x_1x_2 \cdots x_9$ homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Třetí sloupec spolu s posledními čtyřmi sloupci jsou lineárně nezávislé, hodnost matice A je tedy aspoň 5, řádky matice A jsou tedy lineárně nezávislé, $\text{rank}(A) = 5$, dimenze $\text{Ker}(A)$ je tudíž podle věty o dimenzi jádra a obrazu rovna $9 - 5 = 4$ a počet prvků kódu C je 16.

Přijímající strana tak snadno ověří, patří-li přijaté slovo $\mathbf{c} = c_1c_2 \cdots c_9$ do kódu C . Stačí ověřit rovnost $A\mathbf{c}^T = \mathbf{0}^T$.

Poslední pozorování vede k následující důležité definici.

Definice 5.100. Je-li C lineární (n, r) -kód a pro matici A typu $(n - r) \times n$ platí, že $C = \text{Ker } A$, pak matici A nazýváme *kontrolní matice* kódu C .

Z definice kontrolní matice a z věty o dimenzi jádra a obrazu matice plyne, že $\text{rank}(A) = \dim(\text{Im}(A)) = n - r$, tj. že posloupnost řádků matice A je lineárně nezávislá. Později si ukážeme obecné tvrzení, ze kterého plyne existence kontrolní matice pro jakýkoliv lineární kód. Ve skutečnosti jsou lineární kódy zadávány tak, že napíšeme jejich kontrolní matici.

Pomocí kontrolní matice můžeme snadno zjistit, jaká je minimální vzdálenost lineárního kódu.

Tvrzení 5.101. *Nechť C je (n, r) -lineární kód a A jeho kontrolní matice. Minimální vzdálenost kódu C se rovná d právě když libovolná $(d-1)$ -prvková podposloupnost sloupců matice A je lineárně nezávislá a existuje d -prvková podposloupnost sloupců A , která je lineárně závislá.*

Důkaz. Kontrolní matice A kódu C je typu $(n-r) \times n$. Nechť $\mathbf{x} = x_1x_2 \cdots x_n$ je nenulový prvek kódu C . Pak platí $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$, neboli

$$x_1A_{*1} + x_2A_{*2} + \cdots + x_nA_{*n} = \mathbf{0}^T.$$

Je-li l Hammingova váha prvku \mathbf{x} a $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}$ jsou všechny nenulové složky vektoru \mathbf{x} , pak platí rovněž

$$x_{j_1}A_{*j_1} + x_{j_2}A_{*j_2} + \cdots + x_{j_l}A_{*j_l} = \mathbf{0}^T,$$

l -prvková podposloupnost sloupcových vektorů $A_{*j_1}, \dots, A_{*j_l}$ je tedy lineárně závislá.

Jestliže naopak existuje lineárně závislá podposloupnost $A_{*i_1}, A_{*i_2}, \dots, A_{*i_m}$ sloupcových vektorů matice A , existují prvky $x_{i_j} \in \mathbb{Z}_2$, ne všechny nulové, takové, že

$$x_{i_1}A_{*i_1} + x_{i_2}A_{*i_2} + \cdots + x_{i_m}A_{*i_m} = \mathbf{0}^T.$$

Doplňme tuto lineární kombinaci zbývajících sloupcovými vektory matice A s koeficienty $x_i = 0$. Vektor $\mathbf{x} = x_1 \cdots x_n$ pak splňuje $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$, je tedy blokem kódu C a jeho Hammingova váha je nejvýše m .

Je-li tedy minimální vzdálenost kódu C rovna d , je podle Tvrzení 5.98 minimální Hammingova váha nenulových vektorů v C rovna d . Každá podposloupnost $d-1$ sloupcových vektorů matice A je tedy lineárně nezávislá a existuje podposloupnost d sloupcových vektorů matice A , která je lineárně závislá.

Jestliže naopak je každá podposloupnost $d-1$ sloupcových vektorů matice A lineárně nezávislá, neobsahuje C nenulový vektor, který by měl Hammingovu váhu menší nebo rovnou $d-1$. Pokud je navíc nějaká d -prvková podposloupnost sloupcových vektorů A lineárně závislá, existuje v $C = \text{Ker } A$ nenulový vektor, jehož Hammingova váha je nejvýše d . Minimální Hammingova váha nenulových vektorů v C je tedy rovna d . \square

Příklad 5.102. Kontrolní matice A kódu C z Příkladu 5.99 neobsahuje nulový sloupcový vektor, každá jednoprvková podposloupnost sloupcových vektorů matice A je tedy lineárně nezávislá. Libovolné dva sloupcové vektory matice A jsou různé, lineárně nezávislá je proto rovněž každá dvouprvková podposloupnost sloupcových vektorů v A . Platí dokonce, že žádný ze sloupcových vektorů se nerovná součtu jiných dvou sloupcových vektorů, a tak každá tříprvková podposloupnost sloupců matice A je lineárně nezávislá. Naproti tomu první sloupcový vektor se rovná součtu jiných tří sloupcových vektorů, existuje tedy čtyřprvková lineárně závislá podposloupnost sloupcových vektorů matice A . Minimální vzdálenost kódu C je tedy 4.

Kód C tak opraví jednu chybu a odhalí až tři chyby. Rychlost přenosu informace tímto kódem je $4/9$, což je zlepšení oproti 3-opakovacímu kódu, který také dokáže opravit jednu chybu.

Příklad 5.103. Druhý kód, který Hamming navrhnul, se od toho prvního liší v tom, že nepoužívá paritní kontrolu třetího řádku a třetího sloupce, tj. nepotřebuje prvek t . Matici

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & ? \\ c & d & ? \\ \hline ? & ? & ? \end{array} \right)$$

doplní na matici

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & r_1 \\ c & d & r_2 \\ \hline s_1 & s_2 & \end{array} \right),$$

kde

$$r_1 = a + b, \quad r_2 = c + d, \quad s_1 = a + c, \quad s_2 = b + d.$$

Jde opět o lineární kód, označme jej D . Kontrolní matici tohoto kódu dostaneme tak, že z kontrolní matice původního kódu vynecháme poslední řádek a poslední sloupec. Dostaneme tak matici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Libovolná dvouprvková podposloupnost sloupců matice B je lineárně nezávislá ze stejného důvodu, jako v případě prvního Hammingova návrhu. Existují lineárně závislé tříprvkové podposloupnosti sloupců v B . Minimální vzdálenost kódu D je tak rovna 3, kód dokáže opravit jednu chybu a odhalit až dvě chyby. Rychlost přenosu informace kódem D je $1/2$, což je další vylepšení.

Může kód se čtyřmi informačními symboly opravovat jednu chybu a současně přenášet informaci rychlostí větší než $1/2$? Ukážeme si tvrzení, které ukazuje, že by to mohlo jít ještě o něco rychleji.

Tvrzení 5.104. *Předpokládejme, že kód délky n má r informačních symbolů a $n-r$ kontrolních symbolů. Pokud opravuje jednu chybu, musí platit*

$$\frac{2^n}{n+1} \geq 2^r.$$

Důkaz. Kód C délky n , který má r informačních symbolů, musí obsahovat aspoň 2^r různých slov. Každá volba informačních symbolů musí vést k nějakému kódovému slovu, různé volby k různým slovům. Jinak by dekódování nebylo jednoznačné.

Využijeme geometrické představy kódu jako podmnožiny vrcholů Hammingovy krychle. Pro každý vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_2^n$ nazveme 1-okolí slova \mathbf{a} množinu

$$V_1(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n; h(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \leq 1\}.$$

Snadno nahlédneme, že 1-okolí každého vektoru \mathbf{a} obsahuje přesně $n+1$ prvků.

Má-li kód C opravovat jednu chybu, musí být jeho minimální vzdálenost aspoň 3. To znamená, že pro libovolná dvě různá kódová slova $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C$ musí být jejich 1-okolí disjunktní. V opačném případě by totiž v důsledku trojúhelníkové nerovnosti

pro Hammingovu vzdálenost platilo $h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq 2$, což je spor s tím, že minimální vzdálenost kódu je aspoň 3.

Sjednotíme-li všechna 1-okolí všech slov $\mathbf{a} \in C$, bude mít toto sjednocení aspoň $2^r(n+1)$ prvků. Tento počet musí být menší nebo rovný počtu všech prvků (vrcholů Hammingovy krychle) \mathbb{Z}_2^n , tj. 2^n . Odtud po snadné úpravě vyplývá dokazovaná nerovnost. \square

Analogickou nerovnost můžeme dokázat pro kódy, které opravují d chyb, podrobnosti ve cvičeních.

Pro $r = 4$ a $n = 6$ platí $2^4 \cdot 7 > 2^6$, kód délky 6 se čtyřmi informačními symboly, který by opravoval jednu chybu proto neexistuje.

V případě $n = 7$ platí rovnost $2^4 \cdot 8 = 2^7$, existence kódu délky 7 se čtyřmi informačními symboly, který opravuje jednu chybu, tak vyloučena není. Všimněme si, že pokud by takový kód $C \subseteq \mathbb{Z}_2^7$ existoval, platila by rovnost

$$\mathbb{Z}_2^7 = \bigcup_{\mathbf{a} \in C} V_1(\mathbf{a}).$$

To znamená, že pro takový kód by každý vrchol Hammingovy krychle \mathbb{Z}_2^7 měl vzdálenost 1 od nějakého (jednoznačně určeného) kódového slova \mathbf{a} . Všechny vrcholy Hammingovy krychle \mathbb{Z}_2^7 by tak byly pokryté 1-okolími kódových slov. Takový kód by byl optimální v tom smyslu, že množina \mathbb{Z}_2^7 by neobsahovala žádná "zbytečná" slova, každé ze slov délky 7 by se vyskytovalo ve vzdálenosti nejvýše 1 od nějakého kódového slova.

Definice 5.105. Kód délky n , který má r informačních symbolů a opravuje jednu chybu, se nazývá *perfektní kód*, pokud platí rovnost

$$2^r(n+1) = 2^n.$$

Jako poslední příklad kódu si ukážeme perfektní lineární $(7, 4)$ -kód, který opravuje jednu chybu.

Příklad 5.106. Kód H_3 definujeme pomocí kontrolní matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prvky C jsou prvky jádra $\text{Ker}(A)$ matice A . Tato matice je v řádkově odstupňovaném tvaru, její hodnost se tedy rovná 3, a dimenze kódu $H_3 = \text{Ker}(A)$ je tedy rovna 4. Platí-li $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$ pro $\mathbf{x} = x_1x_2 \cdots x_7$, jsou neznámé x_4, x_5, x_6, x_7 volné, můžeme je zvolit libovolně a považujeme je za informační symboly. Neznámé x_1, x_2, x_3 jsou volbou x_4, x_5, x_6, x_7 určeny jednoznačně:

$$x_1 = x_4 + x_5 + x_7, \quad x_2 = x_4 + x_6 + x_7, \quad x_3 = x_5 + x_6 + x_7.$$

Neznámé x_1, x_2, x_3 jsou tedy kontrolní (paritní) bity. I tento kód H_3 je založen na kombinaci tří paritních kontrol.

Sloupce matice A tvoří všechny nenulové vektory z prostoru \mathbb{Z}_2^3 . Každá dvouprvková podposloupnost sloupců matice A je tedy lineárně nezávislá a minimální vzdálenost kódu C je tak aspoň 3, (ve skutečnosti je právě 3), a kód H_3 tak opravuje jednu chybu.

Jak najdeme kódové slovo $x_1x_2 \cdots x_7$, jsou-li dány informační symboly x_4, x_5, x_6, x_7 , jsme si už řekli. Pokud přijímající strana přijme slovo $\mathbf{y} = y_1y_2 \cdots y_7$, spočítá součin $A\mathbf{y}^T$. Platí-li $A\mathbf{y}^T = \mathbf{o}^T$, je \mathbf{y} kódové slovo a bylo tedy přeneseno bez chyby.

Je-li $A\mathbf{y}^T \neq \mathbf{o}^T$, došlo během přenosu k chybě a zbývá určit, který symbol v přijatém slově $\mathbf{y} = y_1y_2 \cdots y_7$ je ten poškozený. Označme $A\mathbf{y}^T = (s_1s_2s_3)^T$.

Protože matice A obsahuje všechny nenulové vektory \mathbb{Z}_2^3 jako sloupce, existuje jednoznačně určený sloupec $A_{*j} = (s_1s_2s_3)^T$. Platí $A_{*j} = A\mathbf{e}_j^T$ pro j -tý vektor \mathbf{e}_j standardní báze v \mathbb{Z}_2^7 . Slovo $\mathbf{y} + \mathbf{e}_j$ se od \mathbf{y} liší pouze v j -tém symbolu. Platí navíc

$$A(\mathbf{y}^T + \mathbf{e}_j^T) = A\mathbf{y}^T + A\mathbf{e}_j^T = (s_1s_2s_3)^T + A_{*j} = (s_1s_2s_3)^T + (s_1s_2s_3)^T = \mathbf{o}^T.$$

Slovo $\mathbf{y} + \mathbf{e}_j$ tak patří do kódu H_3 a má Hammingovu vzdálenost 1 od přijatého slova \mathbf{y} . Je to tedy to slovo, které bylo vysláno a při přenosu byl poškozen j -tý symbol.

Příklad 5.107. Při použití Hammingova kódu H_3 bylo přijato slovo 1010101. Došlo během přenosu k chybě a pokud ano, jaké slovo bylo vysláno?

Vynásobíme kontrolní matici A vektorem $(1010101)^T$. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektor $(0, 1, 1)^T$ je šestý sloupcový vektor matice A_3 , poškozen byl tedy šestý symbol ve slově 1010101, vysláno bylo slovo 1010111.

Definice 5.108. *Hammingův kód H_r* je binární blokový kód délky $n = 2^r - 1$ určený kontrolní maticí typu $r \times n$, jejíž sloupce tvoří všechny nenulové aritmetické vektory dimenze r nad \mathbb{Z}_2 .

Details důkazu následujícího tvrzení přenecháme do cvičení.

Tvrzení 5.109. *Hammingův kód H_r je perfektní lineární kód délky $2^r - 1$ a dimenze $2^r - r - 1$, jehož minimální vzdálenost je 3.*

Cvičení

1. Vysvětlíte, proč množina všech polynomů stupně právě 173 s reálnými koeficienty s běžnými operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem není vektorovým prostorem.

2. Pro libovolné těleso \mathbf{T} a libovolnou množinu X definujeme vektorový prostor $\mathbf{T}^{(X)}$ jako množinu těch zobrazení f z X do \mathbf{T} , pro který je množina $\{x : f(x) \neq 0\}$ je konečná. Sčítání a násobení definujeme po souřadnicích, tj. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ a $(af)(x) = af(x)$. Dokažte, že $\mathbf{T}^{(X)}$ je vektorový prostor.

Tímto způsobem bychom zobecnili definici 5.2 na případ nekonečné dimenze – prostor $\mathbf{T}^{(X)}$ může být nazýván aritmetickým vektorovým prostorem nad \mathbf{T} dimenze $|X|$.

3. U všech příkladů vektorových prostorů za definicí ověřte, že se skutečně jedná o vektorové prostory.

4. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ DOKONCIT

5. Množina všech podmnožin množiny $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ (nebo jiné dané množiny X) spolu s operací symetrické diference, tj. $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, je vektorový prostor nad \mathbb{Z}_2 . (Násobení skalárem je jednoznačně dané axiomy.) Dokažte a vysvětlete, proč je tento prostor „v podstatě“ \mathbb{Z}_2^n .

6. Dokažte tvrzení 5.4 a formulujte a dokažte obdoby vlastností (8) a (9) z tvrzení 3.3.

7. Dokažte, že \mathbf{T} jako vektorový prostor nad \mathbf{T} má pouze triviální podprostory.

8. Dokažte, že jedinými netriviálními podprostory prostoru \mathbf{T}^2 jsou množinu tvaru $\{t\mathbf{x} : t \in T\}$, kde $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in \mathbf{T}^2$.

9. Nechť A je matice nad \mathbf{T} typu $m \times n$ a $\mathbf{b} \in T^m$. Dokažte, že množina $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ je podprostorem \mathbf{T}^n právě tehdy, když $\mathbf{b} = \mathbf{o}$.

10. Zjistěte lineární obal množiny X z příkladu 5.18 a dokažte, že množina Y tvoří podprostor.

11. Dokažte, že posloupnost vektorů $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ ve vektorovém prostoru \mathbf{V} nad \mathbf{T} je lineárně nezávislá právě tehdy, když žádný z vektorů není v lineárním obalu předchozích (tj. pro každé i platí $\mathbf{v}_i \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1} \rangle$).

12. Dokažte, že sloupce matice v řádkově odstupňovaném tvaru jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když příslušná homogenní soustava nemá žádné volné proměnné.

13. Dokončete příklad 5.44 o Fibonacciho posloupnostech.

14. Dokažte, že sloupce (řádky) čtvercové matice A nad \mathbf{T} řádu n tvoří bázi \mathbf{T}^n právě tehdy, když A je regulární.

15. Dokažte:

- Dimenze prostoru všech matic nad \mathbf{T} typu $m \times n$ je mn .
- Dimenze prostoru reálných polynomů stupně nejvýše n je n .
- Dimenze prostoru \mathbb{C} jako vektorového prostoru nad \mathbb{R} je 2.

16. Najděte bázi podprostoru \mathbb{R}^ω tvořeného posloupnostmi (a_1, a_2, \dots) , pro které platí $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ (pro každé $n \geq 3$). Pomocí nalezené báze najdete vzorec pro výpočet a_n , když $a_1 = 3, a_2 = 7$.

17. Dokažte, že z každé množiny generátorů konečně generovaného prostoru lze vybrat bázi.

18. Dokažte, že důsledek 5.54 platí bez předpokladu konečnosti G . Předpoklad tedy změníme na „ G je množina generátorů konečně generovaného prostoru \mathbf{V} “.

19. Spočítejte počet všech různých bází \mathbf{V} vybraných z vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$ z příkladu 5.56.

20. Dokažte druhou část tvrzení 5.64.

21. Dokažte, že báze sloupců tvoří bázi sloupcového prostoru matice.

22. Přímou z definice báze sloupců dokažte, že řešení $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in T^n$ soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je jednoznačně určeno vektorem $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) \in T^k$, kde i_1, i_2, \dots, i_k je seznam nebázových sloupců matice A , a naopak, že každý vektor $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) \in T^k$ vzniká z nějakého řešení (x_1, x_2, \dots, x_n) .

23. Dokažte, že pro libovolné tři podprostory $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ prostoru \mathbf{V} platí

$$(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) + \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3) .$$

24. Dokažte, že

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_k = \{v_1 + v_2 + \dots + v_k : v_1 \in \mathbf{V}_1, v_2 \in \mathbf{V}_2, \dots, v_k \in \mathbf{V}_k\} .$$

25. Nechť $\mathbf{V}_i, i \in I$ jsou podprostory vektorového prostoru \mathbf{W} a G_i je množina generátorů prostoru \mathbf{V}_i pro každé $i \in I$. Dokažte, že $\bigcup_{i \in I} G_i$ generuje $\bigcap_{i \in I} \mathbf{V}_i$.

26. Najděte podprostory $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ prostoru \mathbb{R}^3 takové, že $\mathbf{U} \cap (\mathbf{V} + \mathbf{W}) \neq (\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) + (\mathbf{U} \cap \mathbf{W})$, $\mathbf{U} + (\mathbf{V} \cap \mathbf{W}) \neq (\mathbf{U} + \mathbf{V}) \cap (\mathbf{U} + \mathbf{W})$.

27. Jedna inkluze v obou (neplatných) distributivních zákonech vždy platí. Zjistěte které a dokažte.

28. Dokažte, že rovnosti v distributivních zákonech platí za předpokladu $\mathbf{U} \leq \mathbf{W}$ nebo $\mathbf{W} \leq \mathbf{U}$.

29. Rozhodněte, zda pro podprostory $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ vektorového prostoru \mathbf{Z} platí

$$\dim(\mathbf{U}) + \dim(\mathbf{V}) + \dim(\mathbf{W}) = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{V} + \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) + \dim(\mathbf{V} \cap \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V} \cap \mathbf{W})$$

30. Jakou dimenzi může mít průnik podprostoru dimenze 3 a podprostoru dimenze 4 v \mathbb{Z}_{37}^6 ? Pro každou z možností uveďte příklad.

31. Při komunikaci byl použit Hammingův kód H_3 . Přijímající strana přijala slova

$$0101011, 0011111, 1011100, 1111110, 0111111, 0001110, 1100101.$$

Rozhodněte, která z nich byla během přenosu poškozena a u každého z poškozených slov rozhodněte, který ze symbolů byl přenesen nesprávně a jaké slovo bylo vysláno.

32. Dokažte Tvrzení 5.109.

33. Definujeme d -okolí slova $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_2^n$ jako množinu

$$V_d(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n; h(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq d\}.$$

Dokažte, že počet prvků $V_d(\mathbf{a})$ se rovná

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{d} = \sum_{i=1}^d \binom{n}{i}.$$

34. Dokažte, že je-li C kód dimenze n s r informačními symboly, který opravuje d chyb, pak platí nerovnost

$$2^r \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{d} \right) \leq 2^n.$$

35. Hamming svůj lineární $(7, 4)$ -kód D definoval pomocí kontrolní matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pokud bylo přijaté slovo \mathbf{y} a $B\mathbf{y}^T = (s_1 s_2 s_3)^T \neq \mathbf{0}^T$, dokažte že $s_3 s_2 s_1$ je binární vyjádření indexu poškozeného symbolu.

36. Dokažte, že existuje permutace π na množině $\{1, 2, \dots, 7\}$ taková, že platí $a_1 a_2 \dots a_7 \in H_3$ právě když $a_{\pi(1)} a_{\pi(2)} \dots a_{\pi(7)} \in D$, kde D je kód z předchozího cvičení. Jak souvisí permutace π s permutací sloupců, pomocí které dostaneme z kontrolní matice A kódu H_3 kontrolní matici B kódu D .

6. DETERMINANT

Cíl. *Budeme se věnovat pojmu determinantu matice. Motivací je porozumění, jak zobrazení určené maticí mění obsah (v \mathbb{R}^2) a objem (v \mathbb{R}^3). K definici budeme potřebovat permutace, naučíme se je různými způsoby zapisovat a určovat znaménko.*

6.1. Motivace. Čtvercová matice A řádu n nad \mathbb{R} určuje zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tato zobrazení mají tu vlastnost, že násobí n -dimenzionální objemy (obsahy v případě $n = 2$, objemy v případě $n = 3$) konstantním číslem. Toto číslo je rovno absolutní hodnotě tzv. determinantu, který zavedeme v této kapitole. Znaménko determinantu určuje, zda zobrazení mění „orientaci prostoru“. Například pokud je determinant matice A řádu 2 roven $1,3$, příslušné zobrazení násobí obsah každého útvaru číslem $1,3$ a nemění orientaci. To, že se orientace nemění si lze představit tak, že obraz lze dostat spojitou deformací roviny z původního útvaru. Pokud je determinant A roven $-1,3$, pak zobrazení násobí obsah každého útvaru číslem $1,3$ a orientaci mění.

F

$$A = I_2$$

F

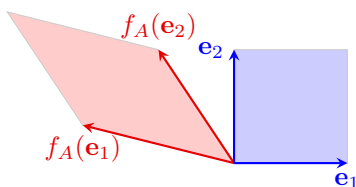
$$\det A = 1,3$$

F

$$\det A = -1,3$$

Odvodíme si vzorec na výpočet determinantu v případě reálných čtvercových matic řádu $n = 2$ a $n = 3$. V obecné definici pro větší n a nad jinými tělesy vizuální představa chybí, ale determinant můžeme definovat stejně a bude mít podobné vlastnosti.

6.1.1. Determinant v \mathbb{R}^2 . Budeme se snažit odvodit vzorec pro determinant čtvercových matic A řádu 2. Matici se sloupci \mathbf{u}, \mathbf{v} budeme značit $(\mathbf{u}|\mathbf{v})$ a její determinant $\det(\mathbf{u}|\mathbf{v})$. Číslo $\det(A)$, kde $A = (\mathbf{u}|\mathbf{v})$, má vyjadřovat změnu obsahu a orientace při zobrazení f_A . Protože zobrazení f_A zobrazuje vektor $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$ na vektor $A\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}$ a vektor $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$ na vektor $A\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}$, f_A zobrazuje jednotkový čtverec se stranami $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ na rovnoběžník se stranami \mathbf{u}, \mathbf{v} .



Obsah tohoto rovnoběžníku můžeme vyjádřit vhodným doplněním na obdélník a znaménko určit diskuzí možné vzájemné polohy vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} podle obrázku (viz cvičení).

OBRAZEK

Podíváme se na jiný postup, který se nám rovněž bude hodit v obecnější situaci.

Když vynásobíme jeden z vektorů číslem $t \in \mathbb{R}$, pak se obsah výsledného rovnoběžníku zvětší (nebo zmenší) $|t|$ -krát. Přitom orientace se pro kladné t nezmění a pro záporná t změní. Dostáváme vztahy

$$\det(t\mathbf{u}|\mathbf{v}) = t \det(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \det(\mathbf{u}|t\mathbf{v}) .$$

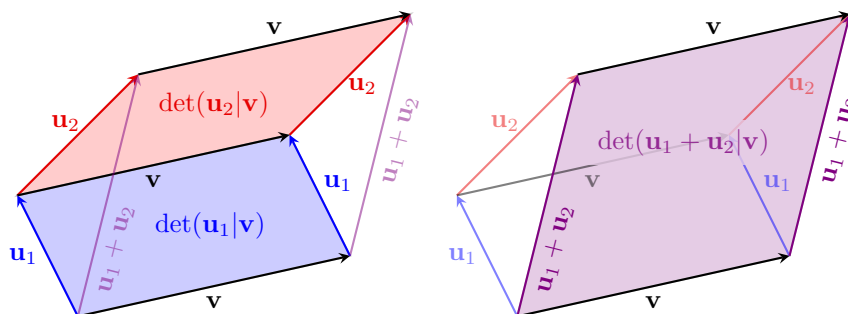
OBRAZEK (zvětšení rovnoběžníku)

Z následujícího obrázku můžeme nahlédnout (stačí přesunout trojúhelník ...), že platí

$$\det(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2|\mathbf{v}) = \det(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}) + \det(\mathbf{u}_2|\mathbf{v})$$

a podobný vztah platí, když součet je v druhém sloupci.

$$\det(\mathbf{u}|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \det(\mathbf{u}|\mathbf{v}_1) + \det(\mathbf{u}|\mathbf{v}_2)$$



Ještě si uvědomíme, že

$$\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1, \quad \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = -1, \quad \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0$$

protože první matice odpovídá identickému zobrazení, které nemění obsah ani orientaci, druhá matice odpovídá překlopení kolem osy prvního kvadrantu, která nemění obsah a mění orientaci, třetí a čtvrtá matice odpovídá zobrazení, která čtverci přiřadí „zdegenerovaný rovnoběžník“ – úsečku.

Z odvozených vztahů již jde spočítat determinant obecné matice

$$A = (\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \det(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 | a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) \\ &= \det(a_{11}\mathbf{e}_1 | a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) + \det(a_{21}\mathbf{e}_2 | a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) = \\ &= \det(a_{11}\mathbf{e}_1 | a_{12}\mathbf{e}_1) + \det(a_{11}\mathbf{e}_1 | a_{22}\mathbf{e}_2) + \\ &\quad + \det(a_{21}\mathbf{e}_2 | a_{12}\mathbf{e}_1) + \det(a_{21}\mathbf{e}_2 | a_{22}\mathbf{e}_2) = \\ &= a_{11}a_{12} \det(\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1) + a_{11}a_{22} \det(\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2) + \\ &\quad + a_{21}a_{12} \det(\mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_1) + a_{21}a_{22} \det(\mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_2) = \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

Determinant jsme odvodili použitím jednotkového čtverce. Obecně obsah a orientace obrazu libovolného útvaru (u něž lze měřit obsah) se změní tak, jak udává determinant. Tento fakt nebudeme odvozovat.

6.1.2. *Determinant v \mathbb{R}^3 .* Pro matice řádu 3 udává determinant změnu objemu a orientace. Pro zobrazení f_A určené maticí $A = (\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w})$ je obrazem jednotkové krychle se stranami $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ rovnoběžnostěn se stranami $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Z geometrického náhledu dostáváme podobné vztahy jako v případě \mathbb{R}^2 .

$$\det(t\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}|t\mathbf{v}|\mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}|\mathbf{v}|t\mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w})$$

$$\det(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3|\mathbf{v}|\mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}|\mathbf{w}) + \det(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}|\mathbf{w}) + \det(\mathbf{u}_3|\mathbf{v}|\mathbf{w})$$

Podobný vztah platí, když součet je ve druhém nebo třetím sloupci.

K výpočtu ještě potřebujeme determinanty matic, jejichž sloupce jsou vektory v kanonické bázi. Pokud jsou dva ze sloupců stejné, pak příslušné zobrazení degeneruje krychli na čtverec, nebo dokonce úsečku, takže determinant je 0. Dále

$$\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = \det(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) ,$$

protože příslušná zobrazení jsou rotace, které orientaci nemění. Zbývají tři matice, jejichž determinant je -1 , protože příslušná zobrazení jsou zrcadlení a ta orientaci mění.

$$\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = \det(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) ,$$

Determinant teď můžeme spočítat jako v případě $n = 2$, výrazy ale budou poněkud delší.

$$A = (\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w}) = \\ &= \det(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3 | a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3 | a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &= \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 a_{k1}a_{l2}a_{m3} \det(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + a_{11}a_{32}a_{23} \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) + \\ &\quad + a_{21}a_{12}a_{33} \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + a_{21}a_{32}a_{13} \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + \\ &\quad + a_{31}a_{12}a_{23} \det(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_{31}a_{22}a_{13} \det(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{aligned}$$

Každý sčítanec je součinem třech prvků matice $a_{k1}a_{l2}a_{m3}$, kde k, l, m jsou navzájem různé, se znaménkem odpovídajícím orientaci trojice $\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m$. Jeden sčítanec tedy odpovídá výběru jednoho prvku s prvního sloupce, jednoho prvku z druhého sloupce a jednoho prvku z třetího sloupce, kde prvky vybíráme s navzájem různých řádků (ostatní členy budou nulové).

6.2. **Permutace.** Výpočet vzorce pro „vícerozměrný objem“ by probíhal podobně. Museli bychom zjistit, která pořadí vektorů kanonické báze odpovídají kladné orientaci a která záporné. To lze pomocí pojmu znaménka permutace, které definujeme v této části. Děláme tím malý výlet z lineární algebry do algebry obecné.

Permutaci definujeme jako bijekci množiny na sebe samu.

Definice 6.1. *Permutací* množiny X rozumíme bijekci $X \rightarrow X$. Množinu všech permutací na množině X značíme S_X . Pro množinu permutací na množině $X = \{1, 2, \dots, n\}$, kde n je přirozené číslo, také používáme značení S_n .

Nejčastěji budeme používat permutace na konečné množině, konkrétně množině $\{1, 2, \dots, n\}$. Pro konečnou množinu X je každé prosté zobrazení $X \rightarrow X$ již bijekcí, a také každé zobrazení $X \rightarrow X$ na je bijekcí. (Připomeňme, že ani jedna z těchto implikací není pravdivá pro nekonečné množiny.)

Význačnou permutací na X je identické zobrazení $\text{id}_X : X \rightarrow X$, pro něž $\text{id}_X(x) = x$ pro každé $x \in X$. Protože inverzní zobrazení k bijekci je bijekce, je inverzní zobrazení π^{-1} k permutaci π na X opět permutace na X . Složením permutací je rovněž permutace. Složení permutací ρ a σ značíme $\sigma \circ \rho$ nebo $\sigma\rho$, tj. $\sigma\rho(x) = \sigma(\rho(x))$. Množina S_X spolu s těmito operacemi opět splňuje vlastnosti podobné sčítání v tělese, nebo sčítání ve vektorovém prostoru, s **výjimkou komutativity**:

- (1) Pro libovolné $\pi, \rho, \sigma \in S_X$ platí $\pi(\rho\sigma) = (\pi\rho)\sigma$.
- (2) Pro libovolné $\pi \in S_X$ platí $\text{id}_X \pi = \pi \text{id}_X = \pi$.
- (3) Pro libovolné $\pi \in S_X$ platí $\pi\pi^{-1} = \pi^{-1}\pi = \text{id}_X$.

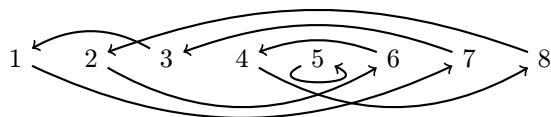
Tím pádem nemusíme při skládání psát závorky a také můžeme řešit jednoduché rovnice typu $\alpha\rho\beta = \gamma$, kde α, β, γ jsou dané permutace, podobným způsobem jako pro čísla, akorát musíme dát pozor na nekomutativitu.

6.2.1. *Zápis permutace.* Permutaci π na konečné množině X můžeme zapsat tabulkou, kdy do horního řádku napíšeme v nějakém pořadí prvky množiny X a pod každý prvek $x \in X$ napíšeme jeho obraz $\pi(x)$. Například permutaci $\pi \in S_8$ danou vztahy $\pi(1) = 7, \pi(2) = 6, \pi(3) = 1, \pi(4) = 8, \pi(5) = 5, \pi(6) = 4, \pi(7) = 3, \pi(8) = 2$ můžeme zapsat

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 1 & 8 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 & 2 & 8 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 6 & 2 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tabulkou můžeme zapsat libovolné zobrazení z X do X (nebo i do jiné množiny). To, že π je permutace, se v tabulce projeví tak, že v druhém řádku bude každý prvek množiny X právě jednou.

Další možností je si permutaci nakreslit. Prvky X si nakreslíme jako body (tzv. vrcholy) a pro každé $x \in X$ si nakreslíme šipku (tzv. hranu) z x do $\pi(x)$. Takovému obrázku říkáme *graf* permutace π . Protože π je zobrazení, vede z každého bodu právě jedna šipka, a protože je to bijekce, vede do každého bodu právě jedna šipka.

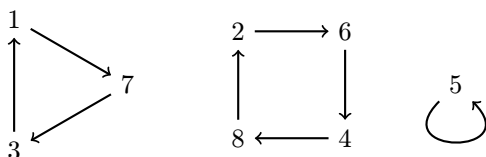


OBRÁZEK 6. Obrázek permutace

Když graf trochu překreslíme, vidíme, že permutace je sjednocením nezávislých cyklů.

To není náhoda, každá permutace je složením nezávislých cyklů.

Definice 6.2. *Cyklus délky k* je permutace na X splňující $\pi(x_1) = x_2, \pi(x_2) = x_3, \dots, \pi(x_{k-1}) = x_k, \pi(x_k) = x_1$ a $\pi(y) = y$ pro každé $y \in X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, kde x_1, x_2, \dots, x_k jsou po dvou různé prvky X . Zapisujeme $\pi = (x_1 x_2 \dots x_k)$.



OBRÁZEK 7. Lepší obrázek permutace

Cykly nazýváme *nezávislé*, pokud jsou množiny prvků vyskytující se v cyklech disjunktní.

Transpozice je cyklus délky 2, tj. permutace tvaru $\pi = (x y)$.

Všimněte si, že pořadí prvků v cyklu můžeme cyklicky otočit a dostaneme stejnou permutaci:

$$(x_1 x_2 \dots x_k) = (x_2 \dots x_k x_1) = \dots = (x_k x_1 x_2 \dots x_{k-1})$$

Jak najít pro danou permutaci π rozklad na nezávislé cykly aniž bychom kreslili obrázek? Zvolíme libovolný výchozí prvek x_1 a podíváme se na jeho obraz $x_2 = \pi(x_1)$, pak se podíváme na jeho obraz $x_3 = \pi(x_2)$, atd. Když poprvé narazíme na prvek, který se již vyskytl, tj. $x_{k+1} = x_i$ pro nějaké $i \leq k$, pak nutně $i = 1$, jinak by π zobrazovala dva různé prvky x_{i-1} a x_k na stejný prvek x_i . Takže máme $\pi(x_k) = x_1$ a můžeme cyklus uzavřít. Pokud jsou v množině X ještě jiné prvky, vybereme kterýkoliv z nich a nalezneme další cykly. Tyto cykly musí být nezávislé, jinak bychom opět měli dva prvky, které se zobrazí do stejného prvku, a zobrazení π by nebylo prosté. Naznačili jsme důkaz, že rozklad na nezávislé cykly je možný. Pořadí skládání nezávislých cyklů můžeme libovolně měnit (na rozdíl od obecných cyklů) a až na tuto skutečnost je rozklad jednoznačný. Detaily si rozmyslete jako cvičení.

Tvrzení 6.3. Každou permutaci na konečné množině X lze zapsat jako složení nezávislých cyklů. Tento zápis je jednoznačný až na pořadí cyklů (a cykly délky 1).

Příklad 6.4. Podle návodu rozložíme naši permutaci π na nezávislé cykly. Začneme například s prvkem 1. Jeho obraz je $\pi(1) = 7$, obraz 7 je $\pi(7) = 3$ a obraz 3 je $\pi(3) = 1$. Nalezli jsme první cyklus $(1 7 3)$. Nyní vezmeme nějaký prvek, který se doposud neobjevil, třeba 2. Spočítáme $\pi(2) = 6$, $\pi(6) = 4$, $\pi(4) = 8$, $\pi(8) = 2$ a našli jsme další cyklus $(2 6 4 8)$. Zbývá prvek 5, který je *pevným bodem*, tj. $\pi(5) = 5$, což můžeme zapsat cyklem (5) délky 1 (to je identická permutace), chceme-li tento fakt zdůraznit. Celkově tedy máme

$$\pi = (1 7 3)(2 6 4 8) .$$

Pořadí skládání můžeme díky nezávislosti prohodit a rovněž můžeme v tomto zápisu cyklicky otáčet prvky v závorkách, protože tím vznikají pouze různé zápisy stejné permutace. Takže například také

$$\pi = (6 4 8 2)(3 1 7) .$$

Cyklickým zápisem rozumíme zápis pomocí nezávislých cyklů s vyznačenými pevnými body, například

$$\pi = (1 7 3)(2 6 4 8)(5) .$$

Pokud pevné body neuvádíme, hovoříme o *redukovaném cyklickém zápisu*.

Cyklický (nebo redukovaný cyklický) zápis je většinou daleko výhodnější než zápis tabulkou, protože lépe vidíme, co permutace „dělá“. Zápis tabulkou budeme dále používat jen zřídka.

Na příkladu si rozmyslíme, jak permutace invertovat a skládat v cyklickém zápisu.

Příklad 6.5. Inverzní permutace přiřadí každému prvku jeho vzor. Pro permutaci $\pi = (1\ 7\ 3)(2\ 6\ 4\ 8)$ je například $\pi^{-1}(3) = 7$, protože $\pi(7) = 3$. Stačí tedy převrátit pořadí prvků v cyklu. Na obrázku bychom otočili směr šipek.

$$\pi^{-1} = (1\ 3\ 7)(2\ 8\ 4\ 6)$$

Na tomto místě si rovněž uvědomme, že inverzní permutace k transpozici je tatáž transpozice.

$$(i\ j)^{-1} = (i\ j) \quad (= (j\ i))$$

Vypočítáme složení permutace π a permutace $\rho = (1\ 7\ 4\ 6)(2\ 8)(3\ 5)$:

$$\rho\pi = (1\ 7\ 4\ 6)(2\ 8)(3\ 5)(1\ 7\ 3)(2\ 6\ 4\ 8) = (1\ 4\ 2)(3\ 7\ 5)$$

Cyklový zápis tvoříme jako pro samotnou permutaci: vyjdeme z libovolného prvku, podíváme se, kam ho složená permutace zobrazí a takto pokračujeme. Vyšli jsme z prvku 1, permutace π ho zobrazí na 3 a permutace ρ prvek 3 zobrazí na 5, takže složená permutace $\rho\pi$ zobrazí prvek 1 na prvek 5, tj. za 1 napíšeme číslo 5. Číslo 5 permutace π zobrazí na 5 a permutace ρ zobrazí číslo 5 na 3, takže píšeme 3, atd.

Ještě jednou připomeňme, že skládání komutativní není (ale třeba nezávislé cykly spolu komutují). Složením ρ a π vyjde permutace

$$\pi\rho = (1\ 3\ 5)(6\ 7\ 8) ,$$

což je jiná permutace než $\pi\rho$. Má ale stejnou strukturu – má stejně jako $\rho\pi$ jeden dva cykly délky 3. To není náhoda, viz cvičení.

Každý cyklus lze zapsat jako složení transpozic, například

$$(x_1\ x_2\ \dots\ x_k) = (x_1\ x_2)(x_2\ x_3)\dots(x_{k-1}\ x_k)$$

nebo

$$(x_1\ x_2\ \dots\ x_k) = (x_1\ x_k)\dots(x_1\ x_3)(x_1\ x_2) .$$

Ověřte obě rovnosti! Protože každá permutace je složením cyklů (dokonce nezávislých), můžeme každou permutaci napsat jako složení transpozic. Dokázali jsme

Tvrzení 6.6. *Každá permutace na konečné množině je složením transpozic.*

Tvrzení vlastně říká, že jakkoliv promícháme prvky množiny, lze původní uspořádání dostat postupným prohazováním dvojic. Zápis permutace jako složení transpozic není samozřejmě jednoznačný, například

$$(1\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2) = (1\ 2)(2\ 3) = (1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)(1\ 2) = (1\ 2)(1\ 3)(2\ 3)(1\ 2) = \dots$$

6.2.2. Znaménko. I když každou permutaci můžeme zapsat jako složení transpozic mnoha způsoby, parita počtu transpozic (tj. zda je počet sudý nebo lichý) se nemění. K důkazu tohoto tvrzení si nejdřív všimneme jak se mění počet cyklů v cyklovém zápisu při složení s transpozicí. V následujícím tvrzení počítáme i cykly délky jedna.

Tvrzení 6.7. *Nechť X je konečná množina, $\pi \in S_X$ a $(x\ y) \in S_X$. Pak počet cyklů v permutaci $(x\ y)\pi$ a π se liší o 1 a počet sudých cyklů v permutaci $(x\ y)\pi$ a π se rovněž liší o 1.*

Důkaz. Rozebereme dva případy. Nejprve předpokládejme, že x a y leží ve stejném cyklu $(x = x_1 x_2 \dots x_k y = y_1 y_2 \dots y_l)$ permutace π . Pak

$$(x y)\pi = (x y) \dots (x x_2 \dots x_k y y_2 \dots y_l) \dots = \dots (x x_2 \dots x_k)(y y_2 \dots y_l) \dots,$$

kde ostatní cykly permutace π zůstanou beze změny. Počet cyklů se v tomto případě zvýší o 1. Rozborem případů dostaneme druhou část tvrzení (například pokud k i l je sudé, pak se počet sudých cyklů zvětší o jedna, pokud k je sudé a l je liché, pak se počet sudých cyklů také zvětší o jedna, atd.).

Pokud jsou prvky x a y v různých cyklech $(x = x_1 x_2 \dots x_k)$, $(y = y_1 y_2 \dots y_l)$, pak

$$(x y)\pi = (x y) \dots (x x_2 \dots x_k)(y y_2 \dots y_l) \dots = \dots (x x_2 \dots x_k y y_2 \dots y_l) \dots,$$

takže se počet cyklů sníží o 1. Druhou část získáme opět rozborem případů. \square

Důsledkem je, že parita počtu transpozic je stejná v libovolném zápisu permutace jako složení transpozic. Tuto paritu navíc poznáme podle počtu cyklů sudé délky v cyklickém zápisu permutace.

Důsledek 6.8. *Pro libovolnou permutaci π na konečné množině X nastane jedna z následujících možností:*

- (1) *Každý zápis π jako složení transpozic obsahuje sudý počet transpozic. To nastane právě tehdy, když počet cyklů sudé délky v (redukovaném) cyklickém zápisu permutace π je sudý.*
- (2) *Každý zápis π jako složení transpozic obsahuje lichý počet transpozic. To nastane právě tehdy, když počet cyklů sudé délky v (redukovaném) cyklickém zápisu permutace π je lichý.*

Důkaz. Je-li π složením transpozic $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_k$, pak několikanásobnou aplikací předchozího tvrzení dostaneme, že parita počtu cyklů sudé délky v permutaci π je rovná paritě k : Počet cyklů sudé délky v permutaci ρ_k je lichý (jeden cyklus délky 2), v permutaci $\rho_{k-1} \rho_k$ je sudý, atd. \square

Tento důsledek nám umožňuje zavést znaménko permutace.

Definice 6.9. Permutace π na konečné množině X se nazývá *sudá*, pokud nastane možnost (1) v důsledku 6.8. Rovněž říkáme, že *znaménko π je 1* a píšeme $\text{sgn}(\pi) = 1$.

V opačném případě je π *lichá*, má znaménko -1 a definujeme $\text{sgn}(\pi) = -1$.

Znaménko snadno vypočteme z (redukovaného) cyklického zápisu. Stačí spočítat počet cyklů sudé délky. Znaménko lze také určit podle počtu všech cyklů v cyklickém zápisu, viz cvičení.

Příklad 6.10.

$$\text{sgn}((1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7)(8\ 9)(10\ 11)) = -1$$

protože má permutace v cyklickém zápisu 3 cykly sudé délky.

Znaménko inverzní permutace a složené permutace je určené znaménkem původních permutací.

Tvrzení 6.11. *Nechť X je konečná množina a $\pi, \rho \in S_X$. Pak platí*

- (1) $\text{sgn}(\text{id}_X) = 1$,
- (2) $\text{sgn}(\pi^{-1}) = \text{sgn}(\pi)$ a
- (3) $\text{sgn}(\pi\rho) = \text{sgn}(\pi)\text{sgn}(\rho)$.

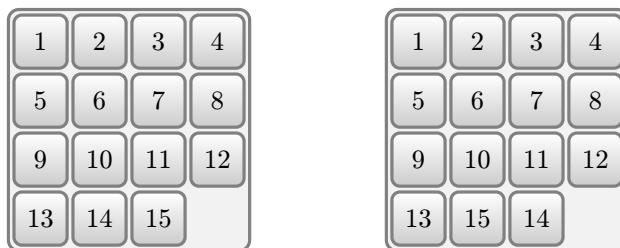
Důkaz.

- (1) Identická permutace má 0 cyklů sudé délky.
- (2) Inverzní permutace má stejný počet cyklů sudé délky.
- (3) Pokud π lze zapsat jako složení k transpozic, tj. $\text{sgn}(\pi) = (-1)^k$, a ρ lze zapsat jako složení l transpozic, tj. $\text{sgn}(\rho) = (-1)^l$, pak $\pi\rho$ lze zapsat jako složení $k + l$ transpozic, tj. $\text{sgn}(\pi\rho) = (-1)^{k+l} = (-1)^k(-1)^l = \text{sgn}(\pi)\text{sgn}(\rho)$.

□

Slovy, identická permutace je sudá, inverzní permutace k sudé (resp. liché) je sudá (resp. lichá), složením dvou sudých nebo dvou lichých permutací je sudá permutace a složením liché a sudé permutace v libovolném pořadí je lichá permutace.

Příklad 6.12. Ve hře „15“ máme čtvercovou krabičku se 4×4 políčky, v níž jsou kostičky číslované 1 až 15 a jedno prázdné políčko, pomocí něhož jdou kostičky vodorovně nebo svisle přesouvat. Ukážeme, že základní pozici na obrázku vlevo nelze získat z pozice na obrázku vpravo.



OBRÁZEK 8. Hra 15

Místa v krabičce si očísľujeme podle základní pozice. Místo vpravo dole očísľujeme 16. Libovolnou pozici zapíšeme pomocí permutace $\pi \in S_{16}$ tak, že definujeme $\pi(i) = j$, pokud se na místě i nalézá kostička s číslem j . Jeden tah je vlastně prohozením umístění prázdného políčka a nějaké kostičky $i \in \{1, 2, \dots, 15\}$. Nová pozice tedy odpovídá permutaci $(16\ i)\pi$.

Budeme si všimnout parity permutace π a parity pozice prázdného políčka. Na začátku vyjdeme z pozice odpovídající liché permutaci $(14\ 15)$ a prázdné políčko je na sudém místě 16. Po provedení jednoho tahu permutace π změní paritu a rovněž se změní parita pozice prázdného políčka, protože sudá místa sousedí pouze s lichými a naopak. Z toho plyne, že

- po provedení sudého počtu tahů bude π lichá a prázdné políčko bude na sudém místě;
- po provedení lichého počtu tahů bude π sudá a prázdné políčko bude na lichém místě.

Ani v jednom z obou případů nemůžeme získat základní pozici, pro kterou je permutace π sudá (je to identická permutace) a prázdné políčko je na sudém místě (16).

6.2.3. *Počet permutací.* Jak již asi víte, počet permutací na n -prvkové množině $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je $n!$. Máme totiž n možností, kam zobrazit x_1 , pak $n - 1$ možností, kam zobrazit x_2 , atd. Dohromady $n(n - 1) \dots 1 = n!$.

Počet lichých permutací spočítáme z následujícího pozorování, které také použijeme pro důkazy tvrzení o determinantech.

Tvrzení 6.13. *Nechť X je konečná množina a $\pi \in S_X$. Pak platí:*

- (1) *Soubor $(\rho^{-1} : \rho \in S_X)$, soubor $(\pi\rho : \rho \in S_X)$ i soubor $(\rho\pi : \rho \in S_X)$ obsahuje každou permutaci v S_X právě jednou.*
- (2) *Pokud π je lichá, pak soubor $(\pi\rho : \rho \in S_X, \text{sgn}(\rho) = 1)$ i soubor $(\rho\pi : \rho \in S_X, \text{sgn}(\rho) = 1)$ obsahuje pouze liché permutace v S_X , každou právě jednou.*

Důkaz. Rovnice $\sigma = \rho^{-1}$ má pro dané σ právě jedno řešení $\rho = \sigma^{-1}$. (Rozmyslete si podrobně toto i další tvrzení použitá v tomto důkazu. Zdůvodnění je podobné jako v tvrzení 3.3 o vlastnostech těles.) To znamená, že každou permutaci σ lze zapsat ve tvaru ρ^{-1} právě jedním způsobem, tj. soubor $(\rho^{-1} : \rho \in S_X)$ obsahuje každou permutaci v S_X právě jednou.

Rovnice $\sigma = \pi\rho$ má pro dané σ a π právě jedno řešení $\rho = \pi^{-1}\sigma$. Z toho plyne, že v souboru $(\pi\rho : \rho \in S_X)$ je každá permutace právě jednou. Podobně pro třetí soubor v části (1). Pokud jsou permutace σ a π liché, pak $\rho = \pi^{-1}\sigma$ je sudá, protože $\text{sgn}(\pi^{-1}\sigma) = \text{sgn}(\pi^{-1})\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\pi)\text{sgn}(\sigma) = (-1)(-1) = 1$ (viz tvrzení 6.11). Každou lichou permutaci lze tedy zapsat ve tvaru $\pi\rho$, kde ρ je sudá, právě jedním způsobem. Navíc $\pi\rho$ je lichá, pokud π je lichá a ρ je sudá. Z toho plyne první část bodu (2). Druhá část se dokáže podobně. \square

Tvrzení můžeme formulovat v jazyku zobrazení. Například druhá část tvrzení v bodě (1) říká, že zobrazení $f : S_X \rightarrow S_X$ definované $f(\rho) = \pi\rho$ je bijekce. První část bodu (2) říká, že je-li π lichá, pak zobrazení f definované stejným předpisem je bijekcí z množiny všech sudých permutací v S_X na množinu všech lichých permutací v S_X .

Důsledkem je, že počet lichých permutací na n -prvkové množině X je stejný jako počet sudých permutací na X , kdykoliv na X nějaká lichá permutace existuje, tj. v případě $n > 1$. Pro $n > 1$ je tedy počet lichých i sudých permutací $n!/2$.

6.3. **Definice determinantu a základní vlastnosti.** Připomeňme, že determinant reálné čtvercové matice $A = (\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w})$ řádu 3 určuje, jak zobrazení f_A mění objem a orientaci. Jeho absolutní hodnota je rovna objemu rovnoběžnostěnu o stranách $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Odvodili jsme vzorec

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} .$$

Každý člen součtu je součin třech prvků $a_{k1}a_{l2}a_{m3}$, kde k, l, m jsou navzájem různé, a znaménko udává orientaci trojice vektorů $(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m)$. Každý člen lze tedy zapsat jako $a_{\pi(1)1}a_{\pi(2)2}a_{\pi(3)3}$, kde $\pi \in S_3$ je permutace $\pi(1) = k, \pi(2) = l, \pi(3) = m$ a všimněte si, že znaménko členu je rovno znaménku permutace π . To geometricky odpovídá tomu, že prohodíme-li dva vektory kanonické báze, orientace se změní.

6.3.1. *Definice.* Podobně definujeme determinant libovolné **čtvercové** matice nad libovolným tělesem.

Definice 6.14. Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová matice nad tělesem \mathbf{T} řádu n , pak definujeme *determinant* matice A předpisem

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \cdots a_{\pi(n),n} .$$

Determinant tedy přiřadí čtvercové matici nad \mathbf{T} prvek tělesa \mathbf{T} . Součet má $n!$ členů, jeden pro každou permutaci $\pi \in S_n$. Sčítanec odpovídající permutaci π je součinem n prvků matice, z každého sloupce i obsahuje součin prvek $a_{\pi(i),i}$, znaménko sčítance je rovné znaménku permutace π . (Pro přehlednost oddělujeme indexy prvků matice čárkou.)

Pro determinant matice A se také užívá značení $|A|$.

Příklad 6.15. V případě $n = 2$ máme dvě permutace v S_2 – identickou permutaci a transpozici $(1\ 2)$. Identická permutace je sudá a odpovídající sčítanec je $a_{11}a_{22}$, transpozice je lichá a odpovídající sčítanec je $-a_{21}a_{12}$. Dostáváme stejný vzorec jako dříve:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

OBRÁZEK (diagonaly)

Například

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 ,$$

což není překvapivé, protože rotace o α nemění ani obsah ani orientaci.

(Při zápisu determinantu pomocí svislých čar vynecháváme kulaté závorky.)

Příklad 6.16. V případě $n = 3$ máme šest permutací v S_3 – identické permutace a trojcykly jsou sudé, transpozice jsou liché. Odpovídající sčítanci jsou:

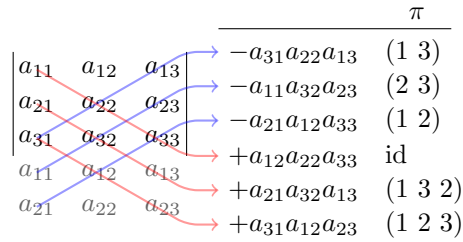
π	
id	$a_{11}a_{22}a_{33}$
(1 2 3)	$a_{21}a_{32}a_{13}$
(1 3 2)	$a_{31}a_{12}a_{23}$
(2 3)	$-a_{11}a_{32}a_{23}$
(1 3)	$-a_{31}a_{22}a_{13}$
(1 2)	$-a_{21}a_{12}a_{33}$

a opět dostáváme vzorec odvozený výše. Mnemotechnickou pomůckou je tzv. *Sarrusovo pravidlo* na obrázku.

Počítat matice z definice není vhodné už pro matice řádu 3, je lepší využít jiné metody. Sarrusovo pravidlo tedy nebudeme používat. V případě $n = 4$ má již výraz 24 členů (vypište je jako cvičení) a definice je pro výpočet již zcela nevhodná. Všimněte si, že **pravidlo podobné Sarrusovu pro matice řádu $n > 3$ neplatí**.

6.3.2. *Základní vlastnosti.* Pro horní trojúhelníkové matice vypočítáme determinant jako součin prvků na diagonále.

Tvrzení 6.17. Je-li A horní trojúhelníková matice, pak $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.



OBRÁZEK 9. Sarrusovo pravidlo

Důkaz. Podívejme se na jeden sčítanec $\text{sgn}(\pi)a_{\pi(1),1}a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n),n}$ v definici determinantu. Pokud je jeden z činitelů v tomto součinu nulový, celý sčítanec je roven nule a můžeme jej ignorovat. První sloupec matice A je celý nulový, až na hodnotu a_{11} , která může být nenulová. Pokud tedy $\pi(1) > 1$, pak $a_{\pi(1),1} = 0$ a sčítanec je nulový. Předpokládejme proto $\pi(1) = 1$. Podobně, pokud $\pi(2) > 2$ můžeme na sčítanec zapomenout, protože $a_{\pi(2),2} = 0$. Takže můžeme předpokládat $\pi(2) \leq 2$. Ale $\pi(2)$ nemůže být 1, protože máme $\pi(1) = 1$ a π je prosté zobrazení, čili $\pi(2) = 2$. Postupně dostáváme $\pi(3) = 3, \pi(4) = 4, \dots, \pi(n) = n$.

Jediný možná nenulový sčítanec tedy odpovídá identické permutaci, ta je sudá, takže $\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$. \square

Pro matice 2×2 nad \mathbb{R} je geometrické vysvětlení na obrázku ???. Rovnoběžník o stranách $(a_{11}, 0)^T, (a_{21}, a_{22})^T$ má stejný obsah jako obdélník o stranách $(a_{11}, 0)^T$ a $(0, a_{22})^T$, protože oba rovnoběžníky mají stejnou výšku. Také mají stejnou orientaci.

OBRÁZEK

Podobně bychom mohli dokázat, že determinant dolní trojúhelníkové matice je součin prvků na diagonále. Dělat to ale nebudeme, dokážem obecněji, že determinant se nezmění transponováním.

Tvrzení 6.18. Pro libovolnou čtvercovou matici A platí $\det(A) = \det(A^T)$.

Důkaz. Sčítanec v definici $\det(A^T)$ odpovídající permutaci π je

$$\text{sgn}(\pi)a_{1,\pi(1)}a_{2,\pi(2)} \dots a_{n,\pi(n)} \cdot$$

Součin lze přeuspořádat na

$$\text{sgn}(\pi)a_{\pi^{-1}(1),1}a_{\pi^{-1}(2),2} \dots a_{\pi^{-1}(n),n} \cdot$$

protože $\pi^{-1}(i)$ -tý činitel v původním součinu je roven $a_{\pi^{-1}(i)\pi(\pi^{-1}(i))} = a_{\pi^{-1}(i),i}$. Tento činitel jsme přesunuli na i -té místo. Máme

$$\begin{aligned} \det(A^T) &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi^{-1}(1),1} a_{\pi^{-1}(2),2} \cdots a_{\pi^{-1}(n),n} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) a_{\pi^{-1}(1),1} a_{\pi^{-1}(2),2} \cdots a_{\pi^{-1}(n),n} \\ &= \sum_{\pi \in S_n, \rho = \pi^{-1}} \operatorname{sgn}(\rho) a_{\rho(1),1} a_{\rho(2),2} \cdots a_{\rho(n),n} \\ &= \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{\rho(1),1} a_{\rho(2),2} \cdots a_{\rho(n),n} = \det(A) . \end{aligned}$$

Ve třetí úpravě jsme použili vztah $\operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi)$ (viz tvrzení 6.11) a v páté úpravě jsme začali počítat přes inverzy permutací, což výsledek nezmění, protože soubor $(\pi^{-1} : \pi \in S_n)$ obsahuje všechny permutace v S_n právě jednou (viz tvrzení 6.13). \square

Dokázané tvrzení jinými slovy říká, že

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)} ,$$

což je trochu tradičnější verze definice.

Tvrzení se hodí se k tomu, že věty, které dokážeme pro řádky, budeme moci použít i pro sloupce.

Teď dokážeme vlastnosti determinantu použité při odvození vzorců v dimenzi 2 a 3 nad \mathbb{R} , jsou to body (1) a (2) v následujícím tvrzení. Zároveň spočítáme, jak se mění determinant při elementárních sloupcových úpravách, to jsou body (2), (3) a (4).

Tvrzení 6.19. *Nechť \mathbf{T} je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in T^n$, $t \in T$ a $\rho \in S_n$. Pak platí.*

- (1) $\det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_{i-1} | \mathbf{v}_i + \mathbf{u} | \mathbf{v}_{i+1} | \dots | \mathbf{v}_n)$
 $= \det(\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_{i-1} | \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_{i+1} | \dots | \mathbf{v}_n) + \det(\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_{i-1} | \mathbf{u} | \mathbf{v}_{i+1} | \dots | \mathbf{v}_n)$
- (2) $\det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_{i-1} | t\mathbf{v}_i | \mathbf{v}_{i+1} | \dots | \mathbf{v}_n) = t \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n)$
- (3) $\det(\mathbf{v}_{\rho(1)} | \mathbf{v}_{\rho(2)} | \dots | \mathbf{v}_{\rho(n)}) = \operatorname{sgn}(\rho) \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n)$
- (4) $\det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_{i-1} | \mathbf{v}_i + t\mathbf{v}_j | \mathbf{v}_{i+1} | \dots | \mathbf{v}_n) = \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n)$

Důkaz. Označíme $A = (a_{ij}) = (\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n)$, čili a_{ij} je i -tá složka vektoru \mathbf{v}_j .

(1) Označíme-li $\mathbf{u} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, platí

$$\begin{aligned}
& \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_{i-1} | \mathbf{v}_i + \mathbf{u} | \mathbf{v}_{i+1} | \dots | \mathbf{v}_n) \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(i-1),i-1} (a_{\pi(i),i} + b_{\pi(i)}) a_{\pi(i+1),i+1} \dots a_{\pi(n),n} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n),n} + \\
&\quad + \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(i-1),i-1} b_{\pi(i)} a_{\pi(i+1),i+1} \dots a_{\pi(n),n}) \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n),n} \\
&\quad + \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(i-1),i-1} b_{\pi(i)} a_{\pi(i+1),i+1} \dots a_{\pi(n),n} \\
&= \det(\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_{i-1} | \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_{i+1} | \dots | \mathbf{v}_n) + \det(\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_{i-1} | \mathbf{u} | \mathbf{v}_{i+1} | \dots | \mathbf{v}_n) .
\end{aligned}$$

V úpravách jsme roznásobili závorku a rozdělili sumu na dvě části.

(2) K důkazu tohoto bodu stačí vytknout t před sumu:

$$\begin{aligned}
& \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_{i-1} | t\mathbf{v}_i | \mathbf{v}_{i+1} | \dots | \mathbf{v}_n) \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(i-1),i-1} (t a_{\pi(i),i}) a_{\pi(i+1),i+1} \dots a_{\pi(n),n} \\
&= t \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n),n} \\
&= t \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n) .
\end{aligned}$$

(3) Uvědomíme si, že prvek na místě (i, j) v matici $(\mathbf{v}_{\rho(1)} | \mathbf{v}_{\rho(2)} | \dots | \mathbf{v}_{\rho(n)})$ je $a_{i, \rho(j)}$. K rozepsání determinantu použijeme alternativní definici.

$$\begin{aligned}
& \det(\mathbf{v}_{\rho(1)} | \mathbf{v}_{\rho(2)} | \dots | \mathbf{v}_{\rho(n)}) \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1, \rho(\pi(1))} a_{2, \rho(\pi(2))} \dots a_{n, \rho(\pi(n))} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) \operatorname{sgn}(\rho\pi) a_{1, \rho\pi(1)} a_{2, \rho\pi(2)} \dots a_{n, \rho\pi(n)} \\
&= \operatorname{sgn}(\rho) \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho\pi) a_{1, \rho\pi(1)} a_{2, \rho\pi(2)} \dots a_{n, \rho\pi(n)} \\
&= \operatorname{sgn}(\rho) \sum_{\pi \in S_n, \sigma = \rho\pi} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1, \sigma(1)} a_{2, \sigma(2)} \dots a_{n, \sigma(n)} \\
&= \operatorname{sgn}(\rho) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1, \sigma(1)} a_{2, \sigma(2)} \dots a_{n, \sigma(n)} \\
&= \operatorname{sgn}(\rho) \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n)
\end{aligned}$$

V předposlední úpravě jsme začali sčítat přes permutace $\sigma = \rho\pi$ místo π , což výsledek nezmění, protože soubor $(\rho\pi : \pi \in S_n)$ obsahuje všechny permutace v S_n právě jednou (viz tvrzení 6.13).

(4) Nejprve dokážeme pomocné tvrzení: Determinant matice $B = (b_{kl})$ řádu n , která má dva sloupce i, j ($i \neq j$) stejné, je nula.

Pro většinu těles bychom mohli použít předchozí bod: Protože (i, j) je lichá permutace a prohozením sloupců i a j se matice nezmění, platí

$\det(B) = -\det(B)$. Bohužel z toho plyne $\det(B) = 0$ pouze pro tělesa charakteristiky různé od 2. Proto obecně musíme postupovat jinak. V sumě

$$\det(B) = \sum_{\pi \in S_n} b_{1,\pi(1)} b_{2,\pi(2)} \cdots b_{n,\pi(n)}$$

k sobě seskupíme pro každou sudou permutaci π sčítanec odpovídající π a sčítanec odpovídající permutaci $(i j)\pi$. Toto seskupení můžeme provést a vyčerpáme jím všechny sčítance, protože soubor $\{(i j)\pi : \pi \in S_n, \operatorname{sgn}(\pi) = 1\}$ obsahuje všechny liché permutace v S_n právě jednou (viz tvrzení 6.13). Dostaneme

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{\pi \in S_n, \operatorname{sgn}(\pi)=1} (\operatorname{sgn}(\pi) b_{1,\pi(1)} b_{2,\pi(2)} \cdots b_{n,\pi(n)} + \\ &\quad + \operatorname{sgn}((i j)\pi) b_{1,(i j)\pi(1)} b_{2,(i j)\pi(2)} \cdots b_{n,(i j)\pi(n)}) \\ &= \sum_{\pi \in S_n, \operatorname{sgn}(\pi)=1} (\operatorname{sgn}(\pi) b_{1,\pi(1)} b_{2,\pi(2)} \cdots b_{n,\pi(n)} - \\ &\quad - \operatorname{sgn}(\pi) b_{1,\pi(1)} b_{2,\pi(2)} \cdots b_{n,\pi(n)}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

kde jsme použili $\operatorname{sgn}((i j)\pi) = -\operatorname{sgn}(\pi)$ a fakt, že B má shodný i -tý a j -tý sloupec.

Tím jsem dokázali pomocné tvrzení a důkaz čtvrtého bodu snadno dokončíme užitím předchozích.

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \cdots | \mathbf{v}_{i-1} | \mathbf{v}_i + t\mathbf{v}_j | \mathbf{v}_{i+1} | \cdots | \mathbf{v}_n) \\ &= \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \cdots | \mathbf{v}_n) + \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \cdots | \mathbf{v}_{i-1} | t\mathbf{v}_j | \mathbf{v}_{i+1} | \cdots | \mathbf{v}_n) \\ &= \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \cdots | \mathbf{v}_n) + t \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \cdots | \mathbf{v}_{i-1} | \mathbf{v}_j | \mathbf{v}_{i+1} | \cdots | \mathbf{v}_n) \\ &= \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \cdots | \mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

□

Protože determinant matice se shoduje s determinantem transponované matice (tvrzení 6.18), podobné tvrzení můžeme formulovat pro řádky. Bod (2) říká, že vynásobíme-li některý sloupec (nebo řádek) prvkem $t \in T$, determinant se zvětší t -krát. Další bod ukazuje, že prohodíme-li sloupce (řádky) podle nějaké permutace π , pak determinant nanejvýš změní znaménko, a to v případě, že π je lichá. Speciálně, pokud prohodíme dva sloupce (řádky), determinant změní znaménko. Poslední bod můžeme formulovat tak, že přičteme-li t -násobek některého sloupce (resp. řádku) k jinému sloupci (resp. řádku), determinant se nezmění.

Protože víme, jak spočítat determinant horní (dolní) trojúhelníkové matice (tvrzení 6.17), můžeme k výpočtu determinantu obecné matice použít Gaussovu eliminaci. Přitom si můžeme pomoci také sloupcovými úpravami.

Geometricky jsme si již zdůvodnili vlastnosti (1) a (2) v případě $\mathbf{T} = \mathbb{R}$ a $n = 2, 3$. Prohození dvou sloupců odpovídá zrcadlení podle přímky nebo roviny, takže determinant změní znaménko. To odůvodňuje (3). Následující obrázek vysvětluje čtvrtou vlastnost pro $n = 2$. Přičteme-li k jednomu z vektorů násobek druhého, příslušný rovnoběžníky budou mít stejnou jednu ze stran a stejnou výšku na tuto stranu jako původní rovnoběžník.

OBRAZEK

Příklad 6.20. Spočítáme determinant reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

V prvních dvou úpravách vynásobíme pro pohodlí poslední sloupec číslem $1/2$ a prohodíme první a třetí sloupec, abychom dostali na pozici $(1, 1)$ prvek 1. Dále budeme používat už jen řádkové úpravy. V jedné z nich vynásobíme druhý řádek číslem $1/3$. Musíme dát pozor na to, že prohazování a násobení determinant mění. Na násobení se můžeme v tomto kontextu dívat jako na vytýkání inverzního skaláru před determinant.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ & = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & 3 \\ 0 & 12 & 11 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 12 & 11 \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 15 \end{vmatrix} \\ & = -6 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot 15 = 270 \end{aligned}$$

Výpočet budeme umět provést šikovněji pomocí elementárních úprav kombinovaných s rozvojem.

Příklad 6.21. Prohozením sloupců spočítáme determinant reálné matice.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ -3 & 8 & 0 & -2 \\ 7 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}((1 \ 4 \ 2 \ 3)) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ & = \operatorname{sgn}((1 \ 4 \ 2 \ 3)) \cdot 3 \cdot (-2) \cdot 5 \cdot 4 = 120 \end{aligned}$$

Provedli jsme prohození sloupců odpovídající permutaci $\rho = (1 \ 4 \ 2 \ 3)$ – sloupec 1 jsme přesunuli na místo 4, sloupec 4 na místo 2, atd. Tato permutace je lichá. Alternativně bychom postupně mohli prohazovat sloupce po dvou.

6.3.3. Další kritérium regularity. Z tvrzení 6.19 můžeme odvodit další kritérium pro regulárnost matice: matice je regulární právě tehdy, když má nenulový determinant. Geometricky to pro reálné matice řádu 3 můžeme odůvodnit tak, že f_A nuluje objemy právě tehdy, když obraz $f_A(\mathbb{R}^3)$ je obsažen v nějaké rovině (tj. zobrazení zkolabuje prostor do roviny nebo dokonce přímky či bodu).

Tvrzení 6.22. Čtvercová matice je regulární právě tehdy, když $\det(A) \neq 0$.

Důkaz. Elementární řádkové úpravy sice determinant mění, ale nemění „nulovost“ determinantu: prohozením řádků determinant změní znaménko, vynásobením nenulovým číslem t se determinant zvětší t -krát a přičtení násobku nějakého řádku k jinému determinant nezmění. Takže označíme-li B odstupňovaný tvar matice A , pak $\det(A) = 0$ právě tehdy, když $\det(B) = 0$. Matice B je v horním trojúhelníkovém tvaru, takže $\det(B)$ je součinem prvků na diagonále (tvrzení 6.17). Tento součin je nulový právě tehdy, když má B nulový řádek, což se stane právě tehdy, když A je singulární podle bodu (5) věty 4.30 charakterizující regulární matice. \square

Implikace zprava doleva zobecňuje fakt dokázaný v důkazu bodu (4), že determinant matice, která má dva sloupce stejné, je nulový.

Obecněji lze hodnotu libovolné matice určit podle determinantů čtvercových podmatic.

Definice 6.23. *Minorem řádu k matice A rozumíme determinant matice vzniklé z A výběrem k řádků a k sloupců.*

Příklad 6.24. Jedním ze minorů řádu 2 matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

je

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Matice B vznikne z A výběrem řádků 2 a 3 a výběrem sloupců 2 a 4.

Tvrzení 6.25. *Hodnota libovolné matice A je rovna největšímu číslu r takovému, že existuje nenulový minor matice A řádu r .*

Důkaz. Pro odstupňovaný tvar se tvrzení nahlédne snadno a číslo r se řádkovými úpravami nemění. Detaily si rozmyslete jako cvičení. \square

Například hodnota matice A je rovna 2 právě tehdy, když každý subdeterminant řádu 3 je nulový a existuje nenulový subdeterminant řádu 2.

6.3.4. *Determinant součinu.* Další aplikací tvrzení 6.19 je věta o determinantu součinu matic. K tomu si nejprve všimneme, jaké jsou determinanty elementárních matic:

- Matice odpovídající prohození dvou řádků má determinant -1 , protože vznikne z jednotkové matice prohozením těchto řádků (můžeme použít například bod (3) z tvrzení na jednotkovou matici, nebo přímo definici).
- Matice odpovídající vynásobení nějakého řádku prvkem $t \in T$ má determinant t , například podle věty o determinantu horní trojúhelníkové matice, nebo podle bodu (2).
- Matice odpovídající přičtení t -násobku nějakého řádku k jinému má determinant 1, například opět podle věty o determinantu horní nebo dolní trojúhelníkové matice, nebo podle bodu (4).

Z bodů (2),(3),(4) nyní vyplývá, že pro libovolnou elementární matici E a libovolnou čtvercovou matici B stejného řádu platí $\det(EB) = \det(E)\det(B)$. Každá regulární matice R je součinem elementárních matic $R = E_1E_2 \dots E_k$ (podle tvrzení 4.39), takže dostáváme

$$\begin{aligned} \det(RB) &= \det(E_1E_2 \dots E_kB) = \det(E_1)\det(E_2 \dots E_kB) = \dots \\ &= \det(E_1)\det(E_2) \dots \det(E_k)\det(B) = \dots = \det(R)\det(B) \end{aligned}$$

Tento vztah platí i pro singulární matice R , tedy obecně platí, že determinant součinu je součin determinantů.

Věta 6.26 (věta o determinantu součinu). *Pro libovolné matice A, B řádu n nad stejným tělesem platí $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.*

Důkaz. Pro regulární matici A jsme větu dokázali. Pokud A je singulární, pak AB je rovněž singulární. To lze zdůvodnit například pomocí tvrzení 5.77 o hodnotě součinu: $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A) < n$. Obě strany rovnosti jsou proto rovny nule. \square

Věta má opět názorný geometrický význam. Pro reálné matice řádu tři udávají determinanty matic A, B koeficienty změny objemu a orientace pro zobrazení f_A, f_B . Matice AB odpovídá složenému zobrazení $f_A \circ f_B$, jeho koeficient změny objemu a orientace je zřejmě součinem těchto koeficientů pro matice A, B . Například, je-li $\det(A) = 2$ a $\det(B) = 3$, zobrazení f_B jakýkoliv útvar zvětší třikrát a f_A pak ještě dvakrát, takže dohromady se útvar zvětší šestkrát.

Pro součet podobná věta neplatí, například proto, že součet dvou singulárních matic může být regulární. Pro determinant inverzní matice dostaneme vzorec z věty o determinantu součinu.

Důsledek 6.27. *Je-li A regulární matice, pak $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.*

Důkaz. Podle věty o determinantu součinu je

$$1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1}) ,$$

z čehož dostaneme vzorec vydělením $\det(A)$. (Determinant matice A je nenulový podle tvrzení 6.22.) \square

6.3.5. *Cramerovo pravidlo.* Jako poslední aplikaci základních vlastností determinantu dokážeme *Cramerovo pravidlo* pro řešení soustav lineárních rovnic s regulární maticí.

Věta 6.28 (Cramerovo pravidlo). *Nechť A je regulární matice řádu n a $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pak j -tá složka vektoru řešení $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je*

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} ,$$

kde A_j je matice, která vznikne z A nahrazením j -tého sloupce vektorem \mathbf{b} , tj.

$$A_j = (A_{*1}|A_{*2}|\dots|A_{*(j-1)}|\mathbf{b}|A_{*(j+1)}|\dots|A_{*n}) .$$

Důkaz. Vztah $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ můžeme zapsat jako

$$x_1 A_{*1} + x_2 A_{*2} + \dots + x_n A_{*n} = \mathbf{b} .$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} \det(A_j) &= \det(A_{*1}|A_{*2}|\dots|A_{*(j-1)}|\mathbf{b}|A_{*(j+1)}|\dots|A_{*n}) \\ &= \det\left(A_{*1}|A_{*2}|\dots|A_{*(j-1)}\left|\sum_{k=1}^n x_k A_{*k}\right|A_{*(j+1)}|\dots|A_{*n}\right) \\ &= \det(A_{*1}|A_{*2}|\dots|A_{*(j-1)}|x_j A_{*j}|A_{*(j+1)}|\dots|A_{*n}) \\ &= x_j \det(A_{*1}|A_{*2}|\dots|A_{*(j-1)}|A_{*j}|A_{*(j+1)}|\dots|A_{*n}) = x_j \det(A) , \end{aligned}$$

kde ve třetí úpravě jsme využili toho, že přičtením lineárním kombinací sloupců různých od j k sloupci j se determinant nezmění (to plyne z bodu (4) v tvrzení 6.19) a ve čtvrté úpravě jsme použili (2).

Z toho ihned vidíme dokazovaný vztah. \square

Cramerovo pravidlo můžeme použít pouze pro regulární matice, tj. pro čtvercové matice s nenulovým determinanem (viz tvrzení 6.22). Spíše než pro praktické počítání se využívá ve výpočtech a úvahách, kdy se může hodit explicitní vzorec pro nějakou složku řešení.

Příklad 6.29. Vypočítáme třetí složku řešení soustavy $Ax = b$ nad \mathbb{Z}_5 .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

Spočítáme determinant matice A .

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

Matice A je tedy regulární a můžeme použít Cramerovo pravidlo. Spočítáme ještě determinant matice A_3 .

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Třetí složka řešení je

$$x_3 = \frac{3}{2} = 4 .$$

6.4. Rozvoj, adjungovaná matice.

Vezmeme-li v definici všechny členy obsahující vybraný prvek a_{ij} a vytkneme jej, v závorce dostaneme tzv. *algebraický doplněk* prvku a_{ij} . Až na znaménko je roven determinantu matice, která vznikne vynecháním řádku a sloupce obsahující a_{ij} . To dokážeme ve větě o rozvoji podle sloupce. Nejprve potřebný pojem.

Definice 6.30. Necht $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n a $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. *Algebraickým doplňkem* (též *kofaktorem*) prvku a_{ij} matice A rozumíme skalár

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}) ,$$

kde M_{ij} je matice řádu $n - 1$, která vznikne z A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce.

Definice má smysl pro matice řádu $n > 1$. Pro matici řádu 1 definujeme $A_{11} = 1$. Tento případ je potřeba v některých tvrzeních této kapitoly rozebrat zvlášť, ale explicitně na to upozorňovat nebudeme.

Příklad 6.31. Algebraickým doplňkem prvku a_{12} v reálné matici

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & -4 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

je

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-9 - (-20)) = -11 .$$

Věta 6.32 (o rozvoji podle sloupce). *Je-li A čtvercová matice řádu n a $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, pak*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj} .$$

Důkaz. Potřebujeme dokázat, že koeficient u a_{ij} , vytkneme-li tento prvek ze všech členů, které jej obsahují, je rovný A_{ij} . Pro pohodlnost zvolíme trochu jiný postup důkazu.

1. krok. Pokud $a_{nn} = 1$ a všechny ostatní prvky v n -tém sloupci jsou nulové, pak $\det(A) = A_{nn}$.

Platí

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n),n} \\ &= \sum_{\pi \in S_n, \pi(n)=n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n),n} \\ &= \sum_{\pi \in S_n, \pi(n)=n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n-1),n-1} = \\ &= (-1)^{n+n} \sum_{\pi \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n-1),n-1} = A_{nn} . \end{aligned}$$

V druhé úpravě jsme vynechali nulové sčítance, ve třetí jsme použili $a_{nn} = 1$, ve čtvrté jsme použili $(-1)^{(n-1)+(n-1)} = 1$ a skutečnost, že znaménko permutace $\pi \in S_n$, pro kterou $\pi(n) = n$, je stejné jako znaménko permutace π zúžené na množinu $\{1, 2, \dots, n-1\}$ (to platí, protože tyto dvě permutace mají stejný redukovaný cyklický zápis).

2. krok. Pro libovolné $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, pokud $a_{ij} = 1$ a všechny ostatní prvky v j -tém sloupci jsou nulové, pak $\det(A) = A_{ij}$.

Posuneme-li v matici B řádek i na poslední místo a potom sloupec j na poslední místo, dostaneme matici B , jejíž determinant je B_{nn} podle 1. kroku. Posunutí i -tého řádku na n -té místo odpovídá permutaci řádků $\sigma = (n \ (n-1) \ \dots \ i)$ a posunutí j -tého sloupce na n -té místo odpovídá permutaci sloupců $\rho = (n \ (n-1) \ \dots \ j)$. Podle bodu (3) tvrzení 6.19 o změně determinantu při permutaci sloupců a analogického tvrzení pro řádky máme

$$\det(A) = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\rho) \det(B) = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\rho) B_{nn} = (-1)^{i+j} B_{nn} = A_{nn} ,$$

kde $\operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\rho) = (-1)^{i+j}$ je vidět z toho, že parita délek cyklů σ, ρ je stejná právě tehdy, když parita i a j je stejná.

3. krok. Pomocí 2.kroku a bodů (1) a (2) z tvrzení 6.19 nyní výpočet dokončíme.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(A_{*1} | A_{*2} | \dots | A_{*n}) \\ &= \det \left(A_{*1} | A_{*2} | \dots | A_{*(j-1)} | \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{e}_j | A_{*(j+1)} | \dots | A_{*n} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \det(A_{*1} | A_{*2} | \dots | A_{*(j-1)} | \mathbf{e}_j | A_{*(j+1)} | \dots | A_{*n}) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} . \end{aligned}$$

(Rovněž jsme využili triviální skutečnosti, že algebraický doplněk prvku a_{ij} se nezmění, změníme-li j -tý sloupec.) \square

Díky tvrzení 6.18 o transponování můžeme provádět rozvoj podle řádku:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} .$$

Příklad 6.33. Provedeme rozvoj podle druhého řádku.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & -4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} &= 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + \\ &+ (-4) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Všimněte si, že se znaménka v algebraickém doplňku střídají, stačí tedy určit první.

Rozvoj podle sloupce (řádku) vznikne pouhým přeskupením výrazu z definice determinantu. Kdybychom provedli rozvoj pro matici řádu n , na vzniklé matice provedli rozvoj, atd., po $n - 1$ krocích bychom dostali znovu výraz z definice determinantu. Pro praktické počítání se rozvoj hodí v situaci, že některý řádek nebo sloupec je skoro celý nulový, nejlépe, když obsahuje jen jeden nenulový prvek. Pak je totiž většina sčítanců v rozvoji nulová a nemusíme počítat menší determinanty. Efektivní postup je vylimitovat jeden řádek nebo sloupec, provést rozvoj a pokračovat s jedním menším determinatem.

Příklad 6.34. Spočítáme znovu determinant v příkladu 6.20.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -6 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 30 & 0 & 18 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 30 & 18 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} \\ &= -180 - 90 = -270 \end{aligned}$$

V první úpravě jsme 4-násobek druhého řádku přičetli k prvnímu, pak jsme provedli rozvoj podle 2. sloupce a zbylý determinant jsme spočítali z definice.

Příklad 6.35. Vypočítáme determinant větší matice.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -3 & -1 & -3 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -10 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -4 & -1 \\ 5 & 1 & 10 & -4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & -4 & 3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 & -4 & -1 \\ 5 & 1 & 10 & -4 & 5 \\ -10 & 0 & -26 & 8 & -12 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & -1 \\ -10 & -26 & 8 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 11 \\ 6 & -26 & 8 & -36 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ -4 & 6 & 11 \\ 6 & -26 & -36 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 0 & 20 & 15 \\ 0 & -47 & -42 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 20 & 15 \\ -47 & -42 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 47 & 42 \end{vmatrix} = 10(168 - 141) = 270. \end{aligned}$$

Nejprve jsme téměř vynulovali 2. sloupec eliminací, užitím 4. řádku. Potom jsme determinant rozvinuli podle 2. sloupce, máme jediný nenulový člen se znaménkem $(-1)^{2+4} = 1$. Dále jsme vyeliminovali 2. řádek (pomocí 3. sloupce). Následoval rozvoj podle 2. řádku, nenulový člen má znaménko $(-1)^{3+2} = -1$, atd.

6.4.1. *Adjungovaná matice.* Rozvoj podle j -tého sloupce probíhá tak, že vezmeme první prvek v j -tém sloupci, vynásobíme znaménkem $(-1)^{j+1}$ a determinantem matice, která vznikne vynecháním prvního řádku a j -tého sloupce. Pak postupujeme obdobně s dalšími prvky v j -tém sloupci a všechny takové výrazy sečteme. Pokud „omylem“ vždy vynecháváme jiný sloupec k , dostaneme nulový prvek tělesa.

Věta 6.36 (o falešném rozvoji). *Je-li A čtvercová matice řádu n a $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \neq k$, pak*

$$0 = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = a_{1j} A_{1k} + a_{2j} A_{2k} + \dots + a_{nj} A_{nk} .$$

Důkaz. Označme B matici, která vznikne nahrazením k -tého sloupce matice A sloupcem A_{*j} . Protože B má dva sloupce stejné, je B singulární (má lineárně závislé sloupce, takže můžeme použít bod (3) pozorování 5.79), a proto $\det(B) = 0$ podle kritéria v tvrzení 6.22. Na B použijeme rozvoj podle k -tého sloupce a využijeme toho, že $B_{ik} = A_{ik}$, protože algebraický doplněk prvku b_{ik} na k -tém sloupci nezávisí.

$$0 = \det(B) = b_{1k} B_{1k} + b_{2k} B_{2k} + \dots + b_{nk} B_{nk} = a_{1j} A_{1k} + a_{2j} A_{2k} + \dots + a_{nj} A_{nk} \quad \square$$

Z algebraických doplňků matice $A = (a_{ij})$ vytvoříme tzv. *adjungovanou matici* tak, že prvek na místě (i, j) bude algebraický doplněk prvku a_{ji} . **Pozor na změnu pořadí indexů.**

Definice 6.37. *Adjungovanou matici* ke čtvercové matici A rozumíme matici $\text{adj}(A)$ stejného řádu, která má na místě (i, j) prvek A_{ji} .

Řádkovou i sloupcovou verzi vět o rozvoji a falešném rozvoji jde formulovat maticovým vztahem.

Věta 6.38. *Pro libovolnou čtvercovou matici A platí*

$$\text{adj}(A) A = A \text{adj}(A) = \det(A) I_n .$$

Speciálně, pokud A je regulární, pak

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} .$$

Důkaz. Prvek na místě (i, j) v součinu $\text{adj}(A) A$ je $A_{1i} a_{1j} + A_{2i} a_{2j} + \dots + A_{ni} a_{nj}$. Pokud $i = j$ je výsledkem $\det A$, protože výraz je roven rozvoji podle i -tého sloupce. Pokud $i \neq j$ je výsledkem 0 podle věty o falešném rozvoji. Dohromady dostáváme $\text{adj}(A) A = \det(A) I_n$. Rovnost $A \text{adj}(A) = \det(A) I_n$ dostaneme obdobně podle vět o rozvoji a falešném rozvoji podle řádku. \square

Věta nám také dává explicitní vyjádření inverzní matice. Inverzní matici pro řády 2 a 3 lze její pomocí počítat rychle bez eliminace.

Příklad 6.39. Pro regulární matici A řádu 2 dostáváme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Příklad 6.40. Spočítáme inverzní matici k reálné matici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nejdřív spočítáme adjungovanou matici.

$$\begin{aligned} \text{adj}(A) &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 24 & -11 & 10 \\ -15 & -10 & -13 \\ 6 & 4 & -11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Determinant matice A by teď bylo neefektivní počítat zvlášť. Stačí spočítat například prvek na místě $(3, 3)$ v součinu $A \text{adj}(A)$.

$$\det(A) = 0 \cdot 10 + 2 \cdot (-13) + 5 \cdot (-11) = -81.$$

Vidíme, že A je regulární a platí

$$A^{-1} = -\frac{1}{81} \begin{pmatrix} 24 & -11 & 10 \\ -15 & -10 & -13 \\ 6 & 4 & -11 \end{pmatrix} = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} -24 & 11 & -10 \\ 15 & 10 & 13 \\ -6 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

6.5. Vandermondův determinant.

Tzv. *Vandermondova matice* vzniká při interpolaci polynomem. Budeme hledat polynom f nad tělesem \mathbf{T} stupně nejvýše $n - 1$, tj.

$$f = k_0 + k_1x + \dots + k_{n-1}x_{n-1}, \quad k_0, k_1, \dots, k_{n-1} \in T,$$

který splňuje podmínky

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n,$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ jsou dané prvky tělesa \mathbf{T} , přičemž a_1, a_2, \dots, a_n jsou navzájem různé. Pro koeficienty dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Matice této soustavy se nazývá *Vandermondova matice* a její determinant *Vandermondův determinant*. Indukcí podle n dokážeme, že je roven

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} a_j - a_i.$$

Z toho mimo jiné vyplývá, že Vandermondova matice je regulární (za předpokladu, že a_1, a_2, \dots, a_n jsou po dvou různé) a tedy hledaný polynom f existuje a je jednoznačně určený; nazývá se Lagrangeův interpolační polynom.

Vzorec snadno ověříme pro $n = 2$ (pro $n = 1$ by vzorec platil, pokud bychom definovali prázdný součin jako 1). Předpokládejme $n > 2$ a že vzorec platí pro menší hodnoty n . Začneme tím, že vyliminujeme první sloupec, tj. (-1) -násobek prvního řádku přičteme ke všem ostatním, a pak provedeme rozvoj podle prvního sloupce.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1^2 & \dots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 & \dots & a_3^{n-1} - a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n^2 - a_1^2 & \dots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Vytkneme z prvního řádku výraz $a_2 - a_1$, z druhého výraz $a_3 - a_2$, atd., a využijeme vzorce

$$c^k - d^k = (c - d)(c^{k-1} + c^{k-2}d + c^{k-3}d^2 + \dots + cd^{k-2} + d^{k-1}) .$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 & \dots & a_3^{n-1} - a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n^2 - a_1^2 & \dots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{vmatrix} &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \cdot \\ \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 & a_2^2 + a_2a_1 + a_1^2 & \dots & a_2^{n-2} + a_2^{n-3}a_1 + \dots + a_1^{n-2} \\ 1 & a_3 + a_1 & a_3^2 + a_3a_1 + a_1^2 & \dots & a_3^{n-2} + a_3^{n-3}a_1 + \dots + a_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n + a_1 & a_n^2 + a_na_1 + a_1^2 & \dots & a_n^{n-2} + a_n^{n-3}a_1 + \dots + a_1^{n-2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Dále přičteme $(-a_1)$ -násobek předposledního sloupce k poslednímu, \dots , $(-a_1)$ -násobek druhého sloupce ke třetímu, a nakonec $(-a_1)$ -násobek prvního sloupce ke druhému.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 & a_2^2 + a_2a_1 + a_1^2 & \dots & a_2^{n-2} + a_2^{n-3}a_1 + \dots + a_1^{n-2} \\ 1 & a_3 + a_1 & a_3^2 + a_3a_1 + a_1^2 & \dots & a_3^{n-2} + a_3^{n-3}a_1 + \dots + a_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n + a_1 & a_n^2 + a_na_1 + a_1^2 & \dots & a_n^{n-2} + a_n^{n-3}a_1 + \dots + a_1^{n-2} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 & a_2^2 + a_2a_1 + a_1^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 + a_1 & a_3^2 + a_3a_1 + a_1^2 & \dots & a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n + a_1 & a_n^2 + a_na_1 + a_1^2 & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 + a_1 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n + a_1 & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = V(a_2, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Vznikne Vandermondův determinant pro a_2, a_3, \dots, a_n , takže výpočet můžeme dokončit užitím indukčního předpokladu.

$$\begin{aligned} V(a_1, \dots, a_n) &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)V(a_2, \dots, a_n) \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n} a_j - a_i = \prod_{1 \leq i < j \leq n} a_j - a_i \end{aligned}$$

Odvozený vzorec platí i v případě, že a_1, \dots, a_n nejsou navzájem různé, protože pak má Vandermondova matice dva stejné řádky, takže její determinant je nulový, stejně jako výraz $\prod_{1 \leq i < j \leq n} a_j - a_i$.

Cvičení

1. Vypočítejte obsah rovnoběžníku určeného vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} podle obrázku ??.
2. Promyslete si detailně důkaz tvrzení 6.3.
3. Najděte všechna řešení rovnic $\alpha\pi = \beta$, $\pi\alpha = \beta$ a $\alpha\pi\gamma = \beta$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in S_{10}$.

$$\alpha = (1 \ 5 \ 3 \ 2 \ 7)(4 \ 6), \quad \beta = (2 \ 3 \ 9 \ 10 \ 4)(7 \ 8), \quad \gamma = (1 \ 7)(2 \ 6)(4 \ 5)$$

4. Dokažte, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ permutace na konečné množině X má permutace $\pi\rho\pi^{-1}$ v zápisu pomocí nezávislých cyklů stejný počet cyklů délky k jako permutace ρ . Odvoďte z toho, že stejné tvrzení platí pro permutace $\pi\rho$ a $\rho\pi$.
5. Označme k počet cyklů v cyklickém zápisu permutace $\pi \in S_n$ (počítáme i cykly délky 1!). Dokažte, že $\text{sgn}(\pi) = (-1)^{n+k}$.
6. Vypište z definice výraz pro determinant matice řádu 4.
7. Najděte vzorec pro determinant čtvercových matic $A = (a_{ij})$ řádu n takových, že $a_{ij} = 0$ kdykoliv $i > n + 1 - j$.
8. Nechť A je blokově horní trojúhelníková matice, tj. matice tvaru

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} \\ \hline 0 & A_{22} & \dots & A_{2r} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{rr} \end{array} \right),$$

kde $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{rr}$ jsou čtvercové matice (ne nutně stejného řádu). Dokažte, že $\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22}) \dots \det(A_{rr})$.

9. Z předchozího cvičení by se mohlo zdát, že determinanty můžeme počítat blokově. Není tomu tak. Naleznete matici

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

se čtvercovými bloky takovou, že $\det(A) \neq \det(A_{11}) \det(A_{22}) - \det(A_{12}) \det(A_{21})$.

10. Dokažte, že pro regulární matici A řádu n platí $\det(\text{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$.

11. Dokažte tvrzení 6.25

7. LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Cíl. .

7.1. Definice a příklady.

Připomeňme, že matice A nad tělesem \mathbf{T} typu $m \times n$ určuje zobrazení $f_A : T^n \rightarrow T^m$ předpisem $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Tento pohled motivoval řadu zavedených pojmů:

- **Násobení matic:** Je-li B matice nad \mathbf{T} typu $p \times m$, pak složené zobrazení $f_B \circ f_A : T^n \rightarrow T^p$ je rovno zobrazení f_{BA} .
- **Inverzní matice:** Je-li $m = n$ a f_A je bijekce, pak inverzní zobrazení $(f_A)^{-1}$ je rovno $f_{A^{-1}}$.
- **Jádro matice:** $\text{Ker } A$ je rovno množině všech vektorů $\mathbf{x} \in T^n$, které f_A zobrazí na nulový vektor.

$$\text{Ker } A = \{\mathbf{x} : f_A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \leq \mathbf{T}^n$$

- **Sloupcový prostor matice a hodnost:** $\text{Im } A$ je roven obrazu zobrazení f_A . Hodnost A je rovna dimenzi $\text{Im } A$.
 $\text{Im } A = \{f_A(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbf{T}^n\} = f_A(T^n) \leq \mathbf{T}^m, \quad \text{rank}(A) = \dim(\text{Im } A)$
- **Determinant:** Je-li $\mathbf{T} = \mathbb{R}$ a $m = n = 2$ (resp. $m = n = 3$), pak $\det(A)$ udává změnu obsahu (resp. objemu) a orientace při zobrazení f_A .

Rovněž nám tento pohled poskytl geometrickou interpretaci řady tvrzení.

Ne každé zobrazení $T^n \rightarrow T^m$ je tvaru f_A pro nějakou matici A . Zobrazení tvaru f_A mají tu vlastnost, že „zachovávají“ sčítání a násobení. Takovým zobrazením říkáme *lineární* a za okamžik nahlédneme, že linearita tato zobrazení charakterizuje. Lineární zobrazení definujeme mezi obecnými vektorovými prostory (nejen aritmetickými).

Definice 7.1. Necht \mathbf{V}, \mathbf{W} jsou vektorové prostory nad stejným tělesem \mathbf{T} . Zobrazení $f : V \rightarrow W$ nazýváme *lineární zobrazení* (nebo *homomorfismus*) z \mathbf{V} do \mathbf{W} , pokud

- (1) $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a
- (2) $f(t\mathbf{u}) = tf(\mathbf{u})$ pro libovolné $\mathbf{u} \in V$ a $t \in T$.

Skutečnost, že f je lineární zobrazení z \mathbf{V} do \mathbf{W} zapisujeme $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$.

Vlevo v rovnostech vystupují operace v prostoru \mathbf{V} a vpravo operace v prostoru \mathbf{W} . Zdůrazněme, že prostory \mathbf{V} a \mathbf{W} musí být nad stejným tělesem. Všimněte si rovněž, že každé lineární zobrazení zobrazuje nulový vektor ve \mathbf{V} na nulový vektor v \mathbf{W} .

Pro libovolnou matici A nad \mathbf{T} typu $m \times n$ je zobrazení $f_A : T^n \rightarrow T^m$ lineární, protože

$$f_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = f_A(\mathbf{u}) + f_A(\mathbf{v})$$

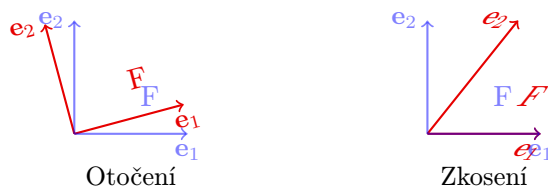
a

$$f_A(t\mathbf{u}) = A(t\mathbf{u}) = t(A\mathbf{u}) = tf_A(\mathbf{u}) .$$

To nám dává řadu příkladů lineárních zobrazení mezi aritmetickými vektorovými prostory (a jak jsme zmínili, jiná lineární zobrazení mezi aritmetickými prostory neexistují, viz níže).

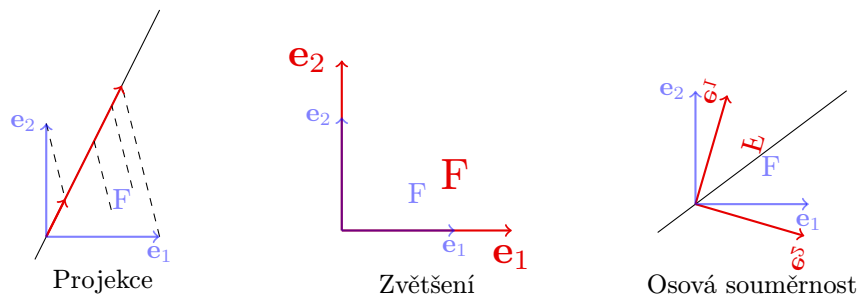
Příklad 7.2. Příklady lineárních zobrazení z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 :

- Otočení (rotace) o daný úhel.
- Zkosení



OBRÁZEK 10. Zobrazení v rovině: otočení a zkosení

- Projekce na přímku procházející počátkem.
- Osová souměrnost podle přímky procházející počátkem.
- Zvětšení (zmenšení)



OBRÁZEK 11. Zobrazení v rovině: projekce, zvětšení a osová souměrnost

Lineární zobrazení z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^3 jsou například rotace, zrcadlení podle roviny procházející počátkem, osová souměrnost podle přímky procházející počátkem, projekce na rovinu nebo přímku procházející počátkem.

Příkladem lineárního zobrazení z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^3 je zobrazení f_A pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

OBRÁZEK

Lineární zobrazení z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^2 používáme při kreslení trojrozměrných útvarů na tabuli (papír):

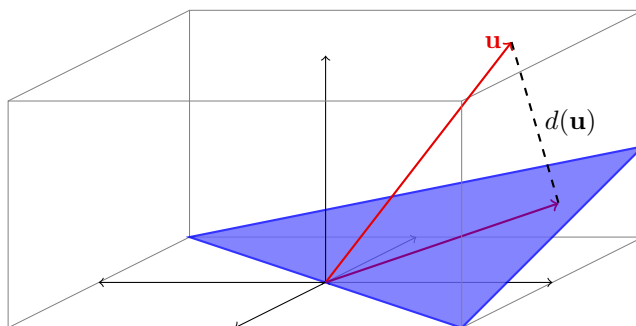
OBRÁZEK

Příkladem lineárního zobrazení z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R} je zobrazení d udávající orientovanou vzdálenost od zvolené roviny procházející počátkem.

Ještě než popíšeme, jak vypadají lineární zobrazení obecně, podíváme se na další příklady.

Příklad 7.3.

- Identické zobrazení id_V na libovolném vektorovém prostoru V je lineární zobrazení $V \rightarrow V$.



OBRÁZEK 12. Lineární zobrazení z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R} : orientovaná vzdálenost od plochy

- Tzv. *nulové zobrazení* 0 z \mathbf{V} do \mathbf{W} přiřazující všem vektorům ve \mathbf{V} nulový vektor ve \mathbf{W} je lineární.
- Nechť $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ je báze vektorového prostoru \mathbf{V} . Zobrazení f z V do T^n definované $f(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_B$ je lineární zobrazení $\mathbf{V} \rightarrow T^n$ podle tvrzení 5.64 o souřadnicích a operacích.
- Zobrazení přiřazující matici nad \mathbf{T} typu $n \times n$ součet prvků na diagonále (tzn. stopu) je lineárním zobrazením $T^{n \times n} \rightarrow T$.
- Determinant můžeme chápat jako zobrazení přiřazující n -tici vektorů z T^n prvek \mathbf{T} , tedy jako zobrazení

$$\text{Det} : \underbrace{T^n \times T^n \times \dots \times T^n}_{n \times} \rightarrow T .$$

Toto zobrazení je tzv. *multilineární*, tj. zvolíme-li pevně $n-1$ z celkových n argumentů, vznikne lineární zobrazení $T^n \rightarrow T$. Například jsou-li $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \in T^3$ libovolné vektory, je zobrazení $f(\mathbf{x}) = \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{x} | \mathbf{v}_3)$ lineární zobrazení z T^3 do T . Linearita byla použita při odvozování vzorců na začátku kapitoly o determinantech a formulována jako body (1) a (2) v tvrzení 6.19.

- Derivace je lineárním zobrazením (např.) z prostoru reálných diferencovatelných funkcí do prostoru všech reálných funkcí.
- Zobrazení přiřazující funkci její určitý integrál od 1 do 10 je lineárním zobrazením z prostoru všech reálných spojitých funkcí na $[1, 10]$ do \mathbb{R} .

7.2. Matice lineárního zobrazení.

Z definice lineárního zobrazení se snadno indukci dokáže, že obrazem lineární kombinace je lineární kombinace obrazů, tj. pro libovolné lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ a skaláry $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$ platí

$$f(t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 + \dots + t_k \mathbf{v}_n) = t_1 f(\mathbf{v}_1) + t_2 f(\mathbf{v}_2) + \dots + t_k f(\mathbf{v}_n).$$

Toto jednoduché pozorování má důležitý důsledek, že lineární zobrazení je jednoznačně určené obrazy prvků libovolné báze. Tvrzení formulujeme pro konečně generované prostory, zobecnění necháme do cvičení.

Tvrzení 7.4. *Nechť \mathbf{V} a \mathbf{W} jsou vektorové prostory nad tělesem \mathbf{T} , $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ je báze \mathbf{V} a $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n \in W$ jsou libovolné vektory. Pak existuje právě jedno lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ splňující $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Důkaz. Předpokládejme, že f je lineární zobrazení splňující $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$. Každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ lze zapsat jediným způsobem jako lineární kombinaci $\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \dots + t_n\mathbf{v}_n$ (jinými slovy, $[\mathbf{x}]_B = (t_1, t_2, \dots, t_n)$) a pak podle výše uvedeného vztahu platí

$$f(\mathbf{x}) = t_1\mathbf{w}_1 + t_2\mathbf{w}_2 + \dots + t_n\mathbf{w}_n$$

To dokazuje jednoznačnost.

Na druhou stranu je potřeba ověřit, že zobrazení f definované tímto předpisem je lineární a splňuje $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, a tím bude dokázána existence. Vztah $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ necháme k ověření čtenáři. K důkazu linearity uvažujme vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, jejichž vyjádření vzhledem k B jsou

$$[\mathbf{x}]_B = (t_1, t_2, \dots, t_n)^T, \quad [\mathbf{y}]_B = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T .$$

Pak $[\mathbf{x} + \mathbf{y}]_B = (t_1 + s_1, t_2 + s_2, \dots, t_n + s_n)^T$ (viz tvrzení 5.64 o souřadnicích a operacích) a tedy

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= (t_1 + s_1)\mathbf{w}_1 + (t_2 + s_2)\mathbf{w}_2 + \dots + (t_n + s_n)\mathbf{w}_n \\ &= t_1\mathbf{w}_1 + t_2\mathbf{w}_2 + \dots + t_n\mathbf{w}_n + s_1\mathbf{w}_1 + s_2\mathbf{w}_2 + \dots + s_n\mathbf{w}_n \\ &= f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) . \end{aligned}$$

Podobně se ukáže zachování násobení skalárem. \square

Tvrzení nám dává geometrickou představu lineárních zobrazení: podíváme se na obrazy prvků nějaké báze, obrazy zbylých vektorů jsou určeny linearitou. Na obrázku je znázorněné lineární zobrazení z prostoru dimenze 2 s bází (\mathbf{u}, \mathbf{v}) , obraz vektoru $-\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ a obraz komplikovanějšího útvaru.

OBRÁZEK

Algebraickým důsledkem je, že každé lineární zobrazení je „určené“ maticí. Než zformulujeme příslušné definice a tvrzení obecněji, ukážeme, že každé lineární zobrazení f z \mathbf{T}^n do \mathbf{T}^m je rovno f_A pro jistou (jednoznačně určenou) matici A nad \mathbf{T} typu $m \times n$. Skutečně, pro libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ platí

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1f(\mathbf{e}_1) + x_2f(\mathbf{e}_2) + \dots + x_nf(\mathbf{e}_n) ,$$

což lze maticově zapsat jako

$$f(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{e}_1)|f(\mathbf{e}_2)|\dots|f(\mathbf{e}_n))\mathbf{x} ,$$

takže stačí položit $A = (f(\mathbf{e}_1)|f(\mathbf{e}_2)|\dots|f(\mathbf{e}_n))$ a máme $f = f_A$. Matice A je určena jednoznačně, protože i -tý sloupec musí být f -obrazem i -tého vektoru kanonické báze.

Lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, kde \mathbf{V}, \mathbf{W} jsou konečně generované, můžeme obdobně popsat maticově, počítáme-li v prostorech \mathbf{V} a \mathbf{W} vzhledem ke zvoleným bázím B a C . Konkrétně, existuje (jednoznačně určená) matice A typu $\dim(\mathbf{W}) \times \dim(\mathbf{V})$ taková, že

$$[f(\mathbf{x})]_C = A[\mathbf{x}]_B$$

pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$. Této matici říkáme matice f vzhledem k B a C . Odvození, jak tato matice vypadá, se udělá podobně jako výše.

Definice 7.5. Nechť \mathbf{V}, \mathbf{W} jsou konečně generované vektorové prostory nad tělesem \mathbf{T} , $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ je báze \mathbf{V} a C je báze \mathbf{W} . Maticí lineárního zobrazení f vzhledem k bázím B a C rozumíme matici

$$[f]_C^B = ([f(\mathbf{v}_1)]_C | [f(\mathbf{v}_2)]_C | \dots | [f(\mathbf{v}_n)]_C)$$

V matici f vzhledem k B a C je tedy i -tý sloupec roven souřadnicím obrazu i -tého vektoru báze B v bázi C . Matice je typu $\dim(\mathbf{W}) \times \dim(\mathbf{V})$.

Tvrzení 7.6. *Jsou-li \mathbf{V}, \mathbf{W} konečně generované vektorové prostory nad tělesem \mathbf{T} , B báze \mathbf{V} , C báze \mathbf{W} a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, pak pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ platí*

$$[f(\mathbf{x})]_C = [f]_C^B [\mathbf{x}]_B .$$

Důkaz. Pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ s vyjádřením $[\mathbf{x}]_B = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ vzhledem k bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ platí

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_n \mathbf{v}_n) = x_1 f(\mathbf{v}_1) + x_2 f(\mathbf{v}_2) + \dots + x_n f(\mathbf{v}_n) ,$$

pro vyjádření vzhledem k bázi C pak podle tvrzení 5.64 o souřadnicích a operacích platí

$$[f(\mathbf{x})]_C = x_1 [f(\mathbf{v}_1)]_C + x_2 [f(\mathbf{v}_2)]_C + \dots + x_n [f(\mathbf{v}_n)]_C ,$$

což se maticově přepíše

$$[f(\mathbf{x})]_C = ([f(\mathbf{v}_1)]_C | [f(\mathbf{v}_2)]_C | \dots | [f(\mathbf{v}_n)]_C) (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = [f]_C^B [\mathbf{x}]_B .$$

□

Sami si rozmyslete, že $[f]_C^B$ je jediná matice splňující rovnost $[f(\mathbf{x})]_C = [f]_C^B [\mathbf{x}]_B$.

Matice lineárního zobrazení $f_A : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^m$ vzhledem ke kanonickým bázím je původní matice A , tj.

$$[f_A]_{K_m}^{K_n} = A,$$

kde K_i značí kanonickou bázi \mathbf{T}^i .

Příklad 7.7. Uvažujme zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ dané předpisem

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 4x_1 + 2x_3 \end{pmatrix} .$$

Vztah lze maticově zapsat

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

Z toho vidíme, že $f = f_A$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} ,$$

takže f je lineární zobrazení a podle předchozí poznámky $[f]_{K_2}^{K_3} = A$.

Určíme matici f vzhledem k bázím B a C , kde

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \quad \text{a} \quad C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) .$$

K tomu dosazením spočítáme obrazy vektorů v bázi B :

$$f(1, 1, 2)^T = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2, 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2)^T = (2, 3)^T$$

$$f(2, 2, 0)^T = (2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0, 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0)^T = (0, 3)^T$$

$$f(3, 4, 4)^T = (2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 4, 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4)^T = (2, 0)^T$$

a obrazy vyjádříme v bázi C tím, že vyřešíme tři soustavy rovnic se stejnou maticí zároveň.

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

Zpětnou substitucí dostáváme $[(2, 3)^T]_C = (1, 2)^T$, $[(0, 3)^T]_C = (3, 4)^T$, $[(2, 0)^T]_C = (3, 3)^T$ (toto je dobré ověřit zkouškou, např. $(2, 3)^T = 1 \cdot (1, 2)^T + 2 \cdot (3, 3)^T$, takže souřadnice vektoru $(2, 3)^T$ vzhledem k C jsou spočteny správně). Matice f vzhledem k B a C je

$$[f]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ověříme vztah $[f(\mathbf{x})]_C = [f]_C^B[\mathbf{x}]_B$ pro vektor $[\mathbf{x}]_B = (1, 2, 3)^T$, tj.

$$\mathbf{x} = 1 \cdot (1, 1, 2)^T + 2 \cdot (2, 2, 0)^T + 3 \cdot (3, 4, 4)^T = (4, 2, 4)^T.$$

Obraz tohoto vektoru je podle definice

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Podle $[f(\mathbf{x})]_C = [f]_C^B[\mathbf{x}]_B$ musí také platit

$$[f(\mathbf{x})]_C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

což odpovídá, protože $1 \cdot (1, 2)^T + 4 \cdot (3, 3)^T = (3, 4)^T$, takže skutečně $[(3, 4)^T]_C = (1, 4)^T$.

Příklad 7.8. S nabytými znalostmi můžeme nyní rychleji určovat matice některých lineárních zobrazení. Budeme hledat matici A , aby příslušné zobrazení f_A byla rotace o α . V novější terminologii, hledáme matici rotace f v \mathbb{R}^2 o úhel α vzhledem ke kanonickým bázím. K tomu stačí určit obrazy prvků kanonické báze a napsat je do sloupců. Máme

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix},$$

tedy

$$A = [f]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Srovnajte tento výpočet s odvozením v části 4.2.1.

Příklad 7.9. Uvažujme zrcadlení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ podle přímky p procházející počátkem se směrem $(2, 5)^T$. K nalezení matice f vzhledem ke kanonickým bázím, bychom potřebovali nalézt obrazy vektorů kanonické báze, což vyžaduje netriviální výpočet. Je ale snadné určit obrazy vektorů vhodně zvolené báze, například $B = ((2, 5)^T, (-5, 2)^T)$. Máme totiž $f(2, 5)^T = (2, 5)^T$, protože tento vektor $(2, 5)^T$ leží na přímce p , a $f(-5, 2)^T = (5, -2)^T$, protože vektor $(-5, 2)^T$ je kolmý na p . Matice f vzhledem k B a K_2 je tedy

$$[f]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Zanedlouho si ukážeme, jak z nalezené matice určit matici f vzhledem k jakýmkoliv jiným bázím, například kanonickým.

Příklad 7.10. Určíme matici derivace chápané jako lineární zobrazení f z prostoru polynomů stupně nejvýše 3 do stejného prostoru vzhledem k bázím $B = (1, x, x^2, x^3)$ a stejné bázi B . K tomu stačí vypočítat vyjádření f -obrazů prvků B vzhledem k bázi B :

$$\begin{aligned} [1']_B &= [0]_B = (0, 0, 0, 0)^T \\ [x']_B &= [1]_B = (1, 0, 0, 0)^T \\ [(x^2)']_B &= [2x]_B = (0, 2, 0, 0)^T \\ [(x^3)']_B &= [3x^2]_B = (0, 0, 3, 0)^T \end{aligned}$$

Hledaná matice je

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matici identity vzhledem k bázím B a C nazýváme maticí přechodu od B k C , protože nám umožňuje rychle počítat souřadnice vektoru vzhledem k C ze souřadnic vzhledem k B .

Definice 7.11. Necht \mathbf{V} je konečně generovaný prostor a B, C jsou jeho báze. Maticí přechodu od B k C rozumíme matici id_V vzhledem k bázím B a C , tj. matici $[\text{id}_V]_C^B$.

V matici přechodu od B k C je tedy čtvercová matice řádu $\dim(\mathbf{V})$, který má v i -tém sloupci vyjádření i -tého vektoru báze B vzhledem k bázi C .

Tvrzení 7.12. Je-li \mathbf{V} konečně generovaný prostor a B, C jeho báze, pak pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in V$ platí

$$[\mathbf{x}]_C = [\text{id}_V]_C^B [\mathbf{x}]_B.$$

Důkaz. Tvrzení je okamžitým důsledkem tvrzení 7.6. □

Index V budeme většinou vynechávat, tedy píšeme pouze $[\text{id}]_C^B$.

V aritmetických prostorech je snadné určit matici přechodu od dané k báze ke kanonické. To odpovídá skutečnosti, že souřadnice vzhledem ke kanonické bázi se určí snadno ze souřadnic vzhledem k dané bázi (ale ne naopak).

Příklad 7.13. Matice přechodu od báze $B = ((1, 2, 3)^T, (6, 7, 8)^T, (\pi, \pi, 10)^T)$ ke kanonické bázi prostoru \mathbb{R}^3 je

$$[\text{id}]_{K_3}^B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & \pi \\ 2 & 7 & \pi \\ 3 & 8 & 10 \end{pmatrix},$$

protože vyjádření i -tého vektoru báze B v kanonické bázi je ten samý vektor.

Příklad 7.14. Matice přechodu od B k B je vždy identická matice, protože vyjádření i -tého vektoru báze B vzhledem k bázi B je \mathbf{e}_i .

7.3. Operace s lineárními zobrazeními. Lineární zobrazení a matice spolu úzce souvisí, proto není překvapivé, že s lineárními zobrazeními můžeme provádět podobné operace jako s maticemi: můžeme je násobit skalárem, sčítat, násobit (pro zobrazení tím myslíme skládat) a invertovat, samozřejmě jen za určitých podmínek. Přičemž operace s lineárními zobrazeními odpovídají při maticovém popisu příslušným operacím pro matice.

Tvrzení 7.15. *Nechť $\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}$ jsou vektorové prostory nad \mathbf{T} , B, C, D báze $\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}$, $f, g : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, $h : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{Z}$ a $t \in T$. Pak platí:*

- (1) *Zobrazení tf definované vztahem*

$$(tf)(\mathbf{x}) = t \cdot f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V$$

je lineární zobrazení $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ a platí

$$[tf]_C^B = t[f]_C^B .$$

- (2) *Zobrazení $f + g$ definované vztahem*

$$(f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V$$

je lineární zobrazení $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ a platí

$$[f + g]_C^B = [f]_C^B + [g]_C^B .$$

- (3) *Složené zobrazení hg je lineární zobrazení $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{Z}$ a platí*

$$[hg]_D^B = [h]_D^C [g]_C^B .$$

- (4) *Je-li f bijekce, pak zobrazení f^{-1} je lineární zobrazení $\mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$ a platí*

$$[f^{-1}]_B^C = ([f]_C^B)^{-1} .$$

Důkaz. Pro ověření linearitu vezmeme libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a skalár $s \in T$.

- (1) Je třeba ověřit, že $(tf)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (tf)(\mathbf{u}) + (tf)(\mathbf{v})$ a $(tf)(s\mathbf{u}) = s(tf)(\mathbf{u})$. Obojí je snadný výpočet.
- (2) Je třeba ověřit, že $(f + g)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (f + g)(\mathbf{u}) + (f + g)(\mathbf{v})$ a $(f + g)(s\mathbf{u}) = s(f + g)(\mathbf{u})$. Obojí je snadný výpočet.
- (3) Zde musíme ověřit, že $(hg)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (hg)(\mathbf{u}) + (hg)(\mathbf{v})$ a $(hg)(s\mathbf{u}) = s(hg)(\mathbf{u})$. Opět snadné.
- (4) V tomto případě ověřujeme $f^{-1}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f^{-1}(\mathbf{u}) + f^{-1}(\mathbf{v})$ a $f^{-1}(s\mathbf{u}) = sf^{-1}(\mathbf{u})$. Toto vyžaduje drobný trik, podíváme se na první rovnost. Protože f je bijekce, rovnost platí právě tehdy, když platí rovnost $f(f^{-1}(\mathbf{u} + \mathbf{v})) = f(f^{-1}(\mathbf{u}) + f^{-1}(\mathbf{v}))$, tuto novou rovnost již ověříme snadno z linearitu f .

Důkaz, že matice zobrazení jsou uvedeny správně můžeme provést v bodech (1),(2) a (3) tak, že zkontrolujeme rovnost v tvrzení 7.6. Opět pouze vypíšeme ověřované rovnosti a jednoduchý výpočet přenecháme čtenáři.

- (1) $[(tf)(\mathbf{x})]_C = (t[f]_C^B)[\mathbf{x}]_B$
- (2) $[(f + g)(\mathbf{x})]_C = ([f]_C^B + [g]_C^B)[\mathbf{x}]_B$
- (3) $[(hg)(\mathbf{x})]_D = ([h]_D^C [g]_C^B)[\mathbf{x}]_B$

U bodu (4) můžeme využít předchozí bod: podle (3) platí $[f^{-1}]_B^C [f]_C^B = [ff^{-1}]_B^B = [\text{id}]_B^B = I_n$, takže skutečně $[f^{-1}]_B^C = ([f]_C^B)^{-1}$. \square

Ukážeme si použití pravidel (3) a (4) na početních příkladech.

Příklad 7.16. Určíme matici přechodu od kanonické báze prostoru \mathbb{R}^2 k bázi $B = ((2, 5)^T, (-5, 2)^T)$. Matici přechodu od B ke kanonické bázi určíme snadno.

$$[\text{id}]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Využijeme $\text{id}^{-1} = \text{id}$ a (4):

$$[\text{id}]_B^{K_2} = [\text{id}^{-1}]_B^{K_2} = ([\text{id}]_{K_2}^B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matici jsme spočítali pomocí adjungované matice (viz příklad 6.39).

Nalezenou matici přechodu můžeme použít k výpočtu matice zrcadlení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ podle přímky p procházející počátkem se směrem $(2, 5)^T$ vzhledem ke kanonickým bázím. V příkladu 7.9 jsme nahlédli, že matice f vzhledem k B a kanonické bázi je

$$[f]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pomocí (4) nyní můžeme spočítat matici f vzhledem ke kanonickým bázím:

$$[f]_{K_2}^{K_2} = [f]_{K_2}^B [\text{id}]_B^{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} -21 & 20 \\ 20 & 21 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7.17. V prostoru \mathbb{Z}_5^2 jsou dány báze $B = ((2, 4)^T, (3, 3)^T)$ a $C = ((1, 3)^T, (2, 4)^T)$. Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_5^2$ má vzhledem k bázi B souřadnice $[\mathbf{v}]_B = (x_1, x_2)^T$. Najdeme souřadnice vektoru \mathbf{v} vzhledem k bázi C .

K tomu určíme matici přechodu od B k C užitím (3) a (4):

$$\begin{aligned} [\text{id}]_C^B &= [\text{id}]_C^{K_2} [\text{id}]_{K_2}^B = ([\text{id}]_{K_2}^C)^{-1} [\text{id}]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Souřadnice \mathbf{v} vzhledem k C jsou

$$[\mathbf{v}]_C = [\text{id}]_C^B [\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}.$$

Výsledek ještě můžeme ověřit například volbou $(x_1, x_2)^T = (1, 0)^T$. Je $[\mathbf{v}]_B = (1, 0)^T$, takže $\mathbf{v} = (2, 4)^T$. Podle odvozeného vzorce by mělo platit $[\mathbf{v}]_C = (0, 1)^T$ a skutečně $(2, 4)^T = 0 \cdot (1, 3)^T + 1 \cdot (2, 4)^T$. K nabytí úplné jistoty bychom mohli ještě ověřit pro $(x_1, x_2)^T = (0, 1)^T$.

Příklad 7.18. V příkladu 7.7 jsme určili matici lineárního zobrazení $f: \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ daného předpisem

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 4x_1 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázím B a C , kde

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \quad \text{a} \quad C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Spočítáme tuto matici jiným postupem. Ze zadání můžeme přímo určit $[f]_{K_2}^{K_3}$, $[\text{id}]_{K_3}^B$ a $[\text{id}]_{K_2}^C$, pomocí těchto matic lze spočítat $[f]_C^B$ užitím (3) a (4):

$$\begin{aligned} [f]_C^B &= [\text{id}]_C^{K_2} [f]_{K_2}^{K_3} [\text{id}]_{K_3}^B = ([\text{id}]_{K_2}^C)^{-1} [f]_{K_2}^{K_3} [\text{id}]_{K_3}^B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7.4. Jádru, obraz. Následující definice zavádí terminologii pro různé typy lineárních zobrazení.

Definice 7.19. Nechť \mathbf{V} , \mathbf{W} jsou vektorové prostory nad tělesem \mathbf{T} a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení.

- Pokud f je prosté, říkáme, že f je *monomorfismus*.
- Pokud f je na, říkáme, že f je *epimorfismus*.
- Pokud f je bijekce, říkáme, že f je *izomorfismus*.
- Pokud $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, říkáme, že f je *endomorfismus* prostoru \mathbf{V} (též *lineární operátor* na \mathbf{V}).
- Pokud $\mathbf{W} = \mathbf{T}$, říkáme, že f je *lineární forma* na \mathbf{V} .
- Pokud f je izomorfismus a endomorfismus, říkáme, že f je *automorfismus*.

Příklad 7.20. Rotace a osové souměrnosti jsou automorfismy $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Zobrazení přiřazující vektoru z \mathbf{V} souřadnice ve zvolené bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je izomorfismus z \mathbf{V} do \mathbf{T}^n .

Zobrazení přiřazující vektoru z \mathbb{R}^3 jeho orientovanou vzdálenost od zvolené roviny procházející počátkem je lineární forma na \mathbb{R}^3 , je to epimorfismus, který není monomorfismus.

Projekce na rovinu procházející počátkem (chápaná jako zobrazení $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) je endomorfismus, který není ani epimorfismus ani monomorfismus.

Zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definované vztahem $f(x_1, x_2)^T = (x_1, x_2, 0)^T$ (vlození roviny do \mathbb{R}^3) je monomorfismus a není to epimorfismus.

Jako defekt prostoty zavedeme jádro lineárního zobrazení.

Definice 7.21. Nechť $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. *Jádrem* f rozumíme množinu

$$\text{Ker } f = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V} : f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\}.$$

Snadno se dokáže, že $\text{Ker } f$ je podprostorem \mathbf{V} (viz následující tvrzení). Tento podprostor díky linearitě přesně určuje, které dvojice vektorů se zobrazí na stejný vektor: $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$ platí právě tehdy, když $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \text{Ker } f$ (viz cvičení). To je ilustrováno na obrázku níže, kde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je projekce na přímku p podél roviny U .

OBRAZEK

Z ekvivalence $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) \Leftrightarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} \in \text{Ker } f$ je také vidět, že f je monomorfismus právě tehdy, když $\text{Ker } f = \{\mathbf{o}\}$.

Obraz i jádro lineárního zobrazení určíme snadno z jeho libovolné matice – v příslušných bázích je to sloupcový prostor resp. jádro této matice. Toho jsme si již dříve všimli pro zobrazení mezi aritmetickými prostory a jejich matici vzhledem ke kanonickým bázím.

Tvrzení 7.22. *Nechť \mathbf{V}, \mathbf{W} jsou konečně generované vektorové prostory, B je báze \mathbf{V} , C je báze \mathbf{W} a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Pak platí:*

- *Obraz f je podprostorem \mathbf{W} a platí*

$$[f(V)]_C = \text{Im } [f]_C^B.$$

Speciálně, f je epimorfismus právě tehdy, když $\text{rank}([f]_C^B) = \dim(\mathbf{W})$

- *Jádro f je podprostorem \mathbf{V} a platí*

$$[\text{Ker } f]_B = \text{Ker } [f]_C^B.$$

Speciálně, f je monomorfismus právě tehdy, když $\dim \text{Ker } [f]_C^B = 0$.

- *(věta o dimenzi jádra a obrazu)*

$$\dim(\text{Ker } f) + \dim(f(V)) = \dim(\mathbf{V}) .$$

Důkaz.

- *Obraz je zřejmě neprázdný. Ověříme uzavřenost na sčítání, uzavřenost na násobení skalárem se dokáže podobně. Jsou-li $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ v obrazu f , pak existují $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ takové, že $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ a $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Z linearity $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, takže v obrazu leží i součet $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$.*

Z tvrzení 7.6 o matici homomorfismu dostáváme

$$\begin{aligned} [f(V)]_C &= \{[f(\mathbf{v})]_C : \mathbf{v} \in V\} = \{[f]_C^B[\mathbf{v}]_B : \mathbf{v} \in V\} \\ &= \{[f]_C^B \mathbf{x} : \mathbf{x} \in T^{\dim(V)}\} = \text{Im } [f]_C^B . \end{aligned}$$

- *Jádro je neprázdné, protože obsahuje nulový vektor. Je uzavřené na sčítání, protože z $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Ker } f$ plyne $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, čili $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \text{Ker } f$, a podobně se ukáže uzavřenost na násobení skalárem.*

Použijeme opět vzorec pro matici homomorfismu:

$$\begin{aligned} [\text{Ker } f]_B &= \{[\mathbf{v}]_B : f(\mathbf{v}) = \mathbf{o}\} = \{[\mathbf{v}]_B : [f]_C^B[\mathbf{v}]_B = \mathbf{o}\} \\ &= \{[\mathbf{v}]_B : [f]_C^B[\mathbf{v}]_B = \mathbf{o}\} = \{\mathbf{x} \in T^{\dim(V)} : [f]_C^B \mathbf{x} = \mathbf{o}\} = \text{Ker } [f]_C^B \end{aligned}$$

- *Z předchozích bodů vyplývá, že dimenze obrazu f je rovná dimenzi sloupcového prostoru matice $[f]_C^B$ a dimenze jádra f je rovná dimenzi jádra $[f]_C^B$. Matice $[f]_C^B$ má $\dim(V)$ sloupců, takže tvrzení vyplývá z věty 5.83 o dimenzi jádra a obrazu pro matice.*

□

Příklad 7.23. Lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ máme dáno maticí vzhledem k bázím B a C :

$$B = \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right) \right), \quad C = \left(\left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right) \right),$$

$$A = [f]_C^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix} .$$

Určíme $\text{Ker } f$ a $f(\mathbb{R}^3)$.

Nejprve spočítáme $\text{Ker } A$ (tj. určíme nějakou bázi $\text{Ker } A$), tedy vyřešíme homogenní soustavu rovnic s maticí A .

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Báze $\text{Ker } A$ je například $(-1, 2, 0)^T, (3, 0, 2)^T$ (za parametry jsme volili $(2, 0)^T$ a $(0, 2)^T$, aby vycházela hezčí čísla). Takže

$$[\text{Ker } f]_B = \text{Ker } A = \left\langle \left(\begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right) \right\rangle,$$

z čehož dopočteme

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \left\langle -1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right) + 2 \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right), 3 \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right) + 2 \left(\begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\begin{array}{c} 3 \\ -2 \\ -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 9 \\ 12 \\ 9 \end{array} \right) \right\rangle = \left\langle \left(\begin{array}{c} 3 \\ -2 \\ -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 3 \end{array} \right) \right\rangle \end{aligned}$$

Nyní řádkovými úpravami určíme bázi $\text{Im } A$:

$$\left(\begin{array}{cc} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

Takže

$$[f(\mathbb{R}^3)]_C = \text{Im } A = \left\langle \left(\begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array} \right) \right\rangle$$

a

$$f(\mathbb{R}^3) = \left\langle 1 \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right) - 2 \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right) \right\rangle = \left\langle \left(\begin{array}{c} 5 \\ -1 \end{array} \right) \right\rangle$$

Dimenze jádra f je 2 a dimenze obrazu f je 1, což je v souladu s větou o dimenzi jádra a obrazu. Zobrazení f je znázorněné na obrázku

OBRAZEK

7.4.1. *Izomorfismus.* Krátce se ještě zastavíme u pojmu izomorfismu.

Předpokládejme, že \mathbf{V} a \mathbf{W} jsou konečně generované prostory a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je izomorfismus (předpoklad o konečné generovanosti lze vynechat, ale my jsme tvrzení v této kapitole formulovali jen pro takové prostory). Pak $\dim(f(\mathbf{V})) = \dim(\text{Im } f)$ a $\dim(\text{Ker } f) = 0$. Z věty o dimenzi jádra a obrazu dostáváme $\dim(\text{Im } f) = \dim(\mathbf{V})$. Naopak, mezi prostory stejné dimenze vždy existuje izomorfismus, stačí bázi jednoho prostoru zobrazit na bázi druhého prostoru:

Věta 7.24. *Nechť \mathbf{V} a \mathbf{W} jsou dva konečně generované prostory. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (1) *Existuje izomorfismus $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$.*
- (2) $\dim(\mathbf{V}) = \dim(\mathbf{W})$.

Důkaz. Implikace (1) \Rightarrow (2) byla dokázána před větou. Jiný důkaz je ve cvičeních.

Rozvedeme myšlenku důkazu druhé implikace. Zvolíme bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{V} a bázi $C = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$ prostoru \mathbf{W} a vezeme lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ splňující $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ (takové lineární zobrazení existuje podle tvrzení 7.4 o rozšiřování zobrazení definovaného na bázi na lineární zobrazení). Toto lineární zobrazení je izomorfismem například proto, že $[f]_C^B = I_n$, takže f je prosté i na podle tvrzení 7.22 o jádře a obrazu. \square

Izomorfismus je bijektivní zobrazení, které zachovává obě operace ve vektorovém prostoru. Izomorfní prostory (tedy prostory, mezi kterými existuje izomorfismus) jsou tedy „v podstatě“ stejné, liší se jenom přejmenováním vektorů. Ještě trochu jinak řečeno, vektory v izomorfních prostorech mohou „vypadat“ jinak, ale „chovají se“ naprosto stejně. Předchozí tvrzení vlastně znova formuluje skutečnost, že vektorový prostor nad daným tělesem dané dimenze je „v podstatě“ jen jeden (např. \mathbf{T}^n).

Jak poznáme, že lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je izomorfismus podle jeho matice vzhledem k nějakým bázím? Protože musí platit $\dim(V) = \dim(W)$, musí být čtvercová. Navíc (například z $\text{Ker } f = \{\mathbf{o}\}$) musí být tato matice regulární. A naopak, regulární matice je vždy maticí izomorfismu. Důkaz přenecháme jako cvičení, rovněž srovnajte s body (1)–(4) z charakterizační věty 4.30 regulárních matic.

Tvrzení 7.25. *Nechť \mathbf{V}, \mathbf{W} jsou vektorové prostory nad tělesem \mathbf{T} stejné, konečné dimenze, B je báze \mathbf{V} , C je báze \mathbf{W} a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Pak je ekvivalentní*

- (1) f je izomorfismus.
- (2) f je monomorfismus.
- (3) f je epimorfismus.
- (4) $[f]_C^B$ je regulární matice.

Cvičení

1. Zobecněte tvrzení 7.4 na případ nekonečné dimenze.
2. Dokažte, že matice $[f]_C^B$ v tvrzení 7.6 je jediná matice splňující rovnost $[f(\mathbf{x})]_C = [f]_C^B[\mathbf{x}]_B$.
3. Nechť $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Dokažte, že $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$ právě tehdy, když $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \text{Ker } f$.
4. Nechť $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení a B je báze \mathbf{V} . Dokažte, že f je monomorfismus právě tehdy, když obraz B je lineárně nezávislá posloupnost.
5. Nechť $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení a B je báze \mathbf{V} . Dokažte, že f je epimorfismus právě tehdy, když obraz B generuje \mathbf{W} .
6. Nechť $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení a B je báze \mathbf{V} . Dokažte, že f je izomorfismus právě tehdy, když obraz B je báze \mathbf{W} . To podává jiný důkaz implikace (1) \Rightarrow (2) ve větě 7.24.
7. Nechť \mathbf{V}, \mathbf{W} jsou konečně generované prostory nad tělesem \mathbf{T} . Ukažte, že množina všech lineárních zobrazení z \mathbf{V} do \mathbf{W} tvoří vektorový prostor izomorfní $\mathbf{T}^{\dim(\mathbf{W}) \times \dim(\mathbf{V})}$.
8. Dokažte 7.25.

8. SKALÁRNÍ SOUČIN

Cíl .

V abstraktním vektorovém prostoru nemáme metrické pojmy jako délka vektoru nebo úhel dvou vektorů. Tyto pojmy zavedeme přidáním skalárního součinu.

8.1. Standardní skalární součin v \mathbb{R}^n a \mathbb{C}^n .

8.1.1. \mathbb{R}^n . Podíváme se nejprve na standardní skalární součin \cdot v aritmetickém vektorovém prostoru \mathbb{R}^n . Pro dva vektory $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ v \mathbb{R}^n je definován vztahem

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n .$$

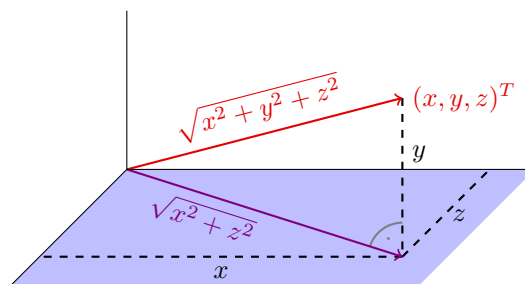
Pomocí standardního skalárního součinu můžeme vyjádřit eukleidovskou délku (též zvanou normu) vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} .$$

Délka vektoru $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ je podle vzorce

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} ,$$

což pro $n = 2$ a $n = 3$ vidíme z Pythagorovy věty (a pro $n = 1$ máme $\|\mathbf{u}\| = |x_1|$, což rovněž souhlasí).

OBRÁZEK 13. Eukleidovská norma v \mathbb{R}^3

Ze standardního skalárního součinu můžeme rovněž určit úhel α mezi vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} . Platí totiž

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha .$$

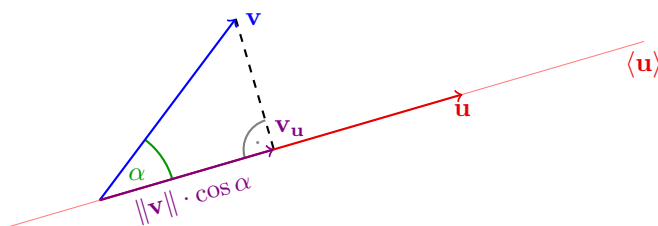
Přesvědčíme se o platnosti tohoto vztahu tak, že zapomeneme na chvíli na původní definici standardního skalárního součinu, místo toho budeme za definici považovat tento vztah a původní vzorec odvodíme. Při odvozování budeme používat geometrickou intuici, takže si budeme představovat situaci $n = 2$ nebo $n = 3$.

Nejprve si všimneme, že výraz je symetrický, tedy

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} ,$$

a že délka vektoru \mathbf{u} je rovná

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} .$$



OBRAZEK 14. Geometrický význam standardního skalárního součinu

Výraz $\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha$ můžeme chápat jako součin délky vektoru \mathbf{u} a délky ortogonální (kolmé) projekce $\mathbf{v}_{\mathbf{u}}$ vektoru \mathbf{v} na přímku $\langle \mathbf{u} \rangle$:

(Symetricky se na výraz můžeme dívat jako na součin délky \mathbf{v} a délky ortogonální projekce $\mathbf{u}_{\mathbf{v}}$.)

Z toho můžeme nahlédnout, že skalární součin je lineární v první proměnné, tj. pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ a $t \in \mathbb{R}$ platí

$$(t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}), \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} .$$

OBRAZEK

Ze symetrie nebo podobným odvozením získáme linearitu v druhé proměnné

$$\mathbf{u} \cdot (t\mathbf{v}) = t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}), \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} .$$

Vektory kanonické báze jsou na sebe kolmé a mají délku 1, takže

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = 0 \quad (i \neq j), \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1 .$$

Z odvozených vztahů dostaneme původní vzorec pro skalární součin $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ a $\mathbf{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. Pro přehlednost uvedeme nejprve odvození v případě $n = 2$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2) \cdot (y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2) \\ &= (x_1 \mathbf{e}_1) \cdot (y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2) + (x_2 \mathbf{e}_2) \cdot (y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2) \\ &= (x_1 \mathbf{e}_1) \cdot (y_1 \mathbf{e}_1) + (x_1 \mathbf{e}_1) \cdot (y_2 \mathbf{e}_2) + (x_2 \mathbf{e}_2) \cdot (y_1 \mathbf{e}_1) + (x_2 \mathbf{e}_2) \cdot (y_2 \mathbf{e}_2) \\ &= x_1 y_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) + x_1 y_2 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + x_2 y_1 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1) + x_2 y_2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{aligned}$$

Obdobně v obecném případě:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i \mathbf{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i \mathbf{e}_i) \cdot (y_j \mathbf{e}_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

Všimněte si, že odvození probíhalo podobně jako odvození vzorce pro determinant: Ukázali jsme linearitu ve všech proměnných a všimli jsme si, jak skalární součin (determinant) vypadá na kanonické bázi.

8.1.2. \mathbb{C}^n . Nad komplexními čísly je standardní skalární součin vektorů $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ a $\mathbf{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ definován trochu jiným vzorcem:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \dots + \overline{x_n}y_n ,$$

kde \overline{x} značí číslo komplexně sdružené k x , tj. $\overline{a + bi} = a - bi$. Pro reálné vektory tato definice souhlasí s předchozí, protože komplexní sdružování s reálnými čísly nic nedělá.

Výhodou takové definice je třeba to, že skalární součin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ je vždy kladné reálné číslo (je součtem druhých mocnin absolutních hodnot složek), takže délka definovaná vztahem $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ je reálné číslo, které je nulové právě tehdy, když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$. (Pokud bychom definovali skalární součin bez komplexního sdružování, výraz $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ by nebyl vždy reálný a byl by roven nule i pro některé nenulové vektory.)

V reálném případě můžeme standardní skalární součin definovat maticovým součinem $\mathbf{u}^T \mathbf{v}$. Abychom mohli maticově zapsat standardní skalární součin nad komplexními čísly, zavedeme pojem hermitovskey sdružené matice.

Definice 8.1. Hermitovskey sdružená matice k matici $A = (a_{ij})_{m \times n}$ je matice $A^* = (b_{ji})_{n \times m}$, kde $b_{ji} = \overline{a_{ij}}$ pro libovolné indexy $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Hermitovskey sdruženou matici k A tedy dostaneme transponováním a nahrazením všech prvků prvky komplexně sdruženými. Hermitovské sdružování se chová k ostatním operacím podobně jako transponování, viz cvičení.

Příklad 8.2.

$$\begin{pmatrix} 1+2i & 3 & i \\ 0 & 3-2i & 4i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1-2i & 0 \\ 3 & 3+2i \\ -i & -4i \end{pmatrix}$$

S tímto značením můžeme psát

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^* \mathbf{v}$$

Standardní skalární součin nad komplexními čísly je stále lineární v druhé proměnné a platí $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, ale není lineární v první proměnné a není symetrický. Místo toho máme pro $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ a $t \in \mathbb{C}$ vztahy

$$(t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \overline{t}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} .$$

8.2. Obecný skalární součin. Obecně definujeme skalární součin jako zobrazení přiřazující dvojici vektorů skalár, které má podobné vlastnosti jako standardní skalární součin. Skalární součin vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} budeme značit $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$, značení $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ budeme používat pouze pro standardního skalární součin v \mathbb{R}^n nebo \mathbb{C}^n . Skalární součin se definuje **pouze pro vektorové prostory nad tělesem \mathbb{R} nebo \mathbb{C}** .

Definice 8.3. Nechť V je vektorový prostor nad \mathbb{R} (resp. nad \mathbb{C}). Zobrazení $\langle | \rangle$ z $V \times V$ do \mathbb{R} (resp do \mathbb{C}), které dvojici \mathbf{u}, \mathbf{v} přiřadí vektor $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$, se nazývá *skalární součin*, pokud pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a $t \in \mathbb{R}$ (resp. $t \in \mathbb{C}$) platí

$$(SL1) \quad \langle t\mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \overline{t} \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle, \quad \langle \mathbf{u} | t\mathbf{v} \rangle = t \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle,$$

$$(SL2) \quad \langle \mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle, \quad \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle,$$

$$(SCS) \quad \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle = \overline{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle} \text{ a}$$

$$(SP) \quad \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle \text{ je nezáporné reálné číslo, které je nulové právě tehdy, když } \mathbf{u} = \mathbf{o}.$$

Axiomy nejsou nezávislé, například druhé části axiomů linearity (SL1) a (SL2) vyplývají ze zbylých axiomů. Z axiomu (SL1) plyne, že $\langle \mathbf{u} | \mathbf{o} \rangle = \langle \mathbf{o} | \mathbf{u} \rangle = 0$. V případě reálných vektorových prostorů můžeme v axiomech (SL1) a (SCS) vynechat komplexní sdružení.

8.2.1. Příklady.

- Standardní skalární součin v \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n) je skalárním součinem v \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n). Všechny vlastnosti se ověří snadno z definice.
- Je-li A čtvercová matice nad \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}), pak zobrazení z $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$) definované vztahem

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \mathbf{A} \mathbf{v}$$

vždy splňuje (SL1) a (SL2) (cvičení). Vlastnost (SCS) je splněna právě tehdy, když $A^* = A$ (cvičení). V reálném případě to znamená, že A je symetrická, v komplexním případě se maticím splňujícím $A^* = A$ říká *hermitovské*. Hermitovským maticím, pro které takto definované zobrazení splňuje i (SP) se říká pozitivně definitní.

Definice 8.4. Hermitovská matice A řádu n se nazývá *pozitivně definitní*, pokud $\mathbf{u}^* \mathbf{A} \mathbf{u}$ je pro libovolné $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ nezáporné reálné číslo, které je nulové právě když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$.

Příkladem pozitivně definitních matic (viz cvičení) jsou matice typu $A = B^* B$, kde B je regulární matice řádu n nad \mathbb{R} (resp. nad \mathbb{C}). Později ukážeme, že platí i opak, tj. každá pozitivně definitní matice A je tvaru $A = B^* B$, pro regulární matici B . Dokonce každý skalární součin na \mathbb{R}^n (a na \mathbb{C}^n) je tohoto tvaru.

Shrnutí: Je-li $A = B^* B$, pak zobrazení definované $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \mathbf{A} \mathbf{v}$ je skalární součin. Pro $A = I_n$ dostáváme standardní skalární součin. Jako ukázkou jiného konkrétního příkladu vezmeme

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

tedy

$$A = B^* B = B^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příslušný skalární součin v \mathbb{C}^n je dán vztahem

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = (\overline{x_1}, \overline{x_2}) \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 5\overline{x_1}y_1 - 2\overline{x_1}y_2 - 2\overline{x_2}y_1 + \overline{x_2}y_2$$

kde $\mathbf{u} = (x_1, x_2)^T$ a $\mathbf{v} = (y_1, y_2)^T$. Stejný vztah (kde nemusíme komplexně sdružovat) definuje skalární součin v \mathbb{R}^n .

- Na prostoru spojitých reálných (nebo komplexních) funkcí na intervalu $\langle 1, 10 \rangle$ je

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \int_1^{10} \overline{\mathbf{u}} \mathbf{v}$$

skalární součin. Obecněji například

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \int_1^{10} \overline{\mathbf{u}} \mathbf{v} \mathbf{w},$$

kde \mathbf{w} je nějaká kladná váhová funkce.

8.2.2. *Norma.* Normu vektoru v prostoru se skalárním součinem zavedeme stejným vztahem jakým jsme vyjádřili eukleidovskou normu (délku) pomocí standardního skalárního součinu.

Definice 8.5. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$. Normou vektoru $\mathbf{v} \in V$ rozumíme reálné číslo

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle} .$$

Vektor \mathbf{u} se nazývá *jednotkový*, pokud $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Definice dává smysl, protože výraz pod odmocninou je podle (SP) vždy nezáporné reálné číslo. Norma závisí na skalárním součinu, takže když používáme symbol normy, musí být z kontextu jasné, se kterým skalárním součinem pracujeme. Podobně i pro další pojmy jako úhel nebo kolmost, které budou zavedeny později.

Příklad 8.6. Norma vektoru $(1 + i, 2, 3 - 2i)^T$ v prostoru \mathbb{C}^3 se standardním skalárním součinem je

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 + i \\ 2 \\ 3 - 2i \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 - i \\ 2 \\ 3 + 2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 + i \\ 2 \\ 3 - 2i \end{pmatrix}} = \sqrt{|1 + i|^2 + |2|^2 + |3 + 2i|^2} = \sqrt{17} .$$

Norma určená skalárním součinem má následující vlastnosti.

Tvrzení 8.7. Nechť V je vektorový prostor nad \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) se skalárním součinem $\langle | \rangle$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a $t \in \mathbb{R}$ (resp. $t \in \mathbb{C}$). Pak platí

- (1) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, přičemž $\|\mathbf{u}\| = 0$ právě tehdy, když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$.
- (2) $\|t\mathbf{u}\| = |t| \|\mathbf{u}\|$.
- (3) (Rovnoběžníkové pravidlo.) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$.
- (4) (Polarizační identita.) $\operatorname{Re}(\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2)$, kde $\operatorname{Re}(x)$ značí reálnou část x .

Důkaz.

- (1) Snadný důsledek (SP).
- (2) Použitím (SL1) dostáváme

$$\|t\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle t\mathbf{u} | t\mathbf{u} \rangle} = \sqrt{t\bar{t}\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle} = \sqrt{|t|^2\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle} = |t|\sqrt{\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle} = |t| \|\mathbf{u}\| .$$

- (3) Ve výpočtu stačí použít (SL2).

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} - \mathbf{v} | \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle \\ &= 2\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned}$$

- (4) Ze (SL2) a (SCS) vypočteme

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \overline{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle} .$$

Protože $x + \bar{x} = 2\operatorname{Re}(x)$, dostáváme

$$2\operatorname{Re}(\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle) = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 .$$

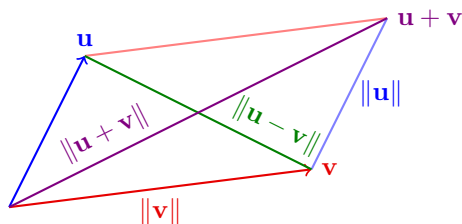
□

Důsledkem (1) a (2) je, že pro nenulový vektor \mathbf{u} je jeho násobek

$$\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$$

jednotkový vektor. Říkáme, že $\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$ vznikl z \mathbf{u} *znormováním*.

Rovnoběžníkové pravidlo je ilustrováno na obrázku.



OBRÁZEK 15. Rovnoběžníkové pravidlo

Polarizační identita vyjadřuje reálnou část skalárního součinu pouze pomocí normy. Podobný vztah jde napsat i pro imaginární část (pokud pracujeme v prostoru nad \mathbb{C}), viz cvičení. Skalární součin je tedy určen normou. Různé další varianty polarizační identity jsou ve cvičeních.

8.2.3. Cauchy-Schwarzova nerovnost, úhel. Pro vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ jsme nahlédli, že $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$. Z toho také vyplývá, že absolutní hodnota $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|$ nemůže být větší než součin norm $\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$, protože kosinus úhlu je vždy v intervalu $(-1, 1)$.

Vztah $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$ jde naopak použít pro zavedení úhlu mezi dvěma vektory v libovolném prostoru se skalárním součinem. Aby byl úhel dobře definován, musíme dokázat, že obecně platí $|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$. Tato nerovnost se nazývá Cauchy-Schwarzova nerovnost (též Bunjakovského nerovnost, nebo Cauchy-Schwarzova-Bunjakovského nerovnost, apod.) a je asi jednou z nejdůležitějších nerovností v matematice.

Věta 8.8 (Cauchy-Schwarzova nerovnost). *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Pak platí*

$$|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad ,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když (\mathbf{u}, \mathbf{v}) je lineárně závislá posloupnost.

Důkaz. Pokud je posloupnost (\mathbf{u}, \mathbf{v}) lineárně závislá, pak $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$ nebo $\mathbf{v} = t\mathbf{u}$ pro nějaké $t \in \mathbb{C}$. V prvním případě je

$$|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| = |\langle t\mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle| = |\bar{t} \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle| = |t| \|\mathbf{v}\|^2$$

a

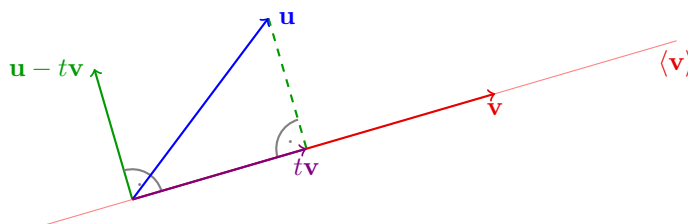
$$\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| = \|t\mathbf{v}\| \|\mathbf{v}\| = |t| \|\mathbf{v}\|^2 \quad .$$

V případě $\mathbf{v} = t\mathbf{u}$ se rovnost odvodí podobně.

Předpokládejme, že (\mathbf{u}, \mathbf{v}) je lineárně nezávislá posloupnost a odvodíme ostrou nerovnost. Díky lineární nezávislosti pro libovolné $t \in \mathbb{C}$ platí

$$0 < \|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|^2 \quad .$$

Zvolíme $t \in \mathbb{C}$ tak, aby platilo $\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = 0$. Geometrický význam v případě standardního skalárního součinu v \mathbb{R}^n je vyznačen na obrázku: vektor $t\mathbf{v}$ je ortogonální projekcí vektoru \mathbf{u} na $\langle \mathbf{v} \rangle$. Později dáme této intuici přesný význam pro obecný skalární součin.



OBRÁZEK 16. K důkazu Cauchy-Schwarzovy nerovnosti

Vztah $\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = 0$ je ekvivalentní $\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle - t \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle = 0$, což je ekvivalentní

$$t = \frac{\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$

(Nulou nedělíme, protože vektor \mathbf{v} je nenulový podle předpokladu o lineární nezávislosti (\mathbf{u}, \mathbf{v}) .)

Při této volbě t dostáváme

$$\begin{aligned} 0 < \|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} - t\mathbf{v} | \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle - \bar{t} \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle - t \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{\overline{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle} \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} = \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \end{aligned}$$

Po vynásobení $\|\mathbf{v}\|^2$, drobné úpravě a odmocnění (oba výrazy, z nichž se počítá druhá mocnina jsou kladné) vyjde dokazovaná nerovnost:

$$\begin{aligned} 0 < \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \\ 0 < \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - |\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle|^2 \\ |\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle|^2 < \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \\ |\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| < \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \end{aligned}$$

□

Příklad 8.9. Pro standardní skalární součin v \mathbb{C}^n říká Cauchy-Schwarzova nerovnost

$$|\bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \dots + \bar{x}_n y_n| \leq \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} \sqrt{|y_1|^2 + |y_2|^2 + \dots + |y_n|^2}.$$

V případě skalárního součinu na \mathbb{C}^2 daného vzorcem

$$\langle (x_1, x_2)^T | (y_1, y_2)^T \rangle = 5\bar{x}_1 y_1 - 2\bar{x}_1 y_2 - 2\bar{x}_2 y_1 + \bar{x}_2 y_2$$

dostáváme

$$\begin{aligned} &|5\bar{x}_1 y_1 - 2\bar{x}_1 y_2 - 2\bar{x}_2 y_1 + \bar{x}_2 y_2| \\ &\leq \sqrt{5|x_1|^2 - 4\operatorname{Re}(\bar{x}_1 x_2) + |x_2|^2} \sqrt{5|y_1|^2 - 4\operatorname{Re}(\bar{y}_1 y_2) + |y_2|^2}. \end{aligned}$$

Pro prostor spojitých komplexních funkcí na intervalu $\langle 1, 10 \rangle$ se skalárním součinem $\langle f | g \rangle = \int_1^{10} \bar{f}g$ je nerovnost

$$\left| \int_1^{10} \bar{f}g \right| \leq \sqrt{\int_1^{10} |f|^2} \sqrt{\int_1^{10} |g|^2}$$

Důležitým důsledkem Cauchy-Schwarzovy nerovnosti je trojúhelníková nerovnost.

Důsledek 8.10 (Trojúhelníková nerovnost). *Nechť V je prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Pak platí*

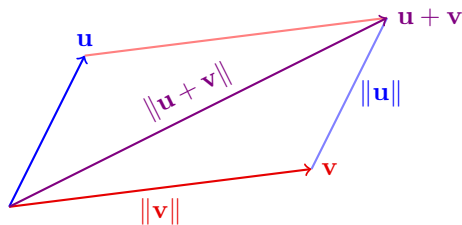
$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad .$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \overline{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle} + \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle) + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarzovu nerovnost jsme použili v předposlední úpravě. Výrazy pod druhými mocninami jsou kladné, takže nerovnost plyne odmocněním. \square

Geometrický význam je patrný z obrázku.



OBRÁZEK 17. Trojúhelníková nerovnost

Zobrazení, které vektoru přiřadí skalár, které splňuje podmínky (1) a (2) z tvrzení 8.7 a trojúhelníkovou nerovnost, se nazývá norma. Existuje mnoho norm, které nepochází ze skalárního součinu, například v \mathbb{R}^n máme normu $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$, která měří vzdálenost, když se můžeme pohybovat pouze pravoúhlým směrem (proto se jí někdy říká manhattanská norma). Norma pochází ze skalárního součinu právě tehdy, když splňuje rovnoběžníkové pravidlo, viz cvičení.

Cauchy-Schwarzova nerovnost nám umožňuje definovat úhel mezi vektory. Úhel definujeme v případě reálných vektorových prostorů.

Definice 8.11. Nechť V je prostor nad \mathbb{R} se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $\mathbf{o} \neq \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Úhlem mezi vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} rozumíme reálné číslo $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ splňující

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Úhel mezi vektory existuje a je určen jednoznačně, protože zlomek je v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ podle Cauchy-Schwarzovo nerovnosti a funkce \cos je bijekcí $\langle 0, \pi \rangle$ na interval $\langle -1, 1 \rangle$.

Pro libovolný skalární součin nad reálnými čísly tedy máme vztah

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha .$$

Z tohoto vztahu snadno odvodíme kosinovou větu.

Tvrzení 8.12 (Kosinová věta). *Nechť V je prostor nad \mathbb{R} se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $\mathbf{o} \neq \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Pak platí*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha ,$$

kde α je úhel mezi vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} .

Důkaz.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} - \mathbf{v} | \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle - 2\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha \end{aligned}$$

□

Nad komplexními čísly se úhel definuje jako číslo z intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$ splňující $\cos \alpha = \frac{|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$, ale tento pojem nebudeme používat.

8.3. Kolmost.

Ze vztahu $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$ vidíme, že (nenulové) vektory svírají úhel $\pi/2$ právě tehdy, když je jejich skalární součin nula. To vede k přirozené definici kolmosti vektorů.

Definice 8.13. Nechť V je prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$. Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ nazýváme *kolmé* (nebo *ortogonální*) a píšeme $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, pokud $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = 0$.

Množina, nebo posloupnost, M vektorů z V se nazývá *ortogonální*, pokud $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ pro libovolné dva různé prvky množiny (nebo posloupnosti) M .

Množina (posloupnost) M se nazývá *ortonormální*, pokud je ortogonální a každý vektor \mathbf{v} z M je jednotkový.

Z vlastnosti (SCS) plyne, že ortogonalita nezávisí na pořadí vektorů. Z vlastnosti (SL1) vidíme, že jsou-li dva vektory kolmé, pak jsou kolmé i jejich libovolné násobky. Máme-li ortogonální množinu nenulových vektorů $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$, můžeme z ní vytvořit ortonormální množinu znormováním, tj.

$$\left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}, \dots, \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|} \right\}$$

je ortonormální.

Z geometrického náhledu v \mathbb{R}^3 vidíme, že ortogonální posloupnost nenulových vektorů je lineárně nezávislá. Obecně:

Tvrzení 8.14. *Nechť V je prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$. Ortogonální posloupnost nenulových vektorů z V je lineárně nezávislá.*

Důkaz. Je-li $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ ortogonální posloupnost vektorů z V a platí

$$a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_k \mathbf{v}_k = \mathbf{o} ,$$

pak skalárním vynásobením obou stran zleva vektorem \mathbf{v}_i ($i \in \{1, 2, \dots, k\}$) a využitím (SL1), (SL2) a kolmosti dostáváme

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_i | a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_k \mathbf{v}_k \rangle &= \langle \mathbf{o} | \mathbf{v} \rangle \\ a_1 \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_1 \rangle + a_2 \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_2 \rangle + \dots + a_k \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_k \rangle &= 0 \\ a_i \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_i \rangle &= 0 . \end{aligned}$$

Protože vektor \mathbf{v}_i je nenulový, platí podle (SP) vztah $\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_i \rangle = \|\mathbf{v}_i\|^2 > 0$, takže z odvozeného vztahu vyplývá $a_i = 0$. Ukázali jsme, že jediná lineární kombinace, která dává nulový vektor, je triviální, takže posloupnost je lineárně nezávislá (viz bod (2) tvrzení 5.26). \square

Z tvrzení vyplývá, že ortogonální posloupnost n nenulových vektorů v prostoru dimenze n je ortogonální báze, protože je lineárně nezávislá a lineárně nezávislá posloupnost n vektorů je báze podle bodu (4) v pozorování 5.57

Příklad 8.15. V prostoru \mathbb{R}^n (nebo \mathbb{C}^n) se standardním skalárním součinem je kanonická báze ortonormální.

Posloupnost vektorů $((1, 2, 2)^T, (-2, -1, 2)^T)$ v \mathbb{R}^3 (nebo \mathbb{C}^3) je ortogonální, ale není ortonormální. Znormováním dostaneme ortonormální posloupnost

$$\left(\frac{1}{3}(1, 2, 2)^T, \frac{1}{3}(-2, -1, 2)^T \right) .$$

Tuto posloupnost lze doplnit na ortonormální bázi: posloupnost

$$\left(\frac{1}{3}(1, 2, 2)^T, \frac{1}{3}(-2, -1, 2)^T, \frac{1}{3}(2, -2, 1) \right)$$

je ortonormální, takže je to podle poznámky za tvrzením ortonormální báze. Později budeme pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu umět každou ortogonální (resp. ortonormální) posloupnost nenulových vektorů v konečně generovaném prostoru doplnit do ortogonální (resp. ortonormální) báze.

Příklad 8.16. V prostoru \mathbb{R}^2 se skalárním součinem daným

$$\langle (x_1, x_2)^T | (y_1, y_2) \rangle = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

(ověřte, že je to skutečně skalární součin) je posloupnost

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

ortogonální, protože

$$\langle (1, 0)^T | (-1, 2)^T \rangle = (1, 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2, 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 ,$$

tedy tvoří ortogonální bázi. Spočítáme normy vektorů a vytvoříme ortonormální bázi.

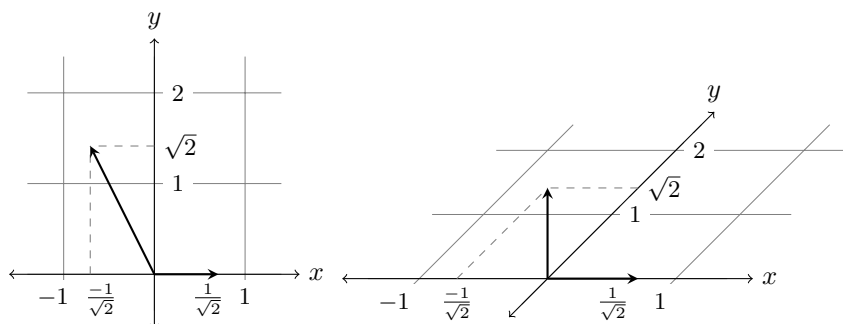
$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{(1, 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{(2, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{2} \\ \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{(-1, 2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{(0, 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Posloupnost

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

je tedy ortonormální báze.

Pokud si nakreslíme tyto dva vektory jako kolmé vektory jednotkové velikosti a ostatní vektory kreslíme v tomto souřadném systému, pak délky a úhly při daném skalárním součinu jsou běžné, eukleidovské délky a úhly na obrázku. Tento fakt dokážeme v tvrzení 8.21.



Příklad 8.17. V prostoru spojitých funkcí na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ se skalárním součinem

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f g$$

je množina $\{1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \dots\}$ ortogonální. Toto je základní fakt v oboru Fourierových řad.

Jednoduchým důsledkem definice kolmosti je zobecnění Pythagorovy věty pro libovolný skalární součin:

Tvrzení 8.18 (Pythagorova věta). *Nechť V je prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$. Jsou-li vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ kolmé, pak*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 .$$

Důkaz.

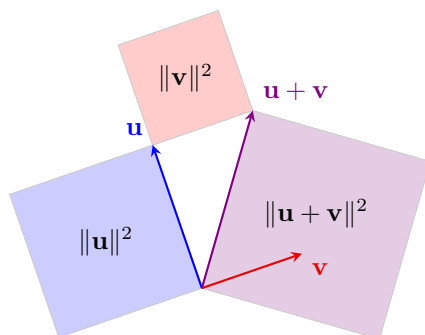
$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle$$

Díky kolmosti jsou prostřední dva členy nulové, takže výraz je roven $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$. \square

Indukcí lze Pythagorovu větu zobecnit na libovolný konečný počet vektorů: Je-li $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ ortogonální množina, pak

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_k\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + \dots + \|\mathbf{v}_k\|^2 .$$

Zobecnění této rovnosti na nekonečné množiny vektorů se někdy říká *Parsevalova identita*.



8.3.1. *Souřadnice vektoru vzhledem k ortonormální bázi.* Vzhledem k ortonormální bázi se souřadnice vektoru počítají velmi snadno:

Tvrzení 8.19. *Nechť V je prostor se skalárním součinem $\langle \cdot | \cdot \rangle$, $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jeho ortonormální báze a $\mathbf{u} \in V$. Pak*

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_2 + \dots + \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_n ,$$

jinými slovy,

$$[\mathbf{u}]_B = (\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{u} \rangle, \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{u} \rangle, \dots, \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{u} \rangle)^T .$$

Důkaz. Označme $[\mathbf{u}]_B = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, neboli

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_n \mathbf{v}_n .$$

Podobně jako v důkazu lineární nezávislosti ortogonální množiny nenulových vektorů skalárně vynásobíme obě strany zleva vektorem \mathbf{v}_i a dostaneme

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{u} \rangle &= \langle \mathbf{v}_i | a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_k \mathbf{v}_k \rangle \\ \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{u} \rangle &= a_1 \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_1 \rangle + a_2 \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_2 \rangle + \dots + a_k \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_k \rangle \\ \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{u} \rangle &= a_i \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_i \rangle = a_i , \end{aligned}$$

takže $a_i = \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{u} \rangle$. □

Souřadnicím vzhledem k ortonormální bázi se někdy říká *Fourierovy koeficienty* vzhledem k této bázi. Obecněji z důkazu vidíme, že pro ortogonální B platí

$$[\mathbf{u}]_B = \left(\frac{\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}, \frac{\langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}, \dots, \frac{\langle \mathbf{v}_n | \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \right)^T$$

Příklad 8.20. Určíme souřadnice vektoru $\mathbf{u} = (3 + i, 2, i)^T \in \mathbb{C}^3$ vzhledem k ortonormální bázi

$$B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 2i \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

prostoru \mathbb{C}^3 se standardním skalárním součinem.

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}]_B &= (\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v}_2^* \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v}_3^* \cdot \mathbf{u})^T \\ &= \left(\frac{1}{3}(-i, -2i, -2i) \begin{pmatrix} 3+i \\ 2 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{3}(-2, -1, 2) \begin{pmatrix} 3+i \\ 2 \\ i \end{pmatrix}, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{3}(2, -2, 1) \begin{pmatrix} 3+i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \right)^T \\ &= \left(\frac{1}{3}(3-7i), -\frac{8}{3}, \frac{1}{3}(2+3i) \right)^T. \end{aligned}$$

Skutečně

$$\begin{pmatrix} 3+i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(3-7i) \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 2i \end{pmatrix} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(2+3i) \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k ortonormální bázi přechází skalární součin na standardní. Přesněji, skalární součin dvou vektorů je roven standardnímu skalárnímu součinu souřadnic těchto vektorů vzhledem k ortonormální bázi.

Tvrzení 8.21. *Nechť V je prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$, $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ jeho ortonormální báze a $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$. Pak*

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle = [\mathbf{u}]_B^* [\mathbf{w}]_B.$$

Důkaz. Označme $[\mathbf{u}]_B = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $[\mathbf{w}]_B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, tedy

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_n \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{w} = b_1 \mathbf{v}_1 + b_2 \mathbf{v}_2 + \dots + b_n \mathbf{v}_n.$$

Pomocí (SL2), (SL1) a ortonormality postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i \left| \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{v}_j \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle a_i \mathbf{v}_i | b_j \mathbf{v}_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^* b_j \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i^* b_i = [\mathbf{u}]_B^* [\mathbf{w}]_B \end{aligned}$$

□

Tvrzení ospravedlňuje poznámku z příkladu 8.16: Pokud si nakreslíme vektory ortonormální báze jako jednotkové navzájem kolmé vektory a ostatní vektory kreslíme v tomto souřadném systému, pak délky a úhly při daném skalárním součinu jsou běžné, eukleidovské délky a úhly na obrázku.

Příklad 8.22. V prostoru \mathbb{R}^2 se skalárním součinem

$$\langle (x_1, x_2)^T | (y_1, y_2) \rangle^T = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

je posloupnost

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

ortonormální báze (viz příklad 8.16. Uvažujme vektory $\mathbf{u} = (2, 3)^T$ a $\mathbf{v} = (1, 1)^T$. Z tvrzení 8.19 spočteme jejich souřadnice vzhledem k B a pak vypočítáme skalární součin podle tvrzení 8.21.

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}]_B &= \left(\left\langle \mathbf{u} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \mathbf{u} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle \right)^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \\ [\mathbf{v}]_B &= \left(\left\langle \mathbf{v} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \mathbf{v} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle \right)^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle &= [\mathbf{u}]_B \cdot [\mathbf{v}]_B = \frac{1}{\sqrt{2}}(7, 3) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 12 \end{aligned}$$

To můžeme ověřit z definice skalárního součinu.

8.3.2. Ortogonální doplněk. Definici kolmosti rozšíříme na množiny vektorů.

Definice 8.23. Necht V je prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $\mathbf{v} \in V$, $M, N \subseteq V$. Říkáme, že \mathbf{v} je kolmý na M , zapisujeme $\mathbf{v} \perp M$, pokud \mathbf{v} je kolmý na každý vektor z množiny M .

Říkáme, že M je kolmá na N , zapisujeme $M \perp N$, pokud každý vektor množiny M je kolmý na každý vektor množiny N .

Pokud M je kolmá na N , pak v jejich průniku může být pouze nulový vektor (rozmyslete si jako cvičení). Například tabule není kolmá na podlahu, i když svírají úhel $\pi/2$ (úhel mezi podprostory definujeme později jako největší úhel, který svírají vektory jednotlivých podprostorů). Kolmost se přenáší na lineární obal:

Pozorování 8.24. Necht V je prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $M, N \subseteq V$. Pokud $M \perp N$, pak $\langle M \rangle \perp \langle N \rangle$.

Důkaz. Pokud $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{u}_i$, kde a_i jsou skaláry a $\mathbf{u}_i \in M$, a $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^l b_j \mathbf{v}_j$, kde b_j jsou skaláry a $\mathbf{v}_j \in N$, pak z lineariry, tj. z vlastností (SL1) a (SL2), máme

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{u}_i \left| \sum_{j=1}^l b_j \mathbf{v}_j \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \overline{a_i} b_j \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{v}_j \rangle = 0 .$$

□

Největší množina vektorů kolmá na danou množinu M se nazývá ortogonální doplněk.

Definice 8.25. Necht V je prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $M \subseteq V$. *Ortogonální doplněk* množiny M rozumíme množinu všech vektorů kolmých na každý vektor z M , značíme M^\perp :

$$M^\perp = \{ \mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \perp M \} .$$

Podle definice M je kolmá na M^\perp a M^\perp je největší taková množina. Další jednoduché vlastnosti:

Pozorování 8.26. Necht V je prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $M, N \subseteq V$. Pak platí

- (1) M^\perp je podprostor V ,
- (2) Je-li $M \subseteq N$, pak $N^\perp \subseteq M^\perp$,
- (3) $M^\perp = \langle M \rangle^\perp$,

Důkaz. Důkaz se provede snadno z definic a předchozího pozorování. Přenecháme jej do cvičení. \square

V \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem je ortogonální doplněk množiny $M = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ dvou lineárně nezávislých vektorů přímka kolmá na rovinu $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Ortogonálním doplňkem nenulového vektoru (nebo jeho lineárního obalu) je rovina.

Příklad 8.27. Určíme ortogonální doplněk roviny $U = \langle (1, 2, 5)^T, (0, 1, 1)^T \rangle$ v prostoru \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem. Podle (3) je U^\perp rovná množině všech vektorů \mathbf{x} kolmých na oba generátory, tj. množině vektorů, pro které $(1, 2, 5)\mathbf{x} = 0$ a $(0, 1, 1)\mathbf{x} = 0$. Maticově

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hledáme tedy řešení homogenní soustavy s maticí, jejíž řádkové vektory jsou generátory U :

$$U^\perp = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

V příkladu jsme viděli, že k určení ortogonálního doplňku množiny vektorů $M = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ (nebo podprostoru $\langle M \rangle$) v aritmetickém vektorovém prostoru \mathbb{R}^n se standardním skalárním součinem stačí napsat vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ do řádků matice a vyřešit příslušnou homogenní soustavu. Při standardním skalárním součinu tedy platí

$$(\text{Im } A^T)^\perp = \text{Ker } A .$$

To nám dává nad \mathbb{R} další interpretaci řešení homogenní soustavy rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ – určujeme ortogonální doplněk řádků matice A . V \mathbb{C}^n se standardním skalárním součinem je ještě třeba přidat komplexní sdružování:

$$(\text{Im } A^*)^\perp = \text{Ker } A .$$

Obecněji, počítáme-li vzhledem k ortonormální bázi, pak skalární součin se chová jako standardní (viz tvrzení 8.21), takže ortogonální doplněk množiny vektorů můžeme spočítat podobně:

Pozorování 8.28. *Nechť V je konečně generovaný prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$, B jeho ortonormální báze, $M = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$. Označme A matici s řádky $[\mathbf{v}_1]_B^*$, $[\mathbf{v}_2]_B^*$, \dots , $[\mathbf{v}_k]_B^*$. Pak*

$$[M^\perp]_B = \text{Ker } A .$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} [M^\perp]_B &= \{[\mathbf{u}]_B : \mathbf{u} \perp M\} = \{[\mathbf{u}]_B : \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{u} \rangle = \dots = \langle \mathbf{v}_k | \mathbf{u} \rangle = 0\} \\ &= \{[\mathbf{u}]_B : [\mathbf{v}_1]_B^*[\mathbf{u}]_B = [\mathbf{v}_2]_B^*[\mathbf{u}]_B = \dots = [\mathbf{v}_k]_B^*[\mathbf{u}]_B = 0\} \\ &= \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{o}\} = \text{Ker } A \end{aligned}$$

\square

Důležité netriviální vlastnosti ortogonálního doplňku jsou shrnuty v následující větě o ortogonálním doplňku.

Věta 8.29. *Nechť V je konečně generovaný prostor dimenze n se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a W je podprostor V . Pak platí*

- (1) $\dim(W^\perp) = n - \dim(W)$,
- (2) $V = W \oplus W^\perp$,
- (3) $(W^\perp)^\perp = W$.

Důkaz. V důkazu použijeme skutečnost, která bude dokázána teprve později ve větě 8.44, a to, že každý prostor konečné dimenze má nějakou ortonormální bázi B .

Zvolme nějakou bázi $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$ prostoru W , tj. $\dim(W) = k$.

- (1) Označme A matici s řádky $[\mathbf{w}_1]_B, [\mathbf{w}_2]_B, \dots, [\mathbf{w}_k]_B$. Ortogonální doplněk prostoru W vyjádřený v bázi B je podle pozorování 8.28 jádrem matice \bar{A} . Matice má k lineárně nezávislých řádků, takže $\text{rank}(\bar{A}) = \text{rank}(A) = k$. Podle věty 5.83 o dimenzi jádra a obrazu máme $\dim(\text{Ker } A) = n - k$.
- (2) Protože podprostor W je kolmý na W^\perp , jejich průnikem je triviální podprostor $\{\mathbf{o}\}$. Podle věty 5.87 o dimenzi součtu a průniku máme

$$\dim(W + W^\perp) = \dim(W) + \dim(W^\perp) - \dim(W \cap W^\perp) = k + n - k - 0 = n .$$

Podprostor dimenze n v prostoru dimenze n je celý prostor (tvrzení 5.59), takže $W + W^\perp = V$.

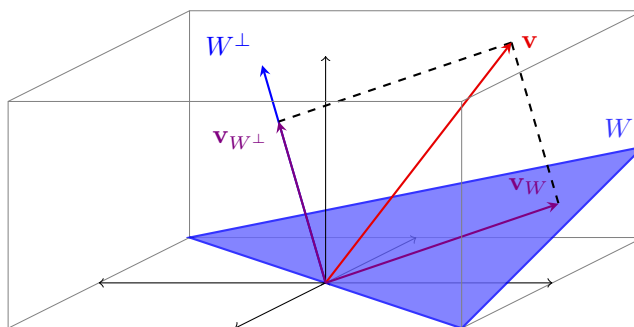
- (3) Podprostor W je kolmý na W^\perp , takže W je podprostorem $(W^\perp)^\perp$. Podle (1) máme $\dim(W^\perp) = n - k$ a $\dim((W^\perp)^\perp) = n - (n - k) = k$. Takže $W = (W^\perp)^\perp$ opět podle tvrzení 5.59.

□

Každý vektor ve V lze podle (2) vyjádřit jednoznačně jako součet vektoru \mathbf{v}_W ve W a vektoru \mathbf{v}_{W^\perp} kolmého na W :

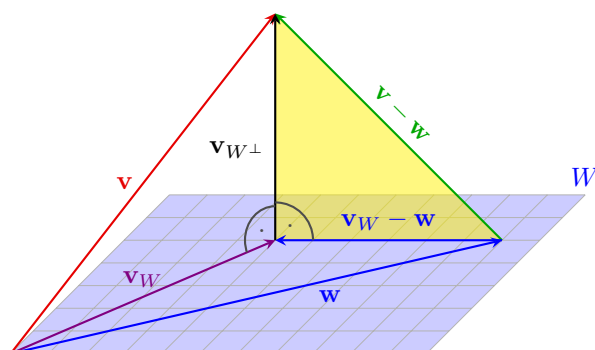
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_W + \mathbf{v}_{W^\perp}$$

Definice 8.30. Vektoru \mathbf{v}_W říkáme *ortogonální projekce* vektoru \mathbf{v} na W . Vektor \mathbf{v}_{W^\perp} se nazývá *kolmice* vektoru \mathbf{v} na W . (Kolmice je tedy ortogonální projekce \mathbf{v} na W^\perp .)



Důsledkem Pythagorovy věty je, že vektor \mathbf{v}_W je nejlepší aproximací vektoru \mathbf{v} v prostoru W :

Tvrzení 8.31. *Nechť V je konečně generovaný prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$, W je podprostor V , $\mathbf{v} \in V$. Vektor $\mathbf{v} - \mathbf{v}_W$ ($=\mathbf{v}_{W^\perp}$) má nejmenší možnou normu ze všech vektorů $\mathbf{v} - \mathbf{w}$, $\mathbf{w} \in W$.*



Důkaz. Uvažujme libovolný vektor $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{v}_W$. Napíšeme si vektor $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ ve tvaru

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_W) + (\mathbf{v}_W - \mathbf{w}) = \mathbf{v}_{W^\perp} + (\mathbf{v}_W - \mathbf{w}) .$$

Vektor \mathbf{v}_{W^\perp} je kolmý na $\mathbf{v}_W - \mathbf{w}$ protože je kolmý na oba dva vektory \mathbf{v}_W a \mathbf{w} . Podle Pythagorovy věty 8.18 je

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}_{W^\perp}\|^2 + \|\mathbf{v}_W - \mathbf{w}\|^2 > \|\mathbf{v}_{W^\perp}\|^2 .$$

□

Předpoklad konečné generovanosti V v bodech (2), (3) věty 8.29 a v předchozím tvrzení lze nahradit slabším předpokladem, že W je konečně generovaný. To získáme jako důsledek Gram-Schmidtovy ortogonalizace, viz cvičení.

8.3.3. Prostory určené maticí a kolmost. Metody a aplikace hledání nejlepší aproximace budeme studovat v další části. Teď se ještě krátce podíváme na vztahy prostorů určených maticí z hlediska kolmosti a geometricky interpretujeme izomorfismus $\text{Im } A^T$ a $\text{Im } A$.

Uvažujme standardní skalární součin nad reálnými čísly a reálnou matici A typu $m \times n$.

Všimli jsme si, že pro standardní skalární součin nad \mathbb{R} máme $(\text{Im } A^T)^\perp = \text{Ker } A$. Podle bodů (3) a (2) z věty 8.29 také platí

$$(\text{Ker } A)^\perp = \text{Im } A^T , \quad \text{Ker } A \oplus \text{Im } A^T = \mathbf{T}^n ,$$

kde n je počet sloupců matice A .

Jádrem lineárního zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je $\text{Ker } f_A = \text{Ker } A$. Jeho zúžení na libovolný doplněk $\text{Ker } A$, tj. libovolný podprostor $U \leq \mathbb{R}^n$ takový, že $\text{Ker } A \oplus U = \mathbb{R}^n$ je izomorfismus $U \rightarrow \text{Im } A$, viz cvičení. Pro ortogonální doplněk $\text{Ker } A$, což je $\text{Im } A^T$, máme izomorfismus $\text{Im } A^T \rightarrow \text{Im } A$. Z toho například vidíme, že prostory $\text{Im } A^T$ a $\text{Im } A$ mají stejnou dimenzi, takže získáváme v reálném případě další důkaz, že dimenze sloupcového a řádkového prostoru matice se shodují (věta 5.73).

Příklad 8.32. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

máme

$$\text{Ker } f_A = \text{Ker } A = \langle (-1, 5, 3)^T \rangle , \quad \text{Im } A^T = \langle (1, 2, -3)^T, (1, -1, 2)^T \rangle .$$

Skutečně $\text{Ker } A \perp \text{Im } A^T$ a $\text{Ker } A \oplus \text{Im } A^T = \mathbb{R}^3$.

Zúžení f na $\text{Im } A^T$ je izomorfismem rovin $\text{Im } A^T$ a $\text{Im } A = \langle (1, 1, 2)^T, (2, -1, 1)^T \rangle$.

OBRAZEK

Obdobně pro prostory $\text{Im } A$ a $\text{Ker } A^T$ máme vztahy.

$$(\text{Im } A)^\perp = \text{Ker } A^T, \quad (\text{Ker } A^T)^\perp = \text{Im } A, \quad \text{Ker } A^T \oplus \text{Im } A = \mathbf{T}^m, \quad ,$$

kde m je počet řádků matice A .

Nad komplexními čísly vychází stejné vztahy, jen je potřeba transponování nahradit komplexním sdružováním.

8.4. Ortogonální projekce. V této části se naučíme hledat ortogonální projekci vektorů na podprostor. Ortogonální projekce je nejlepší aproximace vektoru v podprostoru, což také využijeme na hledání nejlepších přibližných řešení soustav lineárních rovnic.

8.4.1. Ortogonální projekce na přímku. Jednoduchým případem ortogonální projekce je projekce na přímku $W = \langle \mathbf{w} \rangle$, $\mathbf{w} \neq \{\mathbf{o}\}$. Projekce vektoru \mathbf{v} je vektor $\mathbf{v}_W = a\mathbf{w}$, pro který je vektor $\mathbf{v}_{W^\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_W$ kolmý na \mathbf{w} . Z toho dostáváme

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w} | \mathbf{v} - a\mathbf{w} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle - a \langle \mathbf{w} | \mathbf{w} \rangle &= 0 \\ a &= \frac{\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2}, \end{aligned}$$

takže ortogonální projekce vektoru \mathbf{v} na W je

$$\mathbf{v}_W = \frac{\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{w}.$$

V případě, že je vektor \mathbf{w} jednotkový, se vzorec zjednoduší na

$$\mathbf{v}_W = \langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}.$$

OBRAZEK

Vzorec také můžeme v \mathbb{R}^3 nahlédnout z geometrické interpretace skalárního součinu jako součinu norem vynásobeného kosinem úhlu jimi sevřeného. Norma projekce je kosinus úhlu mezi \mathbf{v} a \mathbf{w} krát norma \mathbf{v} , tj.

$$\frac{\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|} \|\mathbf{v}\| = \frac{\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}\|}$$

a projekce je rovna této normě vynásobené znormovaným vektorem \mathbf{w} , tj.

$$\frac{\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}\|} \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{w}.$$

OBRAZEK

Rovněž si všimněme souvislosti s vyjádřením vektoru \mathbf{v} vzhledem k ortonormální bázi $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$ z tvrzení 8.19:

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}_2 + \dots + \langle \mathbf{w}_n | \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}_n.$$

Sčítanec $\langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}_i$ je ortogonální projekcí vektoru \mathbf{v} na přímku $\langle \mathbf{w}_i \rangle$.

Ortogonalní projekci můžeme chápat jako endomorfismus prostoru V , který vektoru \mathbf{v} přiřazuje vektor \mathbf{v}_W . V případě aritmetického vektorového prostoru $V = \mathbb{C}^n$ nebo $V = \mathbb{R}^n$ a standardního skalárního součinu máme

$$\mathbf{v}_W = \frac{\mathbf{w}^* \mathbf{v}}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{w} .$$

Součin skaláru $\mathbf{w}^* \mathbf{v} / \|\mathbf{w}\|^2$ a vektoru \mathbf{w} lze zapsat maticovým součinem

$$\mathbf{v}_W = \mathbf{w} \frac{\mathbf{w}^* \mathbf{v}}{\|\mathbf{w}\|^2} = \frac{\mathbf{w} \mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{v} .$$

Z toho vidíme, že matice $P_{\langle \mathbf{w} \rangle}$ projekce $p_{\langle \mathbf{w} \rangle}$ na přímku $\langle \mathbf{w} \rangle$ vzhledem ke kanonickým bázím je

$$P_{\langle \mathbf{w} \rangle} = [p_{\langle \mathbf{w} \rangle}]_K^K = \frac{\mathbf{w} \mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2} .$$

Příklad 8.33. V \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem je projekce vektoru $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)^T$ na přímku $W = \langle \mathbf{w} \rangle$, kde $\mathbf{w} = (1, 2, 3)^T$, vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_W &= \frac{\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{w} = \frac{(1, 2, 3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} (x_1 + 2x_2 + 3x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matice projekce na W vzhledem ke kanonickým bázím je

$$P_W = \frac{\mathbf{w} \mathbf{w}^T}{\|\mathbf{w}\|^2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1, 2, 3)}{14} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} ,$$

což dává stejný vzorec.

Obecněji, pro konečně generovaný prostor V s ortonormální bází B máme podle tvrzení 8.21 o skalárním součinu vzhledem k ortonormální bází

$$[\mathbf{v}_W]_B = \frac{[\mathbf{w}]_B^* [\mathbf{v}]_B}{\|\mathbf{w}\|^2} [\mathbf{w}]_B = [\mathbf{w}]_B \frac{[\mathbf{w}]_B^* [\mathbf{v}]_B}{\|\mathbf{w}\|^2} = \frac{[\mathbf{w}]_B [\mathbf{w}]_B^*}{\|\mathbf{w}\|^2} [\mathbf{v}]_B ,$$

takže matice vzhledem k bázím B a B je

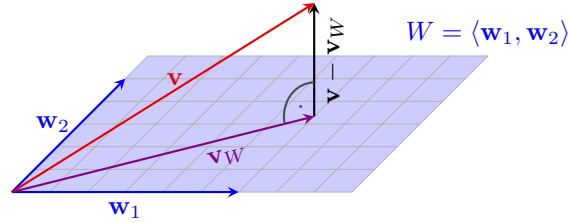
$$[p_{\langle \mathbf{w} \rangle}]_B^B = \frac{[\mathbf{w}]_B [\mathbf{w}]_B^*}{\|\mathbf{w}\|^2} .$$

8.4.2. Ortogonalní projekce na obecný podprostor. Nyní odvodíme vzorec pro ortogonalní projekci vektoru \mathbf{v} na obecný podprostor $W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k \rangle$ konečně generovaného prostoru V se skalárním součinem $\langle | \rangle$. (Předpoklad, že V je konečně generovaný můžeme vynechat.)

Vektor \mathbf{v}_W leží v prostoru W , takže je lineární kombinací generátorů:

$$\mathbf{v}_W = a_1 \mathbf{w}_1 + a_2 \mathbf{w}_2 + \dots + a_k \mathbf{w}_k .$$

K tomu, aby \mathbf{v}_W byl ortogonální projekcí \mathbf{v} , je nutné a stačí, aby vektor $\mathbf{v} - \mathbf{v}_W = \mathbf{v} - \mathbf{v}_W$ byl kolmý na W .



To nastane právě tehdy (viz pozorování 8.24), když $\mathbf{v} - \mathbf{v}_W$ je kolmý na každý z vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$. Dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} - \mathbf{v}_W \rangle = \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} - a_1 \mathbf{w}_1 - a_2 \mathbf{w}_2 - \dots - a_k \mathbf{w}_k \rangle \\ &= \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} \rangle - a_1 \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_1 \rangle - a_2 \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_2 \rangle - \dots - a_k \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_k \rangle . \end{aligned}$$

Úpravou dostaneme pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ rovnici

$$a_1 \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_1 \rangle + a_2 \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_2 \rangle + \dots + a_k \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_k \rangle = \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} \rangle .$$

Vektor koeficientů $(a_1, a_2, \dots, a_k)^T \in T^n$ je tedy řešením soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_k \rangle & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{w}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{w}_k \rangle & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \mathbf{w}_k | \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_k | \mathbf{w}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_k | \mathbf{w}_k \rangle & \langle \mathbf{w}_k | \mathbf{v} \rangle \end{array} \right) .$$

Dokázali jsme:

Tvrzení 8.34. *Nechť V je konečně generovaný prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{v} \in V$, $W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k \rangle$. Ortogonální projekce vektoru \mathbf{v} na podprostor W je rovna vektoru*

$$\mathbf{v}_W = a_1 \mathbf{w}_1 + a_2 \mathbf{w}_2 + \dots + a_k \mathbf{w}_k ,$$

kde $(a_1, a_2, \dots, a_k)^T$ je (libovolné) řešení soustavy rovnic s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_k \rangle & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{w}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{w}_k \rangle & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \mathbf{w}_k | \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_k | \mathbf{w}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_k | \mathbf{w}_k \rangle & \langle \mathbf{w}_k | \mathbf{v} \rangle \end{array} \right) .$$

Matice soustavy z tvrzení se nazývá *Gramova matice* vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$. Je-li $B = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$ lineárně nezávislá, pak $(a_1, a_2, \dots, a_k)^T$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{v}_W \in W$ vzhledem k bázi B . Ty jsou určeny jednoznačně, takže Gramova matice je regulární (detailně si promyslete jako cvičení). Naopak, jsou-li vektory \mathbf{w}_i lineárně závislé, pak je Gramova matice singulární.

Determinant Gramovy matice vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^n$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu je roven k -rozměrnému objemu rovnoběžnostěnu o stranách $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$. Důkaz pro $k = n$ necháme jako cvičení, obecně jej dělat nebudeme.

Příklad 8.35. V prostoru reálných polynomů stupně nejvýše dva se skalárním součinem $\langle f | g \rangle = \int_0^1 fg$ najdeme nejlepší aproximaci polynomu x^2 pomocí lineárního polynomu $a + bx$ a chybu této aproximace.

Chceme tedy nalézt ortogonální projekci $\mathbf{v}_W = a + bx$ a kolmici vektoru $\mathbf{v} = x^2$ na prostor $W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = \langle 1, x \rangle$. Koeficienty a, b jsou podle tvrzení řešením soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2 \rangle & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{w}_2 \rangle & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v} \rangle \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \int_0^1 1 & \int_0^1 x & \int_0^1 x^2 \\ \int_0^1 x & \int_0^1 x^2 & \int_0^1 x^3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{array} \right).$$

Řešením soustavy dostaneme vektor $(a, b)^T = (-\frac{1}{6}, 1)^T$. Nejlepší aproximací vektoru $\mathbf{v} = x^2$ je tedy

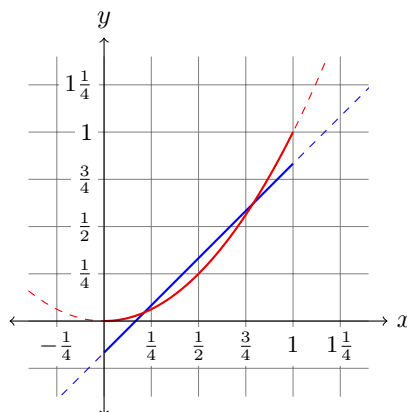
$$\mathbf{v}_W = a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2 = -\frac{1}{6} + x,$$

chybový vektor je

$$\mathbf{v}_{W^\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_W = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

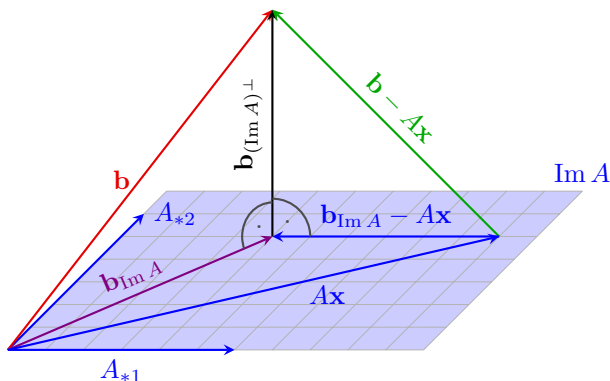
a velikost chyby je

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_{W^\perp}\| &= \sqrt{\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\int_0^1 x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{1}{30}} \end{aligned}$$



8.4.3. *Řešení neřešitelné soustavy lineárních rovnic.* Mějme soustavu rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, která nemá řešení. Řekněme, že A je matice typu $m \times n$ nad \mathbb{R} nebo \mathbb{C} , typicky $m \gg n$. Taková soustava může například vzniknout sestavením rovnic z velkého množství měření, která jsou zatížena chybami. Chceme nalézt „co nejlepší“ přibližné řešení \mathbf{x} v tom smyslu, aby skutečná pravá strana $A\mathbf{x}$ byla co nejbližší ideální pravé straně \mathbf{b} , tj. aby norma $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$ byla co nejmenší možná. V praktických aplikacích nás bude nejspíše zajímat eukleidovská norma na \mathbb{C}^m (nebo \mathbb{R}^m), proto také říkáme, že soustavu řešíme *metodou nejmenších čtverců*. Zapišeme-li $A\mathbf{x}$ jako lineární kombinaci sloupců, můžeme se na tento problém podívat tak, že hledáme $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, aby $A_{*1}x_1 + A_{*2}x_2 + \dots + A_{*n}x_n$ byl co nejbližší vektoru \mathbf{b} . Podle

tvrzení 8.31 (kde $V = T^m$, $W = \text{Im } A$, $\mathbf{v} = \mathbf{b}$) je $A\mathbf{x}$ ortogonální projekce vektoru \mathbf{b} na $\text{Im } A$, kolmice vektoru \mathbf{b} na $\text{Im } A$ je chybový vektor $\mathbf{b} - A\mathbf{x}$.



Přeformulujeme si tvrzení 8.34 na tento důležitý speciální případ. Matice soustavy z tohoto tvrzení, tj. Gramova matice vektorů $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$, má na místě (i, j) číslo $A_{*i} \cdot A_{*j} = A_{*i}^* \cdot A_{*j}$. Je tedy rovná matici A^*A . Pravou stranu soustavy z tvrzení můžeme maticově zapsat $A^*\mathbf{b}$. Dostáváme:

Tvrzení 8.36. *Nechť A je matice typu $m \times n$ nad \mathbb{R} nebo \mathbb{C} , $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ (resp. \mathbb{C}^m). Množina všech řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ metodou nejmenších čtverců je rovna množině všech (přesných) řešení soustavy*

$$A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$$

Soustavě $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$ říkáme *soustava normálních rovnic* příslušná soustavě $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Pokud A má lineárně nezávislé sloupce, pak je vektor \mathbf{x} určen jednoznačně, takže A^*A je regulární a dostáváme jednoznačně řešení původní soustavy metodou nejmenších čtverců.

Příklad 8.37. Řešení reálné soustavy $(A|\mathbf{b})$, kde

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -2 \end{array} \right),$$

metodou nejmenších čtverců je řešení soustavy

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Eliminací dostaneme $(x_1, x_2)^T = (1, 2)^T$.

Pravá strana původní soustavy vyjde $A(1, 2)^T = (2, 3, -4)$, je to ortogonální projekce vektoru \mathbf{b} na prostor $\text{Im } A$. Chybový vektor je

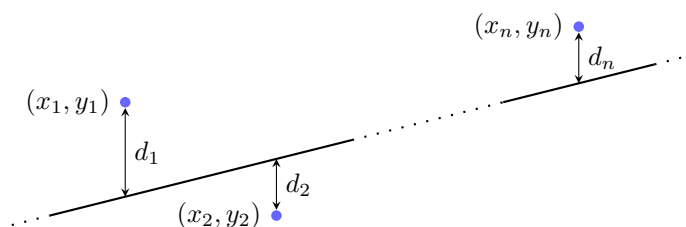
$$\mathbf{b}_{(\text{Im } A)^\perp} = (3, 5, -2)^T - (2, 3, -4)^T = (1, 2, 2)^T$$

a velikost chyby je

$$\|\mathbf{b}_{(\text{Im } A)^\perp}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3 .$$

Jednou ze situací, která vede na přibližné řešení soustavy rovnic, je *lineární regrese*, kdy chceme co nejlépe proložit přímkou $y = ax + b$ danými naměřenými hodnotami $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. V tomto případě hledáme nejlepší „řešení“ soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} x_1 & 1 & y_1 \\ x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & 1 & y_n \end{array} \right) .$$



OBRÁZEK 18. Lineární regrese – minimalizujeme $\sum d_i^2$.

Daty můžeme prokládat složitější útvary, jako paraboly, polynomy vyššího stupně, elipsy (např. při hledání dráhy planety), apod. Takové úlohy vedou na hledání řešení soustavy metodou nejmenších čtverců.

Příklad 8.38. Metodou nejmenších čtverců proložíme body $(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 5)$ v \mathbb{R}^2 přímkou $y = ax + b$. Koeficienty a, b jsou řešením soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

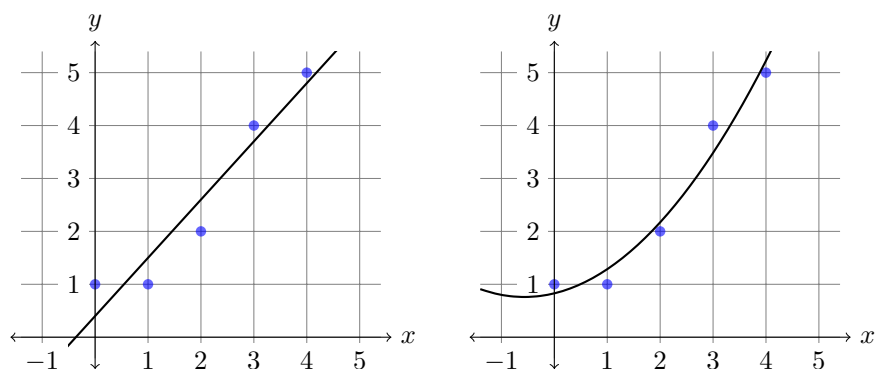
metodou nejmenších čtverců. Příslušná soustava normálních rovnic je

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 13 \end{pmatrix} .$$

Řešením vyjde $(a, b)^T = (11/10, 2/5)$ takže hledaná přímka je

$$y = \frac{11}{10}x + \frac{2}{5} .$$



Příklad 8.39. Stejnými body proložíme co nejlépe parabolu $y = ax^2 + bx + c$. Koeficienty jsou řešením soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 4 \\ 16 & 4 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

metodou nejmenších čtverců. Vyjde $(a, b, c)^T = \dots$

$$y =$$

8.4.4. *Matice ortogonální projekce.* Uvažujme podprostor W dimenze n aritmetického prostoru \mathbb{C}^m (nebo \mathbb{R}^m) se standardním skalárním součinem. Určíme matici P_W ortogonální projekce p_W na podprostor W vzhledem ke kanonickým bázím.

Napišeme si do sloupců matice A vektory nějaké báze prostoru W , tj. A je matice typu $m \times n$ s lineárně nezávislými sloupci. Ortogonální projekce vektoru \mathbf{b} na $\text{Im } A = W$ je podle diskuze výše vektor $A\mathbf{x}$, kde \mathbf{x} je řešením rovnice $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$. Protože A má lineárně nezávislé sloupce, je Gramova matice A^*A regulární, takže můžeme psát $\mathbf{x} = (A^*A)^{-1}A^*\mathbf{b}$. Projekci tedy můžeme vyjádřit $p_W(\mathbf{b}) = A\mathbf{x} = A(A^*A)^{-1}A^*\mathbf{b}$ a matice p_W vzhledem ke kanonickým bázím je

$$P_W = A(A^*A)^{-1}A^* .$$

Každá taková matice je, jak se snadno ověří, hermitovská a splňuje $P_W P_W = P_W$, což je též geometricky vidět z toho, že f_W je projekce. Naopak, libovolná matice splňující tyto dvě podmínky je maticí projekce na nějaký podprostor:

Tvrzení 8.40. *Nechť P je čtvercová reálná nebo komplexní matice řádu m . Následující tvrzení jsou ekvivalentní*

- (1) P je hermitovská (tj. $P^* = P$) a $P^2 = P$
- (2) P je maticí ortogonální projekce na nějaký podprostor W aritmetického vektorového prostoru \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n) se standardním skalárním součinem vzhledem ke kanonickým bázím.

Důkaz. (2) \Rightarrow (1) jsme již dokázali. Nechť P je tedy hermitovská matice, pro kterou platí $P^2 = P$. Položíme $W = \text{Im } P$ (jiná volba není, má-li být f_P projekce na nějaký podprostor, pak tento podprostor musí nutně být obrazem f_P). Z vlastnosti $P^2 = P$

plyne, že $P\mathbf{u} = \mathbf{u}$ pro libovolný vektor $\mathbf{u} \in W$, protože pro každý takový vektor \mathbf{u} existuje \mathbf{v} takové, že $P\mathbf{v} = \mathbf{u}$, z čehož dostáváme

$$P\mathbf{u} = P(P\mathbf{v}) = PP\mathbf{v} = P\mathbf{v} = \mathbf{u} .$$

Nyní $\text{Ker } P$ je podle diskuze o podprostorech ortogonální doplněk $\text{Im } P^*$ a tento prostor je rovný $\text{Im } P = W$, protože P je hermitovská. Platí tedy $W^\perp = \text{Ker } P$. Nyní pro libovolný vektor \mathbf{v} je $\mathbf{v}_{W^\perp} \in \text{Ker } P$, takže

$$P\mathbf{v} = P(\mathbf{v}_W + \mathbf{v}_{W^\perp}) = P\mathbf{v}_W + P\mathbf{v}_{W^\perp} = P\mathbf{v}_W = \mathbf{v}_W .$$

Z toho vidíme, že obraz vektoru \mathbf{v} při zobrazení f_P je skutečně ortogonální projekce vektoru \mathbf{v} na W , jak jsme chtěli. \square

8.5. Gram-Schmidtova ortogonalizace, QR-rozklad.

Vzorec pro ortogonální projekci vektoru $\mathbf{v} \in V$ na podprostor W se značně zjednoduší, je-li báze $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$ prostoru W ortogonální. Gramova matice v tvrzení 8.34 je totiž v tomto případě diagonální. Protože odvození tvaru ortogonální projekce je krátké, zopakujeme jej v tomto speciálním případě. Hledáme vektor $\mathbf{v}_W = a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + \dots + a_k\mathbf{w}_k$ tak, aby vektor $\mathbf{v} - \mathbf{v}_W$ byl kolmý na každý z vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$. Dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} - \mathbf{v}_W \rangle = \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} - a_1\mathbf{w}_1 - a_2\mathbf{w}_2 - \dots - a_k\mathbf{w}_k \rangle \\ &= \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} \rangle - a_1 \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_1 \rangle - a_2 \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_2 \rangle - \dots - a_k \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_k \rangle \\ &= \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} \rangle - a_i \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_i \rangle \\ a_i &= \frac{\langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}_i\|^2} . \end{aligned}$$

Tvrzení 8.41. *Nechť V je konečně generovaný prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$, $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}$ ortogonální množina nenulových vektorů, $\mathbf{v} \in V$, $W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k \rangle$. Ortogonální projekce vektoru \mathbf{v} na podprostor W je rovná vektoru*

$$\mathbf{v}_W = \frac{\langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 + \frac{\langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 + \dots + \frac{\langle \mathbf{w}_k | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}_k\|^2} \mathbf{w}_k .$$

Jinými slovy, souřadnice \mathbf{v}_W vzhledem k bázi $B = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$ prostoru W jsou

$$[\mathbf{v}_W]_B = \left(\frac{\langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}_1\|^2}, \frac{\langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}_2\|^2}, \dots, \frac{\langle \mathbf{w}_k | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}_k\|^2} \right) .$$

V případě, že B je dokonce ortonormální, vzorec se dále zjednodušuje na

$$\mathbf{v}_W = \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}_2 + \dots + \langle \mathbf{w}_k | \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}_k .$$

Výraz na pravé straně je shodný (až na přeznačení) s výrazem z tvrzení 8.19 o souřadnicích vzhledem k ortonormální bázi. Skutečně, tvrzení 8.41 je jeho zobecněním. Pokud $\mathbf{v} \in W$, pak $\mathbf{v} = \mathbf{v}_W$ a vzorec dává vyjádření \mathbf{v} vzhledem k ortonormální bázi $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$ prostoru W . V případě, že \mathbf{v} ve W neleží, *stejný vzorec* nám dává souřadnice jeho ortogonální projekce.

Příklad 8.42. V \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem je $((1, 1, 2)^T, (2, 0, -1)^T)$ ortogonální množina. Ortogonální projekce vektoru $\mathbf{v} = (1, 2, 3)^T$ na rovinu $W =$

$\langle (1, 1, 2)^T, (2, 0, -1)^T \rangle$ je tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_W &= \frac{(1, 1, 2)(1, 2, 3)^T}{(1, 1, 2)(1, 1, 2)^T} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{(2, 0, -1)(1, 2, 3)^T}{(2, 0, -1)(2, 0, -1)^T} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{9}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 32 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Skutečně, chybový vektor $\mathbf{v}_{W^\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_W = \frac{1}{10}(-1, 5, -2)^T$ je kolmý na oba dva vektory $(1, 1, 2)^T, (2, 0, -1)^T$.

8.5.1. *Gram-Schmidtova ortogonalizace.* Již několikrát jsme si všimli, že je výhodné mít v prostoru ortogonální nebo ortonormální bázi. Vzhledem k ortonormální bázi se snadno počítají souřadnice (tvrzení 8.19), skalární součin přechází na standardní (tvrzení 8.21), dobře se počítají ortogonální doplňky (pozorování 8.28) a máme-li v podprostoru ortogonální bázi, můžeme na tento podprostor jednoduše počítat ortogonální projekce (tvrzení 8.41).

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces „vyrobí“ z jakékoliv báze $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ ortogonální bázi $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$ a to tak, že se pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ zachovávají lineární obaly prvních i vektorů, tj. $\langle \mathbf{v}_1 \rangle = \langle \mathbf{w}_1 \rangle$, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$, atd.

První vektor zvolíme $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$. Vektor \mathbf{w}_2 bude kolmice \mathbf{v}_2 na přímkou $\langle \mathbf{w}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 \rangle$, vektor \mathbf{w}_3 bude kolmice na rovinu $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, atd. Obecně, \mathbf{w}_i určíme jako kolmici na lineární obal předchozích vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{i-1}$.

OBRAZEK

V průběhu procesu se zachovává vlastnost $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_i \rangle$, protože nový vektor \mathbf{w}_i se volí

$$\mathbf{w}_i = (\mathbf{v}_i)_{W^\perp} = \mathbf{v}_i - (\mathbf{v}_i)_W$$

kde $W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{i-1} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1} \rangle$. Speciálně, $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$ generuje V , takže je to báze ($\dim(V)$)-prvková posloupnost generátorů je vždy bází, viz bod (2) v pozorování 5.57). Tato báze je ortogonální, protože \mathbf{w}_i se volí tak, aby byl kolmý k vektorům $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{i-1}$.

Protože $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{i-1}$ je ortogonální báze lineárního obalu těchto vektorů, máme pro vektor \mathbf{w}_i explicitní vzorec z tvrzení 8.41:

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i - (\mathbf{v}_i)_W = \mathbf{v}_i - \left(\frac{\langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 + \frac{\langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 + \dots + \frac{\langle \mathbf{w}_{i-1} | \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{w}_{i-1}\|^2} \mathbf{w}_{i-1} \right).$$

Pokud chceme najít ortonormální bázi, můžeme buď vektory znormovat na konci, nebo je normujeme průběžně, čímž nám také ve vzorci odpadají jmenovatelé.

Příklad 8.43. V podprostoru

$$W = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{(1, 2, 0, 1)^T, (1, -1, 1, 0)^T, (0, 1, 1, 3)^T\}$$

prostoru \mathbb{R}^4 se standardním skalárním součinem najdeme ortonormální bázi $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$. Použijeme Gram-Schmidtovou ortogonalizaci aplikovanou na vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Budeme průběžně normovat, vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ před znormováním označíme $\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \mathbf{w}'_3$. Uvědomme si, že nemusíme ověřovat lineární nezávislost vektorů \mathbf{v}_i (tj. že tvoří bázi W), pokud je totiž vektor \mathbf{v}_i lineární kombinací předchozích, pak \mathbf{w}_i ,

jakožto kolmice \mathbf{v}_i na lineární obal $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1} \rangle$, je nulový vektor.

$$\mathbf{w}'_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{w}'_1}{\|\mathbf{w}'_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}'_2 = \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 0, 1)(1, -1, 1, 0)^T \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{w}'_2}{\|\mathbf{w}'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{102}} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}'_3 = \mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{w}_1 - \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{w}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 0, 1)(0, 1, 1, 3)^T \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{102}}(7, -4, 6, 1)(0, 1, 1, 3)^T \frac{1}{\sqrt{102}} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{102} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{102} \begin{pmatrix} -120 \\ -48 \\ 72 \\ 216 \end{pmatrix} = \frac{4}{51} \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_3 = \frac{\mathbf{w}'_3}{\|\mathbf{w}'_3\|} = \frac{1}{\sqrt{1039}} \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Získali jsme ortonormální bázi

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{102}} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1039}} \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix} \right)$$

Z Gram-Schmidtovy ortogonalizace vidíme, že každý konečně generovaný prostor má ortonormální bázi, protože stačí zortogonalizovat a znormovat libovolnou bázi. Obecněji, každou ortogonální posloupnost můžeme rozšířit do ortogonální báze.

Věta 8.44. *Nechť V je konečně generovaný prostor se skalárním součinem $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Každá ortogonální (resp. ortonormální) posloupnost nenulových vektorů z V jde doplnit do ortogonální (resp. ortonormální) báze.*

Speciálně, každý konečně generovaný prostor se skalárním součinem má ortonormální bázi.

Důkaz. Nechť $C = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$ je ortogonální posloupnost nenulových vektorů. Tato posloupnost je lineárně nezávislá (viz tvrzení 8.14), proto jde doplnit vektory $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ na bázi V (viz důsledek 5.54). „Dokončením“ Gram-Schmidtovy ortogonalizace získáme vektory $\mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_n$ takové, že $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$ je ortogonální bázi. Je-li C navíc ortonormální, můžeme vektory \mathbf{w}_{k+1}, \dots znormovat a získáme ortonormální bázi.

Poznámka: Mohlo by se zdát, že jsme existenci ortonormální báze dokázali kruhem. Ve větě 8.29 o ortogonálním doplňku jsme existenci předpokládali a z této věty plyne existence ortogonální projekce a kolmice vektorů. Ke Gram-Schmidtově ortogonalizaci tuto větu ale nepotřebujeme, prostě definujeme vektory \mathbf{w}_i odvozeným vzorcem a získáme ortogonální bázi. \square

Gram-Schmidtova ortogonalizace je numericky nestabilní. Na ortogonalizaci se v některých praktických úlohách proto používají jiné, numericky stabilní algoritmy, například algoritmus využívající Householderovy transformace, nebo algoritmus využívající Givensovy rotace.

8.5.2. QR-rozklad. Ze vzorce pro Gram-Schmidtovu ortogonalizaci je vidět, že původní vektory \mathbf{v}_i lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_i$ (ty jsou navzájem kolmé a můžeme je volit jednotkové). Použijeme-li tento fakt na aritmetické vektory a standardní skalární součin, získáme vyjádření matice $(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n)$ jako součinu matice $(\mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2 | \dots | \mathbf{w}_n)$ a horní trojúhelníkové matice. Tomuto vyjádření říkáme QR-rozklad.

Tvrzení 8.45 (o QR-rozkladu). *Nechť A je reálná nebo komplexní matice typu $m \times n$ s lineárně nezávislými sloupci. Pak existuje matice Q typu $m \times n$ nad stejným tělesem s ortonormálními sloupci (vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu) a horní trojúhelníková matice R řádu n s kladnými reálnými prvky na hlavní diagonále taková, že platí $A = QR$.*

Důkaz. Označíme $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sloupcové vektory matice A . S těmito vektory provedeme Gram-Schmidtovu ortogonalizaci s průběžným normováním, tj.

$$\mathbf{w}'_i = \mathbf{v}_i - \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{w}_1 - \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{w}_2 - \dots - \langle \mathbf{w}_{i-1} | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{w}_{i-1}, \quad \mathbf{w}_i = \frac{\mathbf{w}'_i}{\|\mathbf{w}'_i\|}.$$

Z toho získáme vyjádření

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \mathbf{w}'_i + \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{w}_2 + \dots + \langle \mathbf{w}_{i-1} | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{w}_{i-1} \\ &= \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{w}_2 + \dots + \langle \mathbf{w}_{i-1} | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{w}_{i-1} + \|\mathbf{w}'_i\| \mathbf{w}_i \end{aligned}$$

Tyto vztahy můžeme maticově zapsat

$$(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n) = (\mathbf{w}_1 | \dots | \mathbf{w}_n) \begin{pmatrix} \|\mathbf{w}'_1\| & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_n \rangle \\ 0 & \|\mathbf{w}'_2\| & \dots & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \|\mathbf{w}'_n\| \end{pmatrix}$$

□

Příklad 8.46. Vypočítáme QR-rozklad reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Je potřeba provést Gram-Schmidtovu ortogonalizaci s průběžným normováním pro vektory $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1, -1, 0)^T$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1, 3)^T$. To jsme provedli v příkladu 8.43. Nalezli jsme vektory

$$(\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \mathbf{w}'_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{4}{51} \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix} \right)$$

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{102}} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1039}} \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix} \right)$$

a z průběhu ortogonalizace získáme vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'_1 &= \mathbf{v}_1, & \mathbf{w}_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{w}'_1 \\ \mathbf{w}'_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{w}_1, & \mathbf{w}_2 &= \frac{6}{\sqrt{102}} \mathbf{w}'_2 \\ \mathbf{w}'_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{5}{\sqrt{6}} \mathbf{w}_1 - \frac{5}{\sqrt{102}} \mathbf{w}_2, & \mathbf{w}_3 &= \frac{51}{4\sqrt{1039}} \mathbf{w}'_3 \end{aligned}$$

Z těchto vztahů vyjádříme vektory \mathbf{v}_i

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \sqrt{6} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{w}_1 + \frac{\sqrt{102}}{6} \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{v}_3 &= \frac{5}{\sqrt{6}} \mathbf{w}_1 + \frac{5}{\sqrt{102}} \mathbf{w}_2 + \frac{4\sqrt{1039}}{51} \mathbf{w}_3 \end{aligned}$$

a zapíšeme maticově

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{7}{\sqrt{102}} & -\frac{15}{\sqrt{1039}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{102}}{6} & -\frac{\sqrt{1039}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{102}}{6} & \frac{9}{\sqrt{1039}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{102}} & \frac{27}{\sqrt{1039}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{7}} \\ 0 & \frac{\sqrt{102}}{6} & \frac{5}{\sqrt{102}} \\ 0 & 0 & \frac{4\sqrt{1039}}{51} \end{pmatrix}$$

QR-rozklad jde použít na hledání řešení soustavy metodou nejmenších čtverců. Všimněte si, že pro matici Q v rozkladu $A = QR$ platí $Q^*Q = I_n$ (díky ortonormalitě sloupců), takže příslušnou normální soustavu rovnic můžeme zapsat

$$\begin{aligned} A^*Ax &= A^*\mathbf{b} \\ (QR)^*QR\mathbf{x} &= (QR)^*\mathbf{b} \\ R^*Q^*QR\mathbf{x} &= R^*Q^*\mathbf{b} \\ R^*R\mathbf{x} &= R^*Q^*\mathbf{b} \\ R\mathbf{x} &= Q^*\mathbf{b} . \end{aligned}$$

Poslední soustava má horní trojúhelníkovou matici, takže řešení můžeme spočítat zpětnou substitucí. Postup v této podobě můžeme samozřejmě použít jen pro matice A s lineárně nezávislými sloupci.

QR-rozklad se také používá v jednom z algoritmů na hledání vlastních čísel, viz ??.

8.6. Unitární a ortogonální matice.

Posledním pojmem kterým se budeme stručně zabývat je unitární matice. Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze standardní skalární součin v \mathbb{R}^n nebo \mathbb{C}^n . Čtvercová matice U řádu n určuje endomorfismus f_U tohoto prostoru. Pokud tento endomorfismus zachovává skalární součin (tj. také všechny metrické vlastnosti jako délky a úhly), nazýváme matici U *unitární*, v reálném případě též *ortogonální*. Tuto vlastnost lze vyjádřit mnoha ekvivalentními způsoby, například:

Tvrzení 8.47. *Nechť U je reálná (resp. komplexní) čtvercová matice řádu n . Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) f_U zachovává standardní skalární součin, tj. pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (resp. \mathbb{C}^n) platí $U\mathbf{u} \cdot U\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
- (2) f_U zachovává eukleidovskou normu, tj. pro libovolný vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (resp. \mathbb{C}^n) platí $\|U\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$.
- (3) f_U zobrazuje ortonormální bázi na ortonormální bázi.
- (4) $U^{-1} = U^*$, tj. $UU^* = U^*U = I_n$.
- (5) Řádky matice U tvoří ortonormální bázi.
- (6) Sloupce matice U tvoří ortonormální bázi.

Důkaz. Skutečnost, že řádky matice U jsou ortonormální (tedy tvoří ortonormální bázi) můžeme maticově zapsat $UU^* = I_n$. Podobně, sloupce jsou ortonormální právě tehdy, když $U^*U = I_n$. Triviálně tedy platí (4) \Rightarrow (5),(6). Naopak, pokud $UU^* = I_n$ nebo $U^*U = I_n$, pak U je regulární podle charakterizace regulárních matic ve větě 4.30 a platí $U^{-1} = U^*$. Body (4),(5),(6) jsou proto ekvivalentní.

(4) \Rightarrow (1). Pokud $UU^* = U^*U = I_n$, pak f_U zachovává standardní skalární součin:

$$U\mathbf{u} \cdot U\mathbf{v} = (U\mathbf{u})^*U\mathbf{v} = \mathbf{u}^*U^*U\mathbf{v} = \mathbf{u}^*\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} .$$

(1) \Rightarrow (2). Pokud f_U zachovává standardní skalární součin, pak také zachovává eukleidovskou normu, protože ta je určená skalárním součinem. Obšírněji: $\|U\mathbf{v}\| = \sqrt{U\mathbf{v} \cdot U\mathbf{v}} = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \|\mathbf{v}\|$. (1) \Rightarrow (3) je rovněž snadné.

(3) \Rightarrow (6). Kvůli (3) musí být $U\mathbf{e}_1, U\mathbf{e}_2, \dots, U\mathbf{e}_n$ ortonormální báze, což dává podmínku (6).

K dokončení důkazu stačí zdůvodnit (2) \Rightarrow (1), tedy, že zachování normy je postačující podmínkou pro zachování skalárního součinu. To plyne z polarizačních identit, které říkají, že skalární součin je určen normou. Obšrněji, protože U zachovává normu, dostaneme z bodu (4) tvrzení 8.7

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(U\mathbf{u} \cdot U\mathbf{v}) &= \frac{1}{2}(\|U\mathbf{u} + U\mathbf{v}\|^2 - \|U\mathbf{u}\|^2 - \|U\mathbf{v}\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|U(\mathbf{u} + \mathbf{v})\|^2 - \|U\mathbf{u}\|^2 - \|U\mathbf{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2) \\ &= \operatorname{Re}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Rovnost imaginárních částí dostaneme podobně z polarizační identity ve cvičeních. \square

Definice 8.48. Reálnou (resp. komplexní) čtvercovou matici splňující ekvivalentní podmínky z předchozího tvrzení nazýváme *ortogonální* (resp. *unitární*).

Standardní pojmenování ortogonální matice je poněkud matoucí, smysluplnější by bylo ortonormální. Hezkou vlastností těchto matic je snadné určení inverzní matice – stačí vzít podle bodu (4) matici hermitovsky sdruženou. Příklady ortogonálních matic jsou matice rotací a zrcadlení podle podprostorů.

Součinem unitárních matic stejných řádů je opět unitární matice. Buď můžeme ověřit algebraicky nebo nahlédnout geometricky z toho, že složením dvou zobrazení zachovávajících skalární součin (nebo jen normu) je zobrazení, které skalární součin rovněž zachovává. Detaily si promyslete jako cvičení. Rovněž jako cvičení dokažte, že jakékoliv zobrazení $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ zachovávající skalární součin je lineární.

8.6.1. *Unitární zobrazení.* Pro jednoduchost jsme se zabývali pouze standardním skalárním součinem. Obecněji se zobrazení zachovávající skalární součin nazývá *unitární*. Matice takového zobrazení vzhledem k ortonormálním bázím má ortonormální sloupce. Je-li toto zobrazení navíc izomorfismem (k tomu stačí, aby bylo na, protože prosté je vždy), pak je jeho matice vzhledem k ortonormálním bázím unitární. Tyto vlastnosti přenecháme čtenáři jako cvičení.

Cvičení

1. Jsou-li A, B matice nad tělesem \mathbb{C} typu $m \times n$, C je matice typu $n \times p$ nad \mathbb{C} a $a \in \mathbb{C}$, pak

- (1) $(A + B)^* = A^* + B^*$,
- (2) $(aA)^* = \bar{a}A^*$,
- (3) $(A^*)^* = A$.
- (4) $(BC)^* = C^*B^*$.

Dokažte.

2. Nechť A je čtvercová matice nad \mathbb{C} . Dokažte, že $\det(A^*) = (\det(A))^*$.

3. Nechť A je regulární matice nad \mathbb{C} . Dokažte, že $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

4. Nechť A je čtvercová matice řádu n nad \mathbb{C} . Dokažte, že zobrazení $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definované vztahem $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* A \mathbf{v}$ splňuje podmínky (SL1) a (SL2).

5. Nechť A je čtvercová matice řádu n nad \mathbb{C} . Dokažte, že zobrazení $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definované vztahem $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* A \mathbf{v}$ splňuje podmínku (SCS) právě tehdy, když A je hermitovská (tj. $A^* = A$).

6. Nechť B je regulární matice řádu n nad \mathbb{C} a $A = B^* B$. Dokažte, že zobrazení $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definované vztahem $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* A \mathbf{v}$ je skalární součin.

7. Dokažte, že v libovolném vektorovém prostoru se skalárním součinem $\langle | \rangle$ platí

- $\operatorname{Re}(\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)$
- $\operatorname{Re}(\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{4}(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)$
- $\operatorname{Im}(\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2)$
- $\operatorname{Im}(\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - i\mathbf{v}\|^2)$
- $\operatorname{Im}(\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{4}(\|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - i\mathbf{v}\|^2)$

$\operatorname{Im}(x)$ značí imaginární část čísla $x \in \mathbb{C}$.

8. Nad reálnými čísly lze Cauchy-Schwarzovu nerovnost dokázat také následujícím způsobem: Výraz $\|\mathbf{u} + t\mathbf{v}\|^2$ definuje kvadratickou funkci. Protože musí být nezáporná, její diskriminant je nekladný a to dává C-S nerovnost. Doplňte detaily.

9. Kdy nastává v trojúhelníkové nerovnosti rovnost?

10. Dokažte, že norma pochází ze skalárního součinu právě tehdy, když splňuje rovnoběžníkové pravidlo.

11. Dokažte, že platí-li $M \perp N$, pak $M \cap N \subseteq \{\mathbf{o}\}$.

12. Dokažte pozorování 8.26.

13. Dokažte, že prostorech nad \mathbb{R} se skalárním součinem platí opačná implikace v Pythagorově větě, tj. pokud $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$, pak $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Platí opačná implikace v prostorech nad \mathbb{C} ?

14. Nechť $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení a $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ je doplněk $\operatorname{Ker} f$, tj. $\operatorname{Ker} f \oplus \mathbf{U} = \mathbf{V}$. Dokažte, že zúžení f na \mathbf{U} je izomorfismus z \mathbf{U} na obraz f .

15. Dokažte, že Gramova matice vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$ je regulární právě tehdy, když je $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$ lineárně nezávislá posloupnost.

16. Dokažte, že determinant Gramovy matice vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n \in \mathbb{R}^n$ je rovný druhé mocnině determinantu matice

$$(\mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2 | \dots | \mathbf{w}_n) .$$

Interpretujte geometricky.

17. Pomocí Gram-Schmidtovi ortogonalizace dokažte body (2) a (3) věty 8.29 za předpokladu, že W je konečně generovaný (prostor V konečně generovaný být nemusí).

18. Využijte QR -rozklad na důkaz následující nerovnosti pro komplexní matici A typu $m \times n$ a standardní skalární součin:

$$\det(A^* A) \leq \|A_{*1}\|^2 \|A_{*2}\|^2 \dots \|A_{*n}\|^2$$

Připomeňme si geometrický význam determinantu $\det(A^* A)$ a interpretujte nerovnost geometricky.

19. Dokažte, že součinem unitárních matic stejných řádů je unitární matice.

20. Dokažte, že každé zobrazení $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ zachovávající skalární součin je lineární.

21. Dokažte, že matice unitárního zobrazení vzhledem k ortonormálním bázím má ortonormální sloupce.

22. Dokažte, že unitární zobrazení je vždy prosté.

9. VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY

V této kapitole se budeme zabývat výhradně čtvercovými maticemi.

9.1. Několik úloh. Při řešení některých úloh je třeba umět spočítat libovolnou mocninu A^k matice A . Setkali jsme se s tím už v části 4.5.1. Tam jsme odvodili, že pro $(k+2)$ -hý člen Fibonacciho posloupnosti a_{k+2} platí

$$\begin{pmatrix} a_{k+2} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = C^k \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = C^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ukážeme si ještě dvě další úlohy, které vedou na výpočet mocnin čtvercové matice.

Příklad 9.1. V nějaké komunitě je vysoká nezaměstnanost. Z dlouhodobých dat je známo, že během čtvrt roku jedna desetina zaměstnaných přijde o místo, dále že z krátkodobě nezaměstnaných (tj. těch, kteří jsou nezaměstnaní méně než půl roku) během čtvrt roku 30% zaměstnání najde, 40% jich zůstane krátkodobě nezaměstnaných, zatímco zbylých 30% jich přejde mezi dlouhodobě nezaměstnané (tj. déle než půl roku bez práce). A z dlouhodobě nezaměstnaných jedna pětina práci najde a zbylých 80% zůstane nezaměstnaných. V současné době je míra nezaměstnanosti 20%, z toho tři čtvrtiny jsou dlouhodobě nezaměstnaní a jedna čtvrtina přišla o práci v posledním půl roce, patří tedy mezi krátkodobě nezaměstnaní. Chceme vědět, jak se bude nezaměstnanost dlouhodobě vyvíjet.

Rozložení (ne)zaměstnanosti budeme zapisovat jako vektor $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, kde b_1 je podíl zaměstnaných v populaci, b_2 je podíl krátkodobě nezaměstnaných a b_3 je podíl dlouhodobě nezaměstnaných. V našem konkrétním případě je počáteční rozložení nezaměstnanosti $\mathbf{b} = (0.8, 0.05, 0.15)^T$.

Nezaměstnanost o čtvrt roku později vyjádříme jako součin vhodné matice A s vektorem \mathbf{b} . První sloupcový vektor bude vyjadřovat, jak se na nezaměstnanosti o čtvrt roku později bude podílet skupina v současné době zaměstnaných. Víme, že 90% z nich bude i nadále zaměstnáno a 10% během té doby ztratí práci a přejde do kategorie krátkodobě zaměstnaných. Jejich podíl tak vyjádříme jako

$$0,8 \begin{pmatrix} 0,9 \\ 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Krátkodobě nezaměstnaní přispějí do (ne)zaměstnanosti o čtvrt roku později takto:

$$0,05 \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

a dlouhodobě nezaměstnaní

$$0,15 \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0 \\ 0,8 \end{pmatrix}.$$

Rozložení (ne)zaměstnanosti po třech měsících tak spočteme jako

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,05 \\ 0,15 \end{pmatrix} .$$

Označíme-li matici v posledním vyjádření A , míra nezaměstnanosti po půl roce bude $A^2\mathbf{b}$, po třech čtvrtletích $A^3\mathbf{b}$, po k čtvrtletích to bude $A^k\mathbf{b}$. Matici A nazýváme *přechodová matice*.

Příklad 9.2. Nezaměstnaní se občas pokusí vyhrát nějaké peníze na skořápkářích. Jde o kvalifikované skořápkáře, kteří hrají se čtyřmi kalíšky, pod kterými pohybují jednou kuličkou. Náš nezaměstnaný by rád věděl, kde je největší pravděpodobnost, že se kulička bude nacházet po k tazích. Tahem rozumíme jednu změnu polohy kuličky pod sousední kalíšek.

OBRAZEK

Označme si $p_j(k)$ pravděpodobnost, že po k tazích se kulička nachází pod j -tým kalíškem. Skořápkáři volí své tahy náhodně a nezávisle na předchozích. Každý z možných tahů provedou se stejnou pravděpodobností. Je-li kulička po $k-1$ tazích pod kalíškem 1 (vlevo), bude po k -tém tahu s pravděpodobností 1 pod kalíškem 2, existuje pouze jeden tah, který polohu kuličky změní. Analogicky, je-li kulička pod kalíškem 4 (vpravo), s pravděpodobností 1 se posune pod kalíšek 3. Kulička, která byla původně pod kalíškem 2 se přesune buď pod kalíšek 1 nebo pod kalíšek 3, vždy s pravděpodobností $1/2$. Podobně pro kuličku pod kalíškem 3. Pro $k \geq 1$ platí tedy rovnosti

$$\begin{aligned} p_1(k) &= \frac{1}{2}p_2(k-1) , \\ p_2(k) &= p_1(k-1) + \frac{1}{2}p_3(k-1) , \\ p_3(k) &= \frac{1}{2}p_2(k-1) + p_4(k-1) , \\ p_4(k) &= \frac{1}{2}p_3(k-1) . \end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$\begin{pmatrix} p_1(k) \\ p_2(k) \\ p_3(k) \\ p_4(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(k-1) \\ p_2(k-1) \\ p_3(k-1) \\ p_4(k-1) \end{pmatrix} .$$

Označíme-li $\mathbf{p}_k = (p_1(k), p_2(k), p_3(k), p_4(k))^T$ a přechodovou matici v poslední rovnosti A , dostaneme $\mathbf{p}_k = A\mathbf{p}_{k-1}$, tj. $\mathbf{p}_k = A^k\mathbf{p}_0$. Vektor \mathbf{p}_0 se rovná jednomu z vektorů kanonické báze $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^4$, pokud počáteční polohu kuličky známe. Pokud ji neznáme, můžeme položit $\mathbf{p}_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^T$.

Předchozí úlohy jsou příkladem *migračních úloh*. Následující příklad je ukázkou *difuzní úlohy*, která je spojitou verzí migračních úloh. Pro její řešení sice nepotřebujeme umět počítat libovolnou mocninu matice, nicméně metody, které se pro mocnění matic naučíme používat, vedou také přímo k řešení difuzních úloh.

Příklad 9.3. Přes buněčnou blánu mezi dvěma buňkami přechází nějaká substance, např. vápník, alkohol, apod. Na počátku v čase $t = 0$ je do jedné buňky injektováno jednotkové množství substance. Víme, že rychlost šíření substance přes buněčnou

blánu z jedné buňky do druhé je přímo úměrná množství substance v buňce, ze které se substance šíří, koeficient rychlosti šíření z buňky 1 do buňky 2 je $r > 0$, a z buňky 2 do buňky 1 je koeficient rovný $s > 0$. Máme určit množství substance v obou buňkách v čase t .

OBRAZEK

Označme si $u_1(t)$, resp. $u_2(t)$, množství substance v buňce 1, resp. 2, v čase t . Zvolme si nějaký krátký časový úsek h . Známe-li množství $u_1(t)$ a $u_2(t)$, pak platí přibližně

$$\begin{aligned} u_1(t+h) &= u_1(t) + su_2(t)h - ru_1(t)h, \\ u_2(t+h) &= u_2(t) + ru_1(t)h - su_2(t)h. \end{aligned}$$

Soustavu si přepíšeme do podoby

$$\begin{aligned} \frac{u_1(t+h) - u_1(t)}{h} &= su_2(t) - ru_1(t), \\ \frac{u_2(t+h) - u_2(t)}{h} &= ru_1(t) - su_2(t). \end{aligned}$$

Vezmeme-li v obou rovnicích limitu pro $h \rightarrow 0$, dostaneme

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= -ru_1(t) + su_2(t), \\ u_2'(t) &= ru_1(t) - su_2(t). \end{aligned}$$

Maticový zápis této soustavy je

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & s \\ r & -s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Současně víme, že $(u_1(0), u_2(0))^T = (1, 0)^T$.

Ukázali jsme si dva důležité typy rovnic.

Definice 9.4. Je-li A matice řádu n nad tělesem \mathbf{T} a $\mathbf{u}_0 = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbf{T}^n$, pak soustavu $\mathbf{u}_k = A\mathbf{u}_{k-1}$ nazýváme *diferenční rovnice*. Jejím řešením je $\mathbf{u}_k = A^k \mathbf{u}_0$.

Jsou-li $u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, reálné funkce reálné proměnné, pak soustavu

$$(u_1'(t), u_2'(t), \dots, u_n'(t))^T = A \cdot (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$$

nazýváme *soustava lineárních diferenciálních rovnic*, podmínku $(u_1(0), u_2(0), \dots, u_n(0))^T = \mathbf{u}_0$ nazýváme *počáteční podmínka* pro tuto soustavu. Stručně budeme soustavu n lineárních diferenciálních rovnic o n neznámých funkcích zapisovat $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$.

Soustavy rovnic, ve kterých vystupují neznámé funkce spolu se svými derivacemi, jsou hlavním matematickým nástrojem při studiu fyzikálních procesů. Diferenční rovnice se naopak používají při studiu procesů ve společenských vědách. V obou případech zkoumáme jevy, které se vyvíjejí v čase.

9.2. Vlastní čísla a vlastní vektory. Začneme stručným opakováním matic lineárních operátorů.

Každá čtvercová matice A řádu n nad tělesem \mathbf{T} určuje lineární operátor $f_A : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$ předpisem $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Matice $[f_A]_K^K$ lineárního zobrazení f_A vzhledem ke kanonickým bázím K v \mathbf{T}^n se rovná A . Podle věty o matici složeného zobrazení platí, že matice A^2 je maticí složeného zobrazení $f_A \circ f_A : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$ vzhledem ke kanonickým bázím. Umocňování matice tak odpovídá skládání (iterování) zobrazení f_A .

Každý lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru dimenze n nad tělesem \mathbf{T} je určený svojí maticí $[f]_D^C$ vzhledem k nějakým bázím C, D ve \mathbf{V} . Při zkoumání iterací operátoru f je výhodné zvolit obě báze stejné. Matici $[f]_C^C$ budeme nazývat pohodlněji *matice lineárního operátoru f vzhledem k bázi C* . Je-li A matice f vzhledem k bázi C , pak pro každé kladné celé k platí, že A^k je maticí mocniny f^k operátoru f vzhledem k bázi C , tj. $A^k = [f^k]_C^C$.

Zvolíme-li jinou bázi D prostoru \mathbf{V} , pak podle věty o matici složeného zobrazení a matici inverzního zobrazení platí

$$[f]_D^D = [\text{id}]_D^C \cdot [f]_C^C \cdot [\text{id}]_C^D = ([\text{id}]_C^D)^{-1} \cdot [f]_C^C \cdot [\text{id}]_D^D,$$

kde matice $[\text{id}]_C^D$ je matice přechodu od báze D k bázi C . A protože každá regulární matice řádu n nad \mathbf{T} je maticí přechodu od báze D k nějaké jiné bázi C prostoru \mathbf{V} (viz cvičení), každá matice $R^{-1} \cdot [f]_C^C \cdot R$, kde R je regulární matice, je maticí f vzhledem k nějaké bázi prostoru \mathbf{V} .

Definice 9.5. Dvě čtvercové matice A, B téhož řádu nad tělesem \mathbf{T} se nazývají *podobné*, pokud existuje regulární matice R taková, že $B = R^{-1}AR$.

Relace podobnosti matic je ekvivalence na množině všech čtvercových matic téhož řádu n nad tělesem \mathbf{T} , důkaz ponecháme jako cvičení. Dvě matice A, B jsou maticemi téhož lineárního zobrazení $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ vzhledem k různým bázím prostoru \mathbf{V} právě když jsou podobné. Zkoumáme-li vlastnosti f , hledáme takovou bázi C , aby matice $[f]_C^C$ byla co nejjednodušší. Ideální, ale ne vždy možné, je najít bázi C , pro kterou je matice $[f]_C^C$ diagonální.

Definice 9.6. Lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ definovaný na konečně-generovaném prostoru \mathbf{V} nazýváme *diagonalizovatelný*, pokud má vzhledem k nějaké bázi diagonální matici.

Diagonální matice budou v následující části hrát důležitou roli, zavedeme si pro ně speciální označení. Diagonální matici $D = (d_{ij})$ řádu n budeme zapisovat $\text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$ nebo ještě stručněji $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Diagonální matice umíme snadno umocnit.

$$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k).$$

Je-li $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ diagonalizovatelný operátor a C je báze ve \mathbf{V} , pro kterou je matice

$$[f]_C^C = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) ,$$

pak snadno najdeme matici operátoru f^k vzhledem k téže bázi C :

$$[f^k]_C^C = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k) .$$

Je-li $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ taková báze \mathbf{V} , pro kterou platí, že $[f]_C^C = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, platí pro každý vektor \mathbf{u}_j rovnost

$$f(\mathbf{u}_j) = \lambda_j \mathbf{u}_j .$$

Tím se dostáváme k základní definici této kapitoly.

Definice 9.7. Je-li $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na vektorovém prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} , pak číslo $\lambda \in \mathbf{T}$ nazýváme *vlastní číslo* operátoru f , pokud existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, pro který platí

$$f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} .$$

Je-li λ vlastní číslo operátoru f , pak libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, pro který platí $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$, nazýváme *vlastní vektor* operátoru f příslušný vlastnímu číslu λ .

Je důležité uvědomit si geometrický význam definice vlastního čísla operátoru. Číslo $\lambda \in \mathbf{T}$ je vlastní číslo operátoru f , pokud existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, který operátor f zobrazí na λ -násobek vektoru \mathbf{x} , tj. do směru vektoru \mathbf{x} . V případě prostoru nad reálnými čísly tak operátor f vektor \mathbf{x} buď „natahuje“ (pokud $\lambda > 1$) nebo „smršťuje“ (pokud $0 < \lambda < 1$), případně „obrací“ (pokud $\lambda < 0$).

Pro každé číslo $\lambda \in \mathbf{T}$ platí, že $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o} = \lambda\mathbf{o}$. To ale neznamená, že λ je vlastní číslo f . K tomu, aby λ bylo vlastní číslo f , je nutná existence **nenulového** prvku \mathbf{x} , pro který platí $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. V takovém případě pak i nulový vektor je vlastním vektorem příslušným λ . Číslo 0 může být vlastním číslem operátoru f , k tomu je ale nutná (a stačí) existence vektoru $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, pro který platí $f(\mathbf{x}) = 0\mathbf{x} = \mathbf{o}$, což nastává právě když $\text{Ker}(f) \neq \{\mathbf{o}\}$, neboli když má operátor f nenulové jádro.

Všimněte si, že v definici nepředpokládáme, že prostor \mathbf{V} má konečnou dimenzi. Také operátory na prostorech, které nejsou konečně generované, mohou mít vlastní čísla a vlastní vektory. Důležitý příklad si ukážeme později v této kapitole.

Z definice vlastních čísel a vektorů plyne, že $[f]_C^C$ je diagonální matice právě tehdy když každý vektor báze C je vlastní vektor operátoru f . Platí proto následující tvrzení.

Tvrzení 9.8. *Lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} je diagonalizovatelný právě tehdy, když má prostor \mathbf{V} bázi složenou z vlastních vektorů operátoru f .*

Použijeme-li definici vlastního čísla a vektoru lineárního operátoru na operátor $f_A : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$ určený maticí A , pak dostaneme, že číslo $\lambda \in \mathbf{T}$ je vlastní číslo operátoru f_A a aritmetický vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$ je vlastní vektor f_A příslušný vlastnímu číslu λ právě když $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Rovnost $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ definuje vlastní čísla a vlastní vektory matice A .

Definice 9.9. Je-li A čtvercová matice řádu n nad tělesem \mathbf{T} , pak skalár $\lambda \in \mathbf{T}$ nazýváme *vlastní číslo* matice A , pokud existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$ takový, že

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} .$$

Je-li λ vlastní číslo matice A , pak libovolný vektor \mathbf{x} , pro který platí $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, nazýváme *vlastní vektor* matice A příslušný vlastnímu číslu λ .

Stejně jako v případě lineárního operátoru může být číslo 0 vlastním číslem matice A . Podle definice je jím právě když existuje **nenulový** vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$, pro který platí $A\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = \mathbf{o}$, což nastává právě když matice A je singularní. Dostáváme tak další charakterizaci regulárních matic.

Tvrzení 9.10. *Matice A je regulární právě tehdy, když 0 není vlastní číslo A .*

Lineární operátor $f_A : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$ určený maticí A řádu n nad \mathbf{T} je diagonalizovatelný právě když existuje báze B prostoru \mathbf{T}^n složená z vlastních vektorů operátoru f_A , tj. z vlastních vektorů matice A . Matice $[f_A]_B^B$ je tedy diagonální a podobná matici $[f_A]_K^K$, kde K je kanonická báze \mathbf{T}^n . Víme, že $[f_A]_K^K = A$, operátor f_A je tedy diagonalizovatelný právě když je matice A podobná nějaké diagonální matici. To nás opravňuje k následující definici.

Definice 9.11. Čtvercová matice A řádu n nad tělesem \mathbf{T} se nazývá *diagonalizovatelná* právě když existuje regulární matice R nad tělesem \mathbf{T} taková, že $R^{-1}AR$ je diagonální matice.

Je-li A diagonalizovatelná matice řádu n a R regulární matice taková, že $R^{-1}AR = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, pak platí rovnost $AR = RD$. Porovnáme-li j -té sloupce na obou stranách, dostaneme

$$AR_{*j} = \lambda_j R_{*j}$$

pro každé $j = 1, 2, \dots, n$. To znamená, že j -tý sloupec R_{*j} matice R je vlastním vektorem matice A příslušným vlastním vektoru λ_j . Toto důležité pozorování si zformulujeme jako tvrzení.

Tvrzení 9.12. Je-li A diagonalizovatelná matice řádu n nad tělesem \mathbf{T} a $R^{-1}AR = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ pro regulární matici R , pak j -tý sloupec matice R je vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu λ_j pro každé $j = 1, \dots, n$.

U některých lineárních operátorů na prostoru \mathbb{R}^2 se standardním skalárním součinem můžeme vlastní čísla a vlastní vektory „vidět“.

Příklad 9.13. Osová symetrie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ určená přímkou generovanou nenulovým vektorem $(a, b)^T$ má jedno vlastní číslo 1, neboť všechny vektory na ose symetrie se zobrazí samy do sebe a jsou to tedy vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 1. Vektory na přímce kolmé na osu symetrie (generované např. vektorem $(-b, a)$) se zobrazují do vektorů opačných, jsou to tedy vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu -1 . Báze prostoru \mathbb{R}^2 složená z vlastních vektorů osově symetrie f se tedy rovná $B = (a, b)^T, (-b, a)^T$. Matice $[f]_B^B$ operátoru f vzhledem k bázi B se rovná $\text{diag}(1, -1)$ a matice $[f]_K^K$ téhož operátoru vzhledem ke kanonické bázi se rovná

$$[f]_K^K = [\text{id}]_K^B [f]_B^B [\text{id}]_B^K = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1}.$$

OBRAZEK

Ortogonalní projekce g na přímku generovanou $(a, b)^T$ má také dvě vlastní čísla. Jedno je opět 1, protože vektory přímky, na kterou projektujeme, se zobrazují na sebe. Druhé vlastní číslo je 0, protože všechny vektory z přímky kolmé na přímku projekce se zobrazují do nulového vektoru \mathbf{o} . Bázi složenou z vlastních vektorů projekce g můžeme opět zvolit jako $B = (a, b)^T, (-b, a)^T$, matice $[g]_B^B = \text{diag}(1, 0)$ a

$$[g]_K^K = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1}.$$

OBRAZEK

Rotace kolem počátku souřadnic o úhel φ nemá žádné reálné vlastní číslo, pokud φ není násobkem π , neboť v takovém případě se žádný nenulový vektor nezobrazí na svůj násobek.

OBRAZEK

Dilatace s koeficientem k , která zobrazuje každý vektor \mathbf{x} do jeho k -násobku $k\mathbf{x}$, má jediné vlastní číslo k , každý vektor \mathbb{R}^2 je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu k . Mezi dilatace řadíme i mezí případ $k = 0$ (konstantní zobrazení do nulového vektoru), $k = 1$, což je identické zobrazení, a také rotace o 0° , a $k = -1$ neboli středová symetrie (a také rotace o úhel 180°).

OBRAZEK

Na závěr této části si ještě ujasníme vztah mezi vlastními čísly a vlastními vektory lineárního operátoru $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} a vlastními čísly a vlastními vektory matice $[f]_B^B$ tohoto operátoru vzhledem k nějaké bázi B prostoru \mathbf{V} . Je-li λ vlastní číslo f a \mathbf{x} vlastní vektor f příslušný λ , platí $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. Podle tvrzení 7.6 platí

$$[f(\mathbf{x})]_B = [f]_B^B[\mathbf{x}]_B .$$

a podle tvrzení popisujícího vztah mezi operacemi ve vektorovém prostoru a souřadnicemi vektorů vzhledem k nějaké bázi (tvrzení 5.64) dále platí

$$[f(\mathbf{x})]_B = [\lambda\mathbf{x}]_B = \lambda[\mathbf{x}]_B ,$$

a tedy

$$[f]_B^B[\mathbf{x}]_B = \lambda[\mathbf{x}]_B .$$

Poslední rovnost platí speciálně i pro nějaký nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ (protože λ je vlastní číslo f). Odtud plyne, že číslo λ je vlastní číslo matice $[f]_B^B$ a $[\mathbf{x}]_B$ je vlastní vektor matice $[f]_B^B$ příslušný vlastnímu číslu λ . Následující tvrzení ukazuje, že platí také opačná implikace.

Tvrzení 9.14. *Nechť \mathbf{V} je konečně generovaný prostor nad tělesem \mathbf{T} , $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ je lineární operátor a $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ je libovolná báze ve \mathbf{V} . Potom platí, že číslo $\lambda \in \mathbf{T}$ je vlastní číslo operátoru f a \mathbf{x} je vlastní vektor f příslušný vlastnímu číslu λ právě když λ je vlastní číslo matice $[f]_B^B$ a $[\mathbf{x}]_B$ je vlastní vektor matice $[f]_B^B$ příslušný vlastnímu číslu λ .*

Důkaz. Jednu implikaci jsme dokázali už před formulací tvrzení. K důkazu opačné implikace je třeba si uvědomit, že každý vektor $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbf{T}^n$ je vektorem souřadnic $[\mathbf{x}]_B$ vzhledem k bázi B pro jednoznačně určený vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, tímto vektorem je $\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_n\mathbf{u}_n$.

Je-li λ vlastní číslo matice $[f]_B^B$ a pro $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ platí, že $[\mathbf{x}]_B$ je vlastní vektor matice $[f]_B^B$ příslušný λ , pak platí

$$[f]_B^B[\mathbf{x}]_B = \lambda[\mathbf{x}]_B .$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$[f(\mathbf{x})]_B = [f]_B^B[\mathbf{x}]_B = \lambda[\mathbf{x}]_B = [\lambda\mathbf{x}]_B .$$

Protože souřadnice vektoru vzhledem k nějaké bázi určují vektor jednoznačně, plyne odtud $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. Z předpokladu, že λ je vlastní číslo matice $[f]_B^B$, plyne existence nenulového vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, pro který platí $[f]_B^B[\mathbf{x}]_B = \lambda[\mathbf{x}]_B$. Číslo λ je tedy vlastní číslo operátoru f a \mathbf{x} je vlastní vektor příslušný λ . \square

Vlastní čísla a vlastní vektory lineárního operátoru na konečně generovaném prostoru popisují geometrické vlastnosti tohoto zobrazení. V dimenzích větších než 3, kdy geometrickou intuici nemůžeme použít, musíme vlastní čísla nějak spočítat. Uděláme to pomocí matice lineárního operátoru vzhledem k nějaké bázi prostoru \mathbf{V} .

9.3. Charakteristický polynom. Jak najdeme vlastní čísla a vlastní vektory matice A řádu n nad tělesem \mathbf{T} ? Má-li být $\lambda \in \mathbf{T}$ vlastní číslo matice A , musí existovat nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$ takový, že $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Poslední rovnost si přepíšeme ve tvaru $(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{o}$. To znamená, že matice $A - \lambda I_n$ není regulární, homogenní soustava s touto maticí má nenulové řešení. Matice $A - \lambda I_n$ není regulární právě když je singularní, což nastává právě tehdy, když $\det(A - \lambda I_n) = 0$. A platí-li $\det(A - \lambda I_n) = 0$,

pak množina všech vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu λ se rovná jádru $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ matice $A - \lambda I_n$. Dokázali jsme tak větu, pomocí které můžeme vlastní čísla a vlastní vektory matice najít.

Věta 9.15. *Je-li A čtvercová matice řádu n nad tělesem \mathbf{T} , pak $\lambda \in \mathbf{T}$ je vlastní číslo matice A právě když platí $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Množina všech vlastních vektorů matice A příslušných vlastnímu číslu λ se rovná jádru $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ matice $A - \lambda I_n$.*

Použijeme-li pro vyjádření $\det(A - \lambda I_n)$ definici determinantu, vidíme, že $\det(A - \lambda I_n)$ je polynom nejvýše n -tého stupně v proměnné λ . Jeho kořeny jsou vlastní čísla matice A . Následující tvrzení ukazuje, jak rychle spočítat aspoň nějaké koeficienty charakteristického polynomu.

Tvrzení 9.16. *Je-li $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ charakteristický polynom matice $A = (a_{ij})$ řádu n , pak platí*

- (1) *koeficient u λ^n se rovná $(-1)^n$,*
- (2) *koeficient u λ^{n-1} se rovná $(-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$, tj. rovná se součtu diagonálních prvků matice A vynásobenému koeficientem $(-1)^{n-1}$,*
- (3) *absolutní člen polynomu $p(\lambda)$ se rovná $\det(A)$.*

Důkaz. První dva body dokážeme společně. Označme $B = A - \lambda I_n$. Má-li se po roznásobení součinu $\text{sgn}(\pi)b_{\pi(1),1}b_{\pi(2),2} \dots b_{\pi(n),n}$ z definice determinantu vyskytnout mocnina λ^{n-1} nebo mocnina λ^n , musíme vybrat aspoň $n-1$ prvků z hlavní diagonály matice B , protože mimo hlavní diagonálu se λ nevyskytuje. To znamená, že permutace π musí být identická permutace se znaménkem 1. Po roznásobení

$$b_{11}b_{22} \dots b_{nn} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$$

tak dostáváme

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) + \dots,$$

kde další členy obsahují nejvýše mocniny λ^{n-2} . Tím jsou dokázány body 1. a 2.

Pokud jde o absolutní člen, tj. koeficient u λ^0 , rovná se $p(0)$. Absolutní člen charakteristického polynomu se tak rovná $\det(B) = \det(A - 0I_n) = \det(A)$. \square

Definice 9.17. Polynom $\det(A - \lambda I_n)$ se nazývá *charakteristický polynom matice A* .

Příklad 9.18. V části 8.4 jsme si odvodili, že ortogonální projekce v \mathbb{R}^2 na přímku určenou vektorem $(1, 2)^T$ má vzhledem ke kanonické bázi matici

$$A = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1, 2)}{\|(1, 2)^T\|^2} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom matice A se rovná $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - \lambda$. Matice A má tedy dvě vlastní čísla 1 a 0, což je v souladu s geometrickým náhledem z příkladu 9.13. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 1 leží v jádru matice

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} -4/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix},$$

který tvoří, jak snadno nahlédneme, lineární obal vektoru $(1, 2)^T$, tj. vektory tvořící přímku, na kterou projektujeme.

Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 0 tvoří jádro matice A a to tvoří všechny násobky vektoru $(-2, 1)$. I v případě vlastních vektorů jsme dostali stejný výsledek jaký jsme nahlédli v příkladu 9.13.

Příklad 9.19. Spočítáme vlastní čísla rotace v \mathbb{R}^2 o úhel $\pi/2$ v kladném směru. Matice této rotace vzhledem ke kanonické bázi se rovná

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

její charakteristický polynom se rovná $\lambda^2 + 1$. Vidíme, že matice A nemá žádné reálné vlastní číslo a tedy ani žádný vlastní vektor v \mathbb{R}^2 . Považujeme-li matici A za matici nad komplexními čísly, má dvě vlastní čísla i a $-i$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu i jsou všechny komplexní násobky vektoru $(i, 1)^T$ a vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $-i$ jsou všechny komplexní násobky vektoru $(i, -1)^T$. Vektory $(i, 1)^T$ a $(i, -1)^T$ tvoří bázi \mathbb{C}^2 , matice A je tedy diagonalizovatelná jako komplexní matice, není ale diagonalizovatelná jako matice nad \mathbb{R} .

Ukážeme si ještě příklad matice řádu 2 nad \mathbb{R} , pro kterou neexistuje báze složená z vlastních vektorů ani v \mathbb{R}^2 ani v \mathbb{C}^2 .

Příklad 9.20. Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom $\det A - \lambda I_2 = (\lambda - 1)^2$ a tedy jediné vlastní číslo 1. K němu příslušné vlastní vektory tvoří nulový prostor matice $A - I_2$, který má dimenzi 1. V prostoru \mathbb{R}^2 ani v prostoru \mathbb{C}^2 neexistuje báze složená z vlastních vektorů matice A a matice tedy není diagonalizovatelná. Příčinou v tomto případě není neexistence vlastních čísel, ale **nedostatek vlastních vektorů**.

Příklad 9.21. Najdeme vlastní čísla a vlastní vektory matice C , pomocí které vyjadřujeme členy Fibonacciho posloupnosti. Platí

$$C - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{pmatrix}$$

a tedy $\det(C - \lambda I_2) = (1 - \lambda)(-\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$. Tato rovnice má dva kořeny

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 - \lambda_1.$$

Všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ_1 jsou právě všechna řešení homogenní soustavy s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 1 \\ 1 & 0 - \lambda_1 \end{pmatrix},$$

což jsou všechny vektory tvaru $\langle (1/2 + \sqrt{5}/2, 1)^T \rangle = \langle (\lambda_1, 1)^T \rangle$. Podobně jsou všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ právě vektory z lineárního obalu $\lambda_2, 1)^T$.

Vektory $\mathbf{u}_1 = (\lambda_1, 1)^T$, $\mathbf{u}_2 = (\lambda_2, 1)^T$ tvoří lineárně nezávislou posloupnost a tedy bázi prostoru \mathbb{R}^2 tvořenou vlastními vektory matice C . Vyjádříme vektor $(a_1, a_2)^T = (1, 1)^T$ jako lineární kombinaci $a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$. Dostaneme

$$a = \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}}, \quad b = -\frac{1 - \lambda_1}{\sqrt{5}}.$$

Odtud dostáváme pro každé celé číslo $k \geq 0$

$$\begin{aligned}(a_{k+2}, a_{k+1})^T &= C^k(1, 1)^T = C^k(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2) = aC^k(\mathbf{u}_1) + bC^k(\mathbf{u}_2) \\ &= a\lambda_1^k\mathbf{u}_1 + b(\lambda_2)^k\mathbf{u}_2.\end{aligned}$$

Po dosazení za a, b a $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ a porovnání druhých složek prvního a posledního vektoru v předchozím výpočtu vyjde

$$a_{k+1} = \frac{\lambda_1^{k+1}}{\sqrt{5}} - \frac{(\lambda_2)^{k+1}}{\sqrt{5}}$$

pro každé $k \geq 0$, což jsme bez důkazu uvedli už v části 4.5.1.

Vlastní čísla lineárního operátoru hledáme jako vlastní čísla matice tohoto operátoru vzhledem k nějaké bázi a ty hledáme jako kořeny charakteristického polynomu této matice. Matice lineárního operátoru vzhledem ke dvěma různým bázím jsou podobné. Následující věta ukazuje, že nezáleží na tom, jakou bázi zvolíme.

Tvrzení 9.22. *Podobné matice mají stejný charakteristický polynom.*

Důkaz. Jsou-li A, B dvě matice téhož řádu nad tělesem \mathbf{T} , pak existuje regulární matice R taková, že $A = R^{-1}BR$. Potom platí

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I_n) &= \det(R^{-1}BR - \lambda I_n) = \det(R^{-1}BR - R^{-1}\lambda I_n R) \\ &= \det(R^{-1}(B - \lambda I_n)R) = \det(R)^{-1} \det(B - \lambda I_n) \det(R) \\ &= \det(B - \lambda I_n)\end{aligned}$$

podle věty o násobení determinantů a jejím důsledku pro determinant inverzní matice. \square

Matice lineárního operátoru $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} vzhledem ke dvěma různým bázím \mathbf{V} jsou podobné a mají tedy stejný charakteristický polynom. To není překvapivé, neboť vlastní čísla popisují vlastnosti operátoru a ty nezávisí na volbě báze. To nás opravňuje k následující definici.

Definice 9.23. *Charakteristický polynom lineárního operátoru $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} definujeme jako charakteristický polynom matice $[f]_C^C$ operátoru f vzhledem k libovolné bázi C prostoru \mathbf{V} .*

Vlastní čísla matice nebo lineárního operátoru na konečně generovaném prostoru tak najdeme jako kořeny charakteristického polynomu operátoru nebo matice.

Definice 9.24. Je-li $p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$ polynom s koeficienty v tělese \mathbf{T} , pak prvek $\lambda \in \mathbf{T}$ nazýváme *kořen polynomu $p(t)$* , pokud platí, že polynom $t - \lambda$ dělí polynom $p(t)$. Je-li λ kořen polynomu $p(t)$, pak maximální kladné celé číslo k takové, že polynom $(t - \lambda)^k$ dělí $p(t)$, nazýváme *násobnost kořene λ* .

Snadno si lze ověřit, že uvedená definice kořene polynomu je ekvivalentní s tím, že $p(\lambda) = 0$.

Použijeme-li skutečnost, že stupeň součinu polynomu stupně k s polynomem stupně l je polynom stupně $k+l$, vidíme že polynom stupně n má nejvýše n různých kořenů. Rovněž součet násobností všech kořenů polynomu stupně n je nejvýše n . Odtud vyplývá následující tvrzení.

Tvrzení 9.25. Každý lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru dimenze n nad tělesem \mathbf{T} má nejvýše n různých vlastních čísel.

Každá matice řádu n nad tělesem \mathbf{T} má nejvýše n různých vlastních čísel.

Pro lineární operátory na prostorech, které nemají konečnou dimenzi, může být situace velmi odlišná.

Příklad 9.26. Označíme D lineární operátor definovaný předpisem $D(f) = f'$ na prostoru všech reálných funkcí reálné proměnné, které mají spojité derivace všech řádů. Pak je každé reálné číslo λ vlastním číslem operátoru D .

Skutečně, funkce $e^{\lambda x}$ je nenulová, má derivace všech řádů, je definovaná na celém \mathbb{R} , a platí

$$D(e^{\lambda x}) = (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x} .$$

Pro každé reálné číslo λ má tedy diferenciální rovnice $f' = \lambda f$ řešení $f(x) = Ce^{\lambda x}$, kde C je libovolné reálné číslo. Přidáme-li počáteční podmínku $f(0) = s$, dostaneme řešení $f(x) = se^{\lambda x}$. Ukážeme si, že počáteční podmínkou $f(0) = s$ je řešení diferenciální rovnice $f' = \lambda f$ určené jednoznačně.

Nechť $g(x)$ je diferencovatelná reálná funkce, pro kterou platí $g' = \lambda g$ a $g(0) = s$. Spočítáme derivaci funkce $g(x)e^{-\lambda x}$. Platí

$$(g(x)e^{-\lambda x})' = g'(x)e^{-\lambda x} + g(x)(-\lambda)e^{-\lambda x} = \lambda g(x)e^{-\lambda x} - \lambda g(x)e^{-\lambda x} = 0.$$

Funkce $g(x)e^{-\lambda x}$ je tedy konstantní, a protože nabývá v bodě 0 hodnoty $g(0)e^0 = s$, platí $g(x)e^{-\lambda x} = s$, neboli $g(x) = se^{\lambda x}$.

Diferenciální rovnice $f' = \lambda f$ s počáteční podmínkou $f(0) = s$ má tedy jednoznačně určené řešení $f(x) = se^{\lambda x}$.

Stejně jako polynom $x^2 + 1$ nemá žádný reálný kořen přestože má reálné koeficienty, také polynomy s koeficienty v nějakém konečném tělese nemusí mít v tělese koeficientů žádný kořen.

Příklad 9.27. Pokusíme se najít vlastní čísla operátoru $f : \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2^2$ určeného maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nad \mathbb{Z}_2 . Charakteristický polynom této matice (a tedy také operátoru f) je $\lambda^2 + \lambda + 1$. Ten nemá v tělese \mathbb{Z}_2 žádný kořen. Operátor f tak nemá žádné vlastní číslo.

Každé těleso \mathbf{T} můžeme rozšířit do většího tělesa tak, aby daný polynom s koeficienty v tělese \mathbf{T} měl ve větším tělese aspoň jeden kořen. Lze to udělat podobně, jako rozšiřujeme těleso reálných čísel do tělesa komplexních čísel, aby měl reálný polynom $x^2 + 1$ aspoň jeden kořen.

Těleso komplexních čísel už kvůli existenci kořenů polynomů s komplexními koeficienty rozšiřovat nemusíme. Je totiž *algebraicky uzavřené*, neboť v něm platí následující věta.

Věta 9.28. Základní věta algebry. Každý polynom $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ s komplexními koeficienty stupně $n \geq 1$ má aspoň jeden komplexní kořen.

Základní větu algebry dokazovat nebudeme, vezmeme ji jako fakt. Budeme používat hlavně dva její důsledky.

Důsledek 9.29. Každý polynom $p(t)$ s komplexními koeficienty stupně $n \geq 1$ lze jednoznačně (až na pořadí činitelů) rozložit do součinu

$$p(t) = a_n(t - \lambda_1)^{l_1}(t - \lambda_2)^{l_2} \cdots (t - \lambda_k)^{l_k} ,$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu $p(t)$ a l_i je násobnost kořenu λ_i pro $i = 1, 2, \dots, k$.

Z rovnosti stupňů obou polynomů plyne $n = l_1 + l_2 + \cdots + l_k$, tj. že součet násobností všech kořenů polynomu se rovná stupni polynomu.

Důsledek 9.30. Každý polynom lichého stupně s reálnými koeficienty má aspoň jeden reálný kořen.

Důkaz. Důkaz vychází ze snadno ověřitelného faktu, že pokud je komplexní číslo λ kořenem polynomu $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ s reálnými koeficienty, pak také číslo $\bar{\lambda}$ komplexně sdružené s λ je kořenem polynomu $p(t)$. Koeficienty a_i polynomu $p(t)$ jsou reálná čísla, platí proto $\bar{a}_i = a_i$. Pak

$$\begin{aligned} 0 = p(\lambda) &= \overline{p(\lambda)} = \overline{a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0} \\ &= \bar{a}_n \bar{\lambda}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{\lambda}^{n-1} + \cdots + \bar{a}_1 \bar{\lambda} + \bar{a}_0 \\ &= a_n \bar{\lambda}^n + a_{n-1} \bar{\lambda}^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{\lambda} + a_0 = p(\bar{\lambda}). \end{aligned}$$

Číslo $\bar{\lambda}$ je tedy skutečně kořenem polynom $p(t)$.

Kořeny polynomu $p(t)$ tak můžeme uspořádat do dvojic komplexně sdružených kořenů. Protože ale všech kořenů (spolu s násobnostmi) je lichý počet, existuje aspoň jeden kořen λ , pro který platí $\lambda = \bar{\lambda}$, tj. aspoň jeden reálný kořen. \square

Dalším přímým důsledkem základní věty algebry je následující věta.

Věta 9.31. Každý lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném vektorovém prostoru nad \mathbb{C} má aspoň jedno vlastní číslo. Každá komplexní matice má aspoň jedno vlastní číslo.

Každý lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném vektorovém prostoru liché dimenze nad \mathbb{R} má aspoň jedno reálné vlastní číslo. Každá reálná matice lichého řádu má aspoň jedno reálné vlastní číslo.

9.4. Diagonalizovatelné operátory. V této části najdeme nutné a postačující podmínky pro to, aby lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} byl diagonalizovatelný. Tím také zjistíme, kdy je čtvercová matice diagonalizovatelná. Základem je následující věta, která platí obecně i bez předpokladu, že prostor \mathbf{V} má konečnou dimenzi.

Věta 9.32. Necht $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ je lineární operátor a $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ je posloupnost nenulových vlastních vektorů operátoru f příslušných navzájem různým vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Potom je posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ lineárně nezávislá.

Důkaz. Použijeme indukci podle k . Je-li $k = 1$, tvrzení platí, protože $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o}$. Předpokládejme, že $k > 1$ a tvrzení platí pro $k - 1$. Neboli že posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1})$ je lineárně nezávislá. Jsou-li $a_1, \dots, a_k \in \mathbf{T}$ takové, že platí

$$a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + a_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + a_k \mathbf{u}_k = \mathbf{o} .$$

Poslední rovnost upravíme dvěma různými způsoby. Vynásobíme ji vlastním číslem λ_k a dostaneme

$$\lambda_k a_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_k a_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k a_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \lambda_k a_k \mathbf{u}_k = \mathbf{o} .$$

Druhá úprava spočívá v aplikaci operátoru f na obě strany:

$$f(a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + a_k\mathbf{u}_k) = f(\mathbf{o}) = \mathbf{o} ,$$

tj.

$$\begin{aligned} & f(a_1\mathbf{u}_1) + f(a_2\mathbf{u}_2) + \cdots + f(a_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}) + f(a_k\mathbf{u}_k) \\ &= a_1f(\mathbf{u}_1) + a_2f(\mathbf{u}_2) + \cdots + a_{k-1}f(\mathbf{u}_{k-1}) + a_kf(\mathbf{u}_k) \\ &= a_1\lambda_1\mathbf{u}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{k-1}\lambda_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + a_k\lambda_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o} . \end{aligned}$$

Od poslední rovnosti odečteme rovnost

$$\lambda_k a_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_k a_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k a_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \lambda_k a_k \mathbf{u}_k = \mathbf{o} .$$

a dostaneme

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{u}_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_k)\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{o} .$$

Posloupnost vektorů $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1})$ je lineárně nezávislá podle indukčního předpokladu. Odtud plyne

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k) = a_2(\lambda_2 - \lambda_k) = \cdots = a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0 .$$

Protože vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ jsou navzájem různá, vyplývá odtud, že $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k-1} = 0$. Z rovnosti

$$a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + a_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o}$$

pak plyne rovněž $a_k = 0$, protože $\mathbf{u}_k \neq \mathbf{o}$. Tím je dokázáno, že posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_k)$ je lineárně nezávislá. \square

Důsledek 9.33. *Má-li lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na vektorovém prostoru \mathbf{V} dimenze n nad tělesem \mathbf{T} n navzájem různých vlastních čísel, pak je diagonalizovatelný.*

Má-li matice A řádu n nad tělesem \mathbf{T} celkem n navzájem různých vlastních čísel, pak je diagonalizovatelná.

Důkaz. Má-li operátor f celkem n navzájem různých vlastních čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, existuje pro každé $i = 1, \dots, n$ nenulový vlastní vektor \mathbf{u}_i příslušný λ_i . Podle předchozí věty je posloupnost vlastních vektorů $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ lineárně nezávislá a tedy je to báze prostoru \mathbf{V} . Ten má tak bázi složenou z vlastních vektorů operátoru f , který je proto diagonalizovatelný.

Má-li matice A řádu n celkem n navzájem různých vlastních čísel, má také operátor $f_A : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$ celkem n navzájem různých vlastních čísel. Je tedy diagonalizovatelný, existuje proto báze B v prostoru \mathbf{T}^n složená z vlastních vektorů operátoru f_A . Matice $[f_A]_B^B$ je diagonální a podobná matici $[f_A]_K^K$ operátoru f_A vzhledem ke kanonické bázi K v \mathbf{T}^n . Protože $[f_A]_K^K = A$, je matice A diagonalizovatelná. \square

Příklad 9.34. Vývoj nezaměstnanosti - řešení. Vrátime se nyní k příkladu 9.1. Spočítáme vlastní čísla a vektory přechodové matice

$$A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} .$$

Její charakteristický polynom se rovná

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) \\ &= (0,9 - \lambda)(0,4 - \lambda)(0,8 - \lambda) + 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,3 - 0,3 \cdot 0,1 \cdot (0,8 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + 2,1\lambda^2 - 1,37\lambda + 0,27 . \end{aligned}$$

Existují sice vzorečky pro kořeny polynomu třetího stupně s reálnými nebo komplexními koeficienty podobné vzorečkům pro řešení kvadratických rovnic, ty si ale nikdo nepamatuje, protože z nich nejde poznat, ani který z kořenů je reálný v případě rovnice s reálnými koeficienty. Naštěstí si v tomto případě můžeme všimnout, že charakteristický polynom má kořen 1, takže si jej můžeme rozložit na součin

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1,1\lambda + 0,27) .$$

Vedle vlastního čísla $\lambda_1 = 1$ má matice A ještě další dvě vlastní čísla

$$\lambda_2 = \frac{1,1 + \sqrt{0,13}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1,1 - \sqrt{0,13}}{2} .$$

Všechna tři vlastní čísla jsou reálná a platí $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, matice A je tedy diagonalizovatelná. Najdeme příslušné vlastní vektory.

Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ tvoří jádro matice

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 I_3 &= \begin{pmatrix} 0,9 - 1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 - 1 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,8 - 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0,3 & -0,2 \end{pmatrix} \sim \\ &= \begin{pmatrix} -0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & -0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,3 & -0,2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & -0,3 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

které se rovná $\langle (4, 2/3, 1)^T \rangle$. Označme $\mathbf{u}_1 = (4, 2/3, 1)^T$.

Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ_2 leží v jádru matice

$$\begin{aligned} A - \lambda_2 I_3 &= \begin{pmatrix} 0,9 - \lambda_2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,8 - \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,9 - \frac{1,1 + \sqrt{0,13}}{2} & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 - \frac{1,1 + \sqrt{0,13}}{2} & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,8 - \frac{1,1 + \sqrt{0,13}}{2} \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

které se rovná lineárnímu obalu vektoru

$$\mathbf{u}_2 = \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{13}, -\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{13}, 1\right)^T .$$

Jeden z vlastních vektorů příslušných třetímu vlastnímu číslu λ_3 se rovná

$$\mathbf{u}_3 = \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{13}, -\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{13}, 1\right)^T .$$

Posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ je posloupnost nenulových vlastních vektorů příslušných navzájem různým vlastním číslům $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \lambda_3$ a tvoří tedy bázi prostoru \mathbb{R}^3 .

Vyjádříme počáteční rozložení nezaměstnanosti $\mathbf{b} = (0,8, 0,05, 0,15)^T$ jako lineární kombinaci vlastních vektorů $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$: $\mathbf{b} = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + a_3 \mathbf{u}_3$. Konkrétní přibližná hodnota koeficientů je $a_1 = 0,1181, a_2 = -0,0891, a_3 = -0,0619$, pro dlouhodobý odhad vývoje nezaměstnanosti ale není až tak důležitá.

Spočítáme rozložení nezaměstnanosti po k čtvrtletích

$$A^k \mathbf{b} = A^k(a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + a_3 \mathbf{u}_3) = a_1 \lambda_1^k \mathbf{u}_1 + a_2 \lambda_2^k \mathbf{u}_2 + a_3 \lambda_3^k \mathbf{u}_3 .$$

Protože $0 < \lambda_3 < \lambda_2 < 1$, druhý a třetí člen posledního součtu konverguje k 0 pro $k \rightarrow \infty$. Hodnota $A^k \mathbf{b}$ se proto pro velké hodnoty k blíží k

$$a_1 \lambda_1^k \mathbf{u}_1 = a_1 (4, 2/3, 1)^T ,$$

neboť $\lambda_1 = 1$. Koeficient a_1 nemění poměr mezi souřadnicemi vektoru $(4, 2/3, 1)^T$, poměr mezi zaměstnanými, krátkodobě nezaměstnanými a dlouhodobě nezaměstnanými bude tedy směřovat k 4:(2/3):1, tj. k 12:2:3. V dlouhodobém horizontu by se bez vnějšího zásahu rozložení nezaměstnanosti stabilizovalo na přibližně 70,6% zaměstnaných a 29,4% nezaměstnaných, z nichž dvě pětiny by tvořili krátkodobě nezaměstnaní a tři pětiny dlouhodobě nezaměstnaní.

Příklad 9.35. Skořápky - řešení. V tomto případě je matice přechodu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Opět chceme najít hodnoty $A^k \mathbf{p}_0$, kde \mathbf{p}_0 je počáteční stav.

Charakteristický polynom matice A se rovná $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_4)$. Po výpočtu determinantu dostaneme

$$p(\lambda) = \lambda^4 - \frac{5}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4} = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - \frac{1}{4}) .$$

Matice A má tedy čtyři různá vlastní čísla, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1/2$ a $\lambda_4 = -1/2$, a je proto diagonalizovatelná.

Najdeme vlastní vektory příslušné jednotlivým vlastním číslům. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ tvoří nulový prostor matice

$$A - 1I_4 = \begin{pmatrix} 0 - 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 - 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 - 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 - 1 \end{pmatrix} ,$$

který se rovná lineárnímu obalu vektoru $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 2, 1)^T$. Podobně najdeme, že vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_2 = -1$ tvoří podprostor $\langle \mathbf{u}_2 \rangle = \langle (1, -2, 2, 1)^T \rangle$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_3 = 1/2$ tvoří podprostor $\langle \mathbf{u}_3 \rangle = \langle (1, 1, -1, -1)^T \rangle$ a vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_4 = -1/2$ tvoří lineární obal vektoru $\mathbf{u}_4 = (1, -1, -1, 1)^T$. Posloupnost vektorů $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ tvoří bázi aritmetického prostoru \mathbb{R}^4 , neboť jde o vlastní vektory matice A příslušné navzájem různým vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ matice A .

Počáteční polohu kuličky vyjádříme jako vektor $\mathbf{p}_0 = \mathbf{e}_i$, pokud je kulička na počátku pod kalíškem i , nebo jako $\mathbf{p}_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^T$, pokud počáteční polohu kuličky neznáme. Vektor \mathbf{p}_0 vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů báze $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$. Například pro vyjádření vektoru $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ řešíme soustavu s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a vektorem pravých stran \mathbf{e}_1 . Tato soustava má řešení $(1/6, 1/6, 1/3, 1/3)$, dostáváme tak vyjádření

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{6}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{6}\mathbf{u}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{u}_3 + \frac{1}{3}\mathbf{u}_4.$$

Potom pro vektor pravděpodobnosti polohy kuličky po k tazích tak máme vyjádření

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_k &= A^k \mathbf{e}_1 = A^k \left(\frac{1}{6}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{6}\mathbf{u}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{u}_3 + \frac{1}{3}\mathbf{u}_4 \right) \\ &= \frac{1}{6}A^k \mathbf{u}_1 + \frac{1}{6}A^k \mathbf{u}_2 + \frac{1}{3}A^k \mathbf{u}_3 + \frac{1}{3}A^k \mathbf{u}_4 \\ &= \frac{1}{6}\lambda_1^k \mathbf{u}_1 + \frac{1}{6}\lambda_2^k \mathbf{u}_2 + \frac{1}{3}\lambda_3^k \mathbf{u}_3 + \frac{1}{3}\lambda_4^k \mathbf{u}_4 \\ &= \frac{1}{6}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{6}(-1)^k \mathbf{u}_2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k \mathbf{u}_3 + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^k \mathbf{u}_4 \\ &= \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} + (-1)^k \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{pmatrix} + 2^{-k} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} + (-1)^k 2^{-k} \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

V předchozích případech byly matice přechodu diagonalizovatelné proto, že měly vždy n navzájem různých vlastních čísel, kde n byl řád matice. Podmínka, že matice řádu n má n různých vlastních čísel, je postačující pro její diagonalizovatelnost. Není to ale podmínka nutná, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 9.36. Reálná matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom rovný

$$p(\lambda) = (-1 - \lambda)^2(1 - \lambda^2)$$

a tedy vlastní čísla $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -1$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ najdeme jako jádro matice

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

které má bázi například $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 0)^T$, $\mathbf{u}_2 = (0, 0, 0, 1)^T$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_2 = -1$ tvoří jádro matice

$$A + I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

které má bázi například $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 0, 0)^T$, $\mathbf{u}_4 = (0, 1, 0, 0)^T$. Posloupnost vlastních vektorů $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ matice A je lineárně nezávislá a tvoří tedy bázi prostoru \mathbb{R}^4 . Matice A je proto diagonalizovatelná.

Předchozí příklad ukazuje, že matice sice může mít „málo“ vlastních čísel, ale dostatečně vlastních vektorů. Každé vlastní číslo má ale nějakou násobnost jako kořen charakteristického polynomu. V našem případě mají obě vlastní čísla násobnost 2 a pokud sečteme jejich násobnosti, dostáváme součet 4, což je řád matice A .

Definice 9.37. Je-li λ vlastní číslo lineárního operátoru $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} (nebo matice A), pak definujeme *algebraickou násobnost* λ jako násobnost λ coby kořene charakteristického polynomu $p(\lambda)$ operátoru f (nebo matice A).

Geometrickou násobností vlastního čísla λ operátoru f (nebo matice A) rozumíme dimenzi podprostoru \mathbf{M}_λ vlastních vektorů operátoru f (nebo matice A) příslušných vlastnímu číslu λ .

Poznamenejme pouze, že jak algebraická tak geometrická násobnost libovolného vlastního čísla je vždy kladné celé číslo.

Vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ matice A z předchozího příkladu má tedy algebraickou násobnost 2 a geometrickou násobnost také 2. Totéž platí pro vlastní číslo $\lambda_2 = -1$. Matice A z příkladu 9.20 má jediné vlastní číslo 1, jeho algebraická násobnost je 2 a geometrická násobnost je rovna 1. Rozdílnost algebraické a geometrické násobnosti nějakého vlastního čísla je nutnou a postačující podmínkou pro nedagonalizovatelnost matice, jak si v následujícím ukážeme.

Věta 9.38. Pro každé vlastní číslo λ lineárního operátoru $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} (matice A) nad tělesem \mathbf{T} platí, že geometrická násobnost λ je menší nebo rovná algebraické násobnosti λ .

Důkaz. Buď k geometrická násobnost vlastního čísla λ matice A . Zvolme nějakou bázi $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ podprostoru vlastních vektorů příslušných λ_1 a doplňme ji vektory $\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n$ na bázi $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ celého prostoru \mathbf{T}^n .

Najdeme matici f vzhledem k bázi B . Pro každé $j = 1, \dots, k$ platí $f(\mathbf{u}_j) = \lambda_1 \mathbf{u}_j$. Matice $[f]_B^B$ má tedy blokový tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda I_k & E \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

a charakteristický polynom operátoru f se tedy rovná determinantu matice

$$[f]_B^B - tI_n = \begin{pmatrix} (\lambda - t)I_k & E \\ 0 & F - tI_{n-k} \end{pmatrix},$$

který se rovná $\det((\lambda - t)I_k) \det(F - tI_{n-k}) = (\lambda - t)^k \det(F - tI_{n-k})$. Číslo λ je tedy aspoň k -násobným kořenem charakteristického polynomu operátoru f , jeho algebraická násobnost je tedy aspoň k . \square

Věta 9.39. Buď $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně generovaném vektorovém prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} . Pak jsou následující tři tvrzení ekvivalentní

- (1) operátor f je diagonalizovatelný,
- (2) charakteristický polynom $p(\lambda)$ operátoru f se rozkládá na součin lineárních činitelů a algebraická násobnost každého vlastního čísla operátoru f se rovná jeho geometrické násobnosti,
- (3) $\mathbf{V} = \mathbf{M}_{\lambda_1} \oplus \mathbf{M}_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus \mathbf{M}_{\lambda_k}$, kde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou všechna navzájem různá vlastní čísla operátoru f .

Důkaz. Dokážeme, že z 1. plyne 2. Nechť je f diagonalizovatelný. Existuje tedy báze $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ prostoru \mathbf{V} složená z vlastních vektorů operátoru f . Potom

$$[f]_B^B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) ,$$

a charakteristický polynom $p(\lambda)$ operátoru f se rovná determinantu matice

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) - \lambda I_n = \text{diag}(\lambda_1 - \lambda, \dots, \lambda_n - \lambda) ,$$

tj. $(\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$. Charakteristický polynom se tedy rozkládá na součin lineárních činitelů.

Buď λ libovolné vlastní číslo operátoru f a l jeho algebraická násobnost. Můžeme předpokládat, že $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_l = \lambda$. Potom $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l)$ je lineárně nezávislá posloupnost vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu λ . Geometrická násobnost vlastního čísla λ je tedy aspoň l . Podle předchozí věty je nejvýše l , rovná se tedy algebraické násobnosti čísla λ .

Nyní dokážeme, že z 2. plyne 3. Z předpokladu, že charakteristický polynom se rozkládá na součin lineárních činitelů plyne, že součet algebraických násobností všech vlastních čísel se rovná stupni charakteristického polynomu a ten se rovná dimenzi n prostoru \mathbf{V} . Označme $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ všechny navzájem různé kořeny polynomu $p(\lambda)$ a l_i jejich algebraické násobnosti pro $i = 1, \dots, k$. Platí tedy $l_1 + \dots + l_k = n$. Podle předpokladu je geometrická násobnost libovolného vlastního čísla λ_i rovna jeho algebraické násobnosti, tj. l_i . Zvolme bázi $B_i = (\mathbf{u}_1^i, \dots, \mathbf{u}_{l_i}^i)$ podprostoru vlastních vektorů příslušných λ_i . Ukážeme, že $B = B_1, B_2, \dots, B_k$ tvoří bázi \mathbf{V} .

Počet prvků posloupnosti B je $n = \dim(\mathbf{V})$, stačí proto dokázat, že posloupnost B je lineárně nezávislá. Zvolme tedy nějaké skaláry a_j^i pro každé $i = 1, \dots, k$ a každé $j = 1, \dots, l_i$ a předpokládejme, že

$$a_1^1 \mathbf{u}_1^1 + a_2^1 \mathbf{u}_2^1 + \dots + a_{l_1}^1 \mathbf{u}_{l_1}^1 + \dots + a_1^k \mathbf{u}_1^k + a_2^k \mathbf{u}_2^k + \dots + a_{l_k}^k \mathbf{u}_{l_k}^k = \mathbf{o} .$$

Pro každé $i = 1, \dots, k$ je vektor

$$\mathbf{v}_i = a_1^i \mathbf{u}_1^i + a_2^i \mathbf{u}_2^i + \dots + a_{l_i}^i \mathbf{u}_{l_i}^i$$

vlastní vektor operátoru f příslušný vlastnímu číslu λ_i . Dále platí

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_k = \mathbf{o} .$$

Pokud by některý z vektorů \mathbf{v}_i byl nenulový, plynula by z poslední rovnosti lineární závislost posloupnosti těch nenulových vektorů \mathbf{v}_i . Protože předpokládáme, že vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou navzájem různá, je každá posloupnost nenulových vlastních vektorů příslušných některým z těchto vlastních čísel lineárně nezávislá. Odtud plyne, že žádný z vektorů \mathbf{v}_i nemůže být nenulový. Dostáváme tak pro každé $i = 1, \dots, k$, že

$$\mathbf{o} = \mathbf{v}_i = a_1^i \mathbf{u}_1^i + a_2^i \mathbf{u}_2^i + \dots + a_{l_i}^i \mathbf{u}_{l_i}^i .$$

Posloupnost vektorů $(\mathbf{u}_1^i, \dots, \mathbf{u}_{l_i}^i)$ je ale lineárně nezávislá, neboť tvoří bázi podprostoru vlastních vektorů příslušných λ_i . Dostáváme tak, že

$$a_1^i = a_2^i = \dots = a_{l_i}^i = 0$$

pro každé $i = 1, 2, \dots, k$. Všechny skaláry $a_j^i = 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, k$ a $j = 1, \dots, l_i$. Posloupnost B je tedy lineárně nezávislá a proto báze prostoru \mathbf{V} složená z vlastních vektorů operátoru f .

Protože každý z vektorů báze B patří do jednoho z podprostorů \mathbf{M}_{λ_i} , plyne odtud $\mathbf{V} = \mathbf{M}_{\lambda_1} + \dots + \mathbf{M}_{\lambda_k}$. Každý vektor $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ tak lze vyjádřit jakou součet $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{w}_k$, kde $\mathbf{w}_i \in \mathbf{M}_{\lambda_i}$, tj. \mathbf{w}_i je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu

λ_i pro $i = 1, \dots, k$. Je-li $\mathbf{w} = \mathbf{w}'_1 + \dots + \mathbf{w}'_k$ další vyjádření \mathbf{w} , ve kterém $\mathbf{w}'_i \in \mathbf{M}_{\lambda_i}$, plyne odtud

$$\mathbf{o} = (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}'_1) + (\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}'_2) + \dots + (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}'_k) .$$

Protože každý z vektorů $\mathbf{w}_i - \mathbf{w}'_i$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_i a vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou navzájem různá, plyne odtud stejně jako v předchozím odstavci, že $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}'_i$ pro každé $i = 1, \dots, k$. Vyjádření $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{w}_k$ je tedy určené jednoznačně a platí tak $\mathbf{V} = \mathbf{M}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathbf{M}_{\lambda_k}$ podle tvrzení 5.91.

Nakonec dokážeme, že ze 3. plyne 1. Platí-li $\mathbf{V} = \mathbf{M}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathbf{M}_{\lambda_k}$, zvolíme v každém z podprostorů \mathbf{M}_{λ_i} bázi B_i . Ta je tvořena vlastními vektory operátoru f . Každý vektor podprostoru \mathbf{M}_{λ_i} lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci prvků báze B_i . Jednotlivé báze B_i spojíme do posloupnosti $B = B_1, B_2, \dots, B_k$ vlastních vektorů operátoru f . Protože \mathbf{V} je direktním součtem podprostorů \mathbf{M}_{λ_i} , lze každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ jednoznačně vyjádřit jako součet $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_k$, kde $\mathbf{v}_i \in \mathbf{M}_{\lambda_i}$ pro každé $i = 1, \dots, k$. Protože každý z vektorů \mathbf{v}_i lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci prvků báze B_i , lze vektor \mathbf{v} jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci prvků posloupnosti B . Tedy B je báze prostoru \mathbf{V} složená z vlastních vektorů a operátor f je diagonalizovatelný. \square

Příklad 9.40. Zjistíme, je-li lineární operátor $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definovaný předpisem

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + z \\ -3x - 2y + 3z \\ -2x - 2y + 3z \end{pmatrix}$$

diagonalizovatelný. Matice operátoru f vzhledem ke kanonické bázi se rovná

$$A = [f]_K^K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Charakteristický polynom operátoru f se rovná

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & -1 & 1 \\ -3 & -2 - \lambda & 3 \\ -2 & -2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) .$$

Charakteristický polynom se rozkládá na součin lineárních činitelů. Zbývá ověřit rovnost algebraické a geometrické násobnosti obou vlastních čísel $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -1$.

Algebraická násobnost vlastního čísla $\lambda_1 = 1$ je 2. Jeho geometrická násobnost se rovná dimenzi jádra matice

$$A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} 0 - 1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 - 1 & 3 \\ -2 & -2 & 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} .$$

Hodnost této matice se rovná 1, dimenze jádra je proto 2. Geometrická násobnost vlastního čísla $\lambda_1 = 1$ je rovná jeho algebraické násobnosti.

Pokud jde o vlastní číslo $\lambda_2 = -1$, jeho algebraická násobnost je rovna 1 a rovná se tak jeho geometrické násobnosti, protože ta je aspoň 1 pro jakékoliv vlastní číslo. Operátor f je tedy diagonalizovatelný.

Najdeme ještě bázi \mathbb{R}^3 , vzhledem ke které je matice f diagonální.

Bázi jádra matice $A - \lambda_1 I_3$, které má dimenzi 2, můžeme zvolit například $(1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T$.
Bázi jádra matice

$$A - \lambda_2 I_3 = A + I_3 = \begin{pmatrix} 0+1 & -1 & 1 \\ -3 & -2+1 & 3 \\ -2 & -2 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

můžeme zvolit například $(1, 3, 2)^T$. Posloupnost $(1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T, (1, 3, 2)^T$ tak tvoří bázi B prostoru \mathbb{R}^3 tvořenou vlastními vektory operátoru f , platí proto $[f]_B^B = \text{diag}(1, 1, -1)$. Napíšeme-li si vektory báze B jako sloupce matice R , dostaneme

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = [\text{id}]_K^B .$$

Potom, pokud jsme počítali správně, musí platit

$$\text{diag}(1, 1, -1) = [f]_B^B = [\text{id}]_B^K [f]_K^K [\text{id}]_K^B = R^{-1} A R .$$

Po výpočtu inverzní matice

$$R^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ověříme poslední rovnost a provedeme tím zkoušku správnosti výpočtů.

9.5. Shrnutí - řešení diferenční rovnice v případě, že matice přechodu je diagonalizovatelná. Výpočty Fibonacciho čísel, vývoje nezaměstnanosti a pravděpodobností polohy kuličky u skořápek ukazují, jak obecně řešit diferenční rovnici $\mathbf{u}_k = A\mathbf{u}_{k-1}$ v případě, že matice A je diagonalizovatelná. Řešení se rovná $\mathbf{u}_k = A^k \mathbf{u}_0$. Postupujeme v následujících krocích. Označíme n řád matice A .

- (1) Protože předpokládáme, že matice A je diagonalizovatelná, najdeme bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{T}^n složenou z vlastních vektorů matice A , vektor \mathbf{v}_i je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_i .
- (2) Vlastní vektory napíšeme do sloupců matice R . To je matice přechodu $[\text{id}]_K^B$ od báze B ke kanonické bázi K . Platí pro ni $R^{-1} A R = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, neboli $A = R \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) R^{-1}$.
- (3) Vyjádříme vektor \mathbf{u}_0 jako lineární kombinaci $\mathbf{u}_0 = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$ vektorů báze B . Koeficienty této lineární kombinace najdeme jako řešení soustavy lineárních rovnic $R(c_1, \dots, c_n)^T = \mathbf{u}_0$, která má jediné řešení $(c_1, \dots, c_n)^T = R^{-1} \mathbf{u}_0$.
- (4) Pak spočítáme

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= A^k \mathbf{u}_0 = A^k (c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n) = c_1 \lambda_1^k \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2^k \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \lambda_n^k \mathbf{v}_n \\ &= R \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k) R^{-1} \mathbf{u}_0 . \end{aligned}$$

Z posledního bodu také lze vyčíst, jak se mohou vyvíjet souřadnice vektorů \mathbf{u}_k v případě, že těleso \mathbf{T} je buď těleso reálných čísel nebo těleso komplexních čísel. Vlastní vektory \mathbf{v}_i jsou pevně zvolené. Touto volbou jsou jednoznačně určené koeficienty c_i neboli souřadnice počátečního stavu \mathbf{u}_0 vzhledem k bázi složené z vlastních vektorů matice A . Souřadnice vektorů \mathbf{u}_k tak závisí pouze na tom, jaká je posloupnost mocnin λ_i^k pro $k \rightarrow \infty$. Vývoj souřadnic vektorů \mathbf{u}_k je tak řízen absolutními hodnotami $|\lambda_i|$ vlastních čísel λ_i matice přechodu A . Mohou nastat tři kvalitativně odlišné případy.

- Pro všechna vlastní čísla λ_i platí $|\lambda_i| < 1$. V tom případě $\lambda_i^k \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow \infty$ a vektory \mathbf{u}_k tak konvergují k nulovému vektoru \mathbf{o} .
- Pro některá z vlastních čísel platí $|\lambda_i| = 1$ a pro zbývající $|\lambda_j| < 1$. V tom případě buď vektory \mathbf{u}_k konvergují k nějakému limitnímu vektoru (jako v případě vývoje nezaměstnanosti) nebo oscilují kolem několika limitních vektorů (jako v případě skořápek).
- Pro některé z vlastních čísel platí $|\lambda_i| > 1$. V tom případě nenulové souřadnice vektorů \mathbf{u}_k rostou v absolutní hodnotě do nekonečna (jako v případě Fibonacciho posloupnosti).

9.6. Řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic s diagonalizovatelnou maticí.

Příklad 9.41. Zkusíme vyřešit soustavu dvou lineárních diferenciálních rovnic o dvou neznámých funkcích s diagonální maticí

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

a počáteční podmínkou $u_1(0) = s_1, u_2(0) = s_2$.

V tomto případě se soustava skládá ze dvou nezávislých rovnic. První je $u_1' = \lambda_1 u_1$ s počáteční podmínkou $u_1(0) = s_1$, která má řešení $u_1(t) = s_1 e^{\lambda_1 t}$. Druhá rovnice $u_2' = \lambda_2 u_2$ s počáteční podmínkou $u_2(0) = s_2$ má řešení $u_2(t) = s_2 e^{\lambda_2 t}$.

V případě diagonalizovatelné matice můžeme řešení soustavy převést na předchozí případ.

Příklad 9.42. Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

a stejnou počáteční podmínkou $u_1(0) = s_1, u_2(0) = s_2$. Soustavu si napřed upravíme tak, že k první rovnici přičteme druhou a dále druhou rovnici vynásobíme -2 pak k ní přičteme první rovnici. Dostaneme tak soustavu

$$\begin{aligned} u_1' + u_2' &= -(u_1 + u_2) \\ u_1' - u_2' &= -3(u_1 - u_2) . \end{aligned}$$

Protože derivace součtu (rozdílu) dvou funkcí je součet (rozdíl) derivací, dostáváme tak soustavu ve tvaru

$$\begin{aligned} (u_1 + u_2)' &= -1(u_1 + u_2) \\ (u_1 - u_2)' &= -3(u_1 - u_2) , \end{aligned}$$

která má pro neznámé funkce $u_1 + u_2$ a $u_1 - u_2$ diagonální maticí. Spolu s počátečními podmínkami $u_1(0) + u_2(0) = s_1 + s_2$ a $u_1(0) - u_2(0) = s_1 - s_2$ má jednoznačné řešení $(u_1 + u_2)(t) = (s_1 + s_2)e^{-t}$ a $(u_1 - u_2)(t) = (s_1 - s_2)e^{-3t}$. Odtud spočítáme, že původní soustava má řešení

$$u_1(t) = \frac{1}{2}((s_1 + s_2)e^{-t} + (s_1 - s_2)e^{-3t})$$

a

$$u_2(t) = \frac{1}{2}((s_1 + s_2)e^{-t} - (s_1 - s_2)e^{-3t}) .$$

Poslední příklad jsme mohli vyřešit uvedeným způsobem proto, že matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

je diagonalizovatelná. Skutečně, její charakteristický polynom je $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3$, který má dva různé reálné kořeny $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = -3$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_1 = -1$ tvoří lineární obal $\langle (1, 1)^T \rangle$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_2 = -3$ tvoří lineární obal $\langle (1, -1)^T \rangle$. Vektory $(1, 1)^T, (1, -1)^T$ tvoří bázi prostoru \mathbb{R}^2 . Napišeme si je do sloupců matice

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matice R je regulární a platí pro ni rovnost

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Z této rovnosti vypočítáme matici A

$$A = R \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} R^{-1}$$

a dosadíme ji do původní soustavy

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme tak soustavu

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} R^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

kterou si přepíšeme do tvaru

$$R^{-1} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} R^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Označíme

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Obě funkce v_i jsou lineární kombinace funkcí u_1, u_2 s konstantními koeficienty v i -tém řádku matice R^{-1} . Platí proto

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix}.$$

Dvojice funkcí $u_1(t), u_2(t)$ tak splňuje soustavu lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

která má diagonální matici. Tu už umíme řešit. Musí platit $v_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ a $v_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$, kde c_1, c_2 mohou být libovolné konstanty. Platí $v_i(0) = c_i$. Konkrétní hodnotu konstant c_1, c_2 určíme později z počátečních podmínek $u_i(0) = s_i$. Funkce u_1, u_2 spočítáme z rovnosti

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

tj. platí

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} .$$

Dosadíme hodnotu proměnné $t = 0$ a dostaneme

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} .$$

Konstanty c_1, c_2 tak vypočítáme z počátečních podmínek $u_1(0) = s_1$ a $u_2(0) = s_2$ jako

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} .$$

Po dosazení za c_1 a c_2 tak dostáváme řešení ve tvaru

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} R^{-1} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} .$$

Všimněte si, že závěrečná formulka pro funkce u_1 a u_2 neobsahuje pomocné proměnné v_1 a v_2 . Ty jsme potřebovali pouze pro odvození toho, že hledané funkce jsou nějakou lineární kombinací exponenciálních funkcí $e^{\lambda_1 t}$ a $e^{\lambda_2 t}$.

Celý postup odvození bychom mohli zopakovat při řešení obecné soustavy $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$, $\mathbf{u}(0) = \mathbf{s}$ s diagonalizovatelnou maticí A řádu n . Matici A převedeme do diagonálního tvaru $R^{-1}AR = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, kde R je matice, jejíž sloupce tvoří bázi \mathbb{R}^n složenou z vlastních vektorů matice A , a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou příslušná vlastní čísla. Potom platí

$$\mathbf{u}(t) = R \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) R^{-1} \mathbf{s}.$$

Označíme-li D diagonální matici $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, platí $A = RDR^{-1}$ a $A^k = RD^k R^{-1}$ pro každé kladné k . Pak platí

$$\begin{aligned} & I_n + tA + t^2 \frac{A^2}{2!} + t^3 \frac{A^3}{3!} + \dots + t^k \frac{A^k}{k!} + \dots \\ &= I_n + tRDR^{-1} + t^2 \frac{RD^2 R^{-1}}{2!} + t^3 \frac{RD^3 R^{-1}}{3!} + \dots + t^k \frac{RD^k R^{-1}}{k!} + \dots \\ &= R \left(I_n + tD + \frac{(tD)^2}{2!} + \frac{(tD)^3}{3!} + \dots + \frac{(tD)^k}{k!} + \dots \right) R^{-1} \\ &= R \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) R^{-1} . \end{aligned}$$

Matici $R \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) R^{-1}$ proto označujeme jako e^{At} , což dovoluje napsat řešení soustavy $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$, $\mathbf{u}(0) = \mathbf{s}$ ve tvaru

$$\mathbf{u}(t) = e^{At} \mathbf{u}(0),$$

zcela analogicky k vyjádření $f(t) = se^{\lambda t}$ jako jediného řešení jedné diferenciální rovnice $f' = \lambda f$ s počáteční podmínkou $f(0) = s$.

Příklad 9.43. - Řešení příkladu 9.3. Nyní už snadno vyřešíme úlohu o šíření substance přes buněčnou blánu. Ta vede k soustavě diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= -ru_1(t) + su_2(t)h , \\ u_2'(t) &= ru_1(t) - su_2(t) . \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 0$. Matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} -r & s \\ r & -s \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + (r+s)\lambda$ a tudíž dvě různá vlastní čísla $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -(r+s)$, odtud plyne její diagonalizovatelnost.

Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$ tvoří jádro matice

$$A - 0I_2 = \begin{pmatrix} -r & s \\ r & -s \end{pmatrix},$$

který se rovná lineárnímu obalu $\langle (s, r)^T \rangle$.

Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_2 = -(r+s)$ tvoří jádro matice

$$A + (r+s)I_2 = \begin{pmatrix} s & s \\ r & r \end{pmatrix},$$

který se rovná lineárnímu obalu $\langle (1, -1)^T \rangle$. Vlastní vektory napíšeme do sloupců matice

$$R = \begin{pmatrix} s & 1 \\ r & -1 \end{pmatrix}$$

a spočítáme inverzní matici

$$R^{-1} = \frac{-1}{r+s} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -r & s \end{pmatrix}.$$

Soustava má pak řešení

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s & 1 \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{-(r+s)t} \end{pmatrix} \frac{-1}{r+s} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r+s} \begin{pmatrix} s + re^{-(r+s)t} \\ r - re^{-(r+s)t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vidíme, že pro $t \rightarrow \infty$ hodnota $u_1(t)$ konverguje k $\frac{s}{r+s}$ a hodnota $u_2(t)$ konverguje k $\frac{r}{r+s}$.

9.7. Invariantní podprostory. Ke zkoumání toho, jak moc lze zjednodušit matici lineárního operátoru vhodnou volbou báze, se dobře hodí pojem invariantního podprostoru.

Definice 9.44. Je-li $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na vektorovém prostoru \mathbf{V} , pak podprostor $\mathbf{M} \leq \mathbf{V}$ nazýváme *invariantní podprostor operátoru f* , pokud platí pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$, že také $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{M}$. Invariantní podprostor čtvercové matice A definujeme jako invariantní podprostor operátoru f_A určeného maticí A .

Je-li \mathbf{M} invariantní podprostor operátoru f , pak zúžení operátoru f na podprostor \mathbf{M} je lineární operátor na prostoru \mathbf{M} .

Pozorování 9.45. Pro každý lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ jsou následující podprostory \mathbf{V} invariantní podprostory f :

- $\{\mathbf{0}\}$, \mathbf{V} ,
- $\text{Ker}(f)$,
- $\text{Im}(f)$,
- podprostor $\langle \mathbf{u} \rangle$ generovaný libovolným nenulovým vlastním vektorem \mathbf{u} operátoru f ,

- *podprostor M_λ všech vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu λ operátoru f .*

Pozorování 9.46. *Je-li M invariantní podprostor operátoru $f : V \rightarrow V$, pak každé vlastní číslo λ zúžení operátoru f na podprostor M je také vlastním číslem operátoru f . Každý vlastní vektor $x \in M$ příslušný vlastnímu číslu λ je také vlastním vektorem operátoru f .*

Metodu důkazu následujícího tvrzení jsme použili už v důkazu věty o tom, že geometrická násobnost libovolného vlastního čísla operátoru f je nejvýše rovná jeho algebraické násobnosti.

Tvrzení 9.47. *Bud' $f : V \rightarrow V$ lineární operátor na konečně dimenzionálním prostoru V nad tělesem T a $M \leq V$ invariantní podprostor operátoru f . Potom charakteristický polynom zúžení operátoru f na podprostor M dělí charakteristický polynom $p(\lambda)$ operátoru f .*

Důkaz. Zvolme nějakou bázi u_1, \dots, u_k podprostoru M a doplňme ji na bázi $B = u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ prostoru V . Pro každý vektor $u_j, j = 1, \dots, k$ platí $f(u_j) \in M$, neboť M je invariantní podprostor operátoru f . Platí tedy

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^k a_{ij} u_i$$

pro nějaké skaláry a_{ij} . Označme $A = (a_{ij})$ čtvercovou matici řádu k . Je to matice zúžení operátoru f na invariantní podprostor M operátoru f vzhledem k bázi $C = u_1, \dots, u_k$. Matice $[f]_B^B$ operátoru f vzhledem k bázi B má potom blokový tvar

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & F \end{pmatrix},$$

kde F je nějaká čtvercová matice řádu $n - k$ a E je matice typu $k \times (n - k)$.

Potom

$$[f]_B^B - \lambda I_n = \begin{pmatrix} A - \lambda I_k & E \\ 0 & F - \lambda I_{n-k} \end{pmatrix}$$

a $p(\lambda) = \det([f]_B^B - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_k) \det(F - \lambda I_{n-k})$. Determinant $\det(A - \lambda I_k)$ je charakteristický polynom zúžení operátoru f na podprostor M a dělí charakteristický polynom $p(\lambda)$ operátoru $f : V \rightarrow V$. \square

9.8. Jordanovo. V této části se budeme zabývat strukturou libovolných lineárních operátorů na konečně generovaných prostorech V nad tělesem T . Budeme vždy předpokládat, že charakteristický polynom operátoru se rozkládá na součin lineárních činitelů. Což je to samé jako předpoklad, že součet algebraických násobností všech vlastních čísel se rovná stupni charakteristického polynomu, který se vždy rovná dimenzi prostoru V . Každý lineární operátor tak bude mít aspoň jedno vlastní číslo v tělese T .

Je-li $\dim V = 1$, je každý lineární operátor $f : V \rightarrow V$ diagonalizovatelný. Prostor V je generován libovolným nenulovým vektorem $x \in V$, proto $f(x) = \lambda x$ pro nějaký skalár $\lambda \in T$, x je tedy vlastní vektor operátoru f a tvoří bázi V .

Je-li $f : V \rightarrow V$ lineární operátor na prostoru dimenze 2 nad tělesem T , existuje vlastní číslo λ operátoru f (protože charakteristický polynom f se rozkládá na součin lineárních činitelů). Není-li f diagonalizovatelný, existuje právě jedno vlastní

číslo, které tak má algebraickou násobnost 2. Jeho geometrická násobnost potom musí být 1.

Příklad 9.48. Nediagonalizovatelné operátory na prostorech dimenze 2 - singulární případ. Napřed probereme případ, kdy jediné vlastní číslo operátoru f se rovná 0. To znamená, že vlastní vektory f tvoří jádro $\text{Ker}(f)$, a to tak má dimenzi 1. Podle věty o dimenzi jádra a obrazu je také $\dim(\text{Im } f) = 1$. Zvolíme libovolný nenulový vektor $\mathbf{u}_1 \in \text{Im}(f)$. Tento vektor je (vzhledem k $\dim(\text{Im } f) = 1$) vlastním vektorem zúžení f na invariantní podprostor $\text{Im}(f)$ příslušným nějakému vlastnímu číslu λ , které je také vlastním číslem operátoru f na celém \mathbf{V} . Tedy $\lambda = 0$ a $\mathbf{u}_1 \in \text{Ker}(f)$. Protože $\mathbf{u}_1 \in \text{Im}(f)$, existuje vektor $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{V}$ takový, že $f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1$. Protože $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o}$, platí $\mathbf{u}_2 \notin \text{Ker}(f)$. Posloupnost $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ je tedy lineárně nezávislá a tvoří tak bázi prostoru \mathbf{V} . Matice f vzhledem k bázi B se rovná

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 9.49. Ukážeme, že každá z následujících reálných matic

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je podobná matici

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Všechny tři matice mají hodnotu 1, jejich jádro má tedy dimenzi 1. Charakteristický polynom každé ze tří matic se rovná λ^2 , všechny tři matice mají jediné vlastní číslo rovné 0. Žádná z matic není diagonalizovatelná. Podle předchozího příkladu existuje pro operátor $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ určený kteroukoliv z těchto tří matic báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ v prostoru \mathbb{R}^2 taková, že matice

$$[f]_B^B = J.$$

Každá z matic A, B, C je tedy podobná matici J .

V případě, že operátor f nemá žádné vlastní číslo rovné 0, použijeme následující jednoduché tvrzení o „posunu vlastních čísel“, které platí zcela obecně bez omezení na prostory konečné dimenze.

Tvrzení 9.50. *Buď $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na prostoru \mathbf{V} dimenze n nad tělesem \mathbf{T} a $a \in \mathbf{T}$. Označme $g : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ operátor definovaný předpisem $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - a\mathbf{x} = (f - a\text{id}_{\mathbf{V}})(\mathbf{x})$. Potom platí*

- (1) $\lambda \in \mathbf{T}$ je vlastní číslo operátoru f právě když $\lambda - a$ je vlastní číslo operátoru g ,
- (2) vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ je vlastní vektor f příslušný λ právě když je také vlastní vektor g příslušný $\lambda - a$,
- (3) algebraická násobnost vlastního čísla λ operátoru f se rovná algebraické násobnosti vlastního čísla $\lambda - a$ operátoru g .

Důkaz. Platí, že λ je vlastní číslo operátoru f právě když existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ takový, že $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. Poslední rovnost platí právě když $f(\mathbf{x}) - a\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} - a\mathbf{x}$, což platí právě když $g(\mathbf{x}) = (\lambda - a)\mathbf{x}$. Tato rovnost je ekvivalentní tomu, že $\lambda - a$ je vlastní číslo operátoru $g = f - a\text{id}_{\mathbf{V}}$ a \mathbf{x} je vlastní vektor g příslušný vlastnímu číslu $\lambda - a$. Tím jsme dokázali současně 1. i 2.

Pokud je o 3., charakteristický polynom operátoru f je $p(t) = \det([f]_B^B - tI_n)$, kde B je libovolná báze v prostoru \mathbf{V} . Pro charakteristický polynom $q(t)$ operátoru g platí

$$\begin{aligned} q(t) &= \det([f - a \operatorname{id}_{\mathbf{V}}]_B^B - tI_n) = \det([f]_B^B - [a \operatorname{id}_{\mathbf{V}}]_B^B - tI_n) \\ &= \det([f]_B^B - aI_n - tI_n) = \det([f]_B^B - (a+t)I_n) = p(a+t). \end{aligned}$$

Platí, že $(\lambda - t)^k$ dělí $p(t)$ po nějaké kladné k právě když $p(t) = (\lambda - t)^k r(t)$ pro nějaký polynom $r(t)$ s koeficienty v \mathbf{T} . To nastává právě když $q(t) = p(a+t) = (\lambda - a - t)^k r(a+t)$ tj. právě když $((\lambda - a) - t)^k$ dělí $q(t)$. Algebraická násobnost vlastního čísla λ operátoru f se tedy rovná algebraické násobnosti vlastního čísla $\lambda - a$ operátoru g . \square

Poslední tvrzení ukazuje, že při zkoumání struktury lineárních operátorů $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ se můžeme omezit pouze na případ, kdy operátor má vlastní číslo 0. Pokud je dimenze \mathbf{V} konečná, stačí zkoumat pouze operátory, jejichž matice je singulární. Obecný případ pak dostaneme stejným postupem jako v následujícím příkladu.

Příklad 9.51. Nediagonalizovatelné operátory na prostorech dimenze 2 - regulární případ. Doplníme první příklad této sekce rozбором případu, kdy nediagonalizovatelný operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na prostoru dimenze 2 má jediné vlastní číslo $\lambda \neq 0$. Jeho algebraická násobnost je 2 a geometrická násobnost je 1.

Podle předchozího tvrzení má operátor $g = f - \lambda \operatorname{id}_{\mathbf{V}}$ jediné vlastní číslo 0 s algebraickou násobností 2 a geometrickou násobností 1. Podle prvního příkladu v této sekci existuje báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ ve \mathbf{V} pro kterou platí $g(\mathbf{u}_1) = \mathbf{0}$ a $g(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1$. Pro operátor f tak platí $f(\mathbf{u}_1) = (g + \lambda \operatorname{id}_{\mathbf{V}})(\mathbf{u}_1) = \lambda \mathbf{u}_1$ a $f(\mathbf{u}_2) = (g + \lambda \operatorname{id}_{\mathbf{V}})(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1 + \lambda \mathbf{u}_2$. Pro matici f vzhledem k bázi B tak platí

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Dosavadní výsledky z této kapitoly shrneme do následujícího tvrzení.

Tvrzení 9.52. *Předpokládáme, že charakteristický polynom operátoru $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na prostoru dimenze 2 nad tělesem \mathbf{T} se rozkládá na součin lineárních činitelů. Potom existuje báze B ve \mathbf{V} taková, že $[f]_B^B$ je buď diagonální matice (v případě, že f je diagonalizovatelný operátor), nebo*

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbf{T}$ (pokud f není diagonalizovatelný). Ve druhém případě je λ jediné vlastní číslo operátoru f .

Pokud se charakteristický polynom matice A řádu 2 nad tělesem \mathbf{T} rozkládá na součin lineárních činitelů, pak je matice A buď podobná nějaké diagonální matici (je-li diagonalizovatelná) nebo je podobná matici

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

kde λ je jediné vlastní číslo A (pokud A není diagonalizovatelná).

V několika následujících příkladech se budeme zabývat operátory $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na prostorech dimenze 3 nad tělesem \mathbf{T} . Připomeňme si předpoklad, že charakteristický

polynom operátoru f se rozkládá na součin lineárních činitelů. Nedigonalizovatelnost f je pak ekvivalentní tomu, že existuje vlastní číslo f , které má algebraickou násobnost ostře větší než je jeho geometrická násobnost.

Příklad 9.53. Jediné vlastní číslo s geometrickou násobností 1. Opět začneme případem, kdy má operátor f jediné vlastní číslo 0. Podprostor $\text{Ker } f$ vlastních vektorů f příslušných vlastnímu číslu 0 má dimenzi 1, podle věty o dimenzi jádra a obrazu má obraz $\text{Im}(f)$ dimenzi 2. Zúžení operátoru f na podprostor $\text{Im}(f)$ má také jediné vlastní číslo 0 a jeho geometrická násobnost je rovněž 1. Podle prvního příkladu v této části existuje báze $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ v podprostoru $\text{Im}(f)$, pro kterou platí $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{o}$ a $f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1$. K vektoru $\mathbf{u}_2 \in \text{Im}(f)$ existuje vektor $\mathbf{u}_3 \in \mathbf{V}$ takový, že $f(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_2$. Vzhledem k tomu, že $f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2) \in \langle \mathbf{u}_1 \rangle$, platí $f(\mathbf{x}) \in \langle \mathbf{u}_1 \rangle$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \text{Im}(f)$. Proto $\mathbf{u}_3 \notin \text{Im}(f)$ a posloupnost $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ je lineárně nezávislá a tudíž báze ve \mathbf{V} . Matice f vzhledem k bázi B se rovná

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je-li jediné vlastní číslo λ operátoru f nenulové, použijeme stejný trik s posunem vlastních čísel jako v dimenzi 2 a najdeme pro operátor $g = f - \lambda \text{id}_{\mathbf{V}}$ bázi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ takovou, že $g(\mathbf{u}_1) = \mathbf{o}$, $g(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1$ a $g(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_2$. Matice operátoru f vzhledem k bázi B se pak rovná

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Příklad 9.54. Jediné vlastní číslo s geometrickou násobností 2. Je-li jediné vlastní číslo operátoru f nulové a jeho geometrická násobnost je 2, pak platí $\dim(\text{Ker } f) = 2$ a $\dim(\text{Im } f) = 1$. Zúžení f na invariantní podprostor $\text{Im}(f)$ má jediné vlastní číslo 0. Zvolíme libovolný nenulový vektor $\mathbf{u}_1 \in \text{Im}(f)$. Protože $\dim(\text{Ker } f) = 2$, doplníme vektor \mathbf{u}_1 do báze $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$ prostoru $\text{Ker}(f)$. Protože $\mathbf{u}_1 \in \text{Im}(f)$, najdeme vektor $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{V}$, pro který platí $f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1$. Protože $\mathbf{u}_2 \notin \text{Ker}(f)$, generuje posloupnost $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ celý prostor \mathbf{V} a je tedy bázi \mathbf{V} . Platí tak $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{o} = f(\mathbf{u}_3)$, $f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1$, a

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pokud je jediné vlastní číslo λ operátoru f nenulové, najdeme analogicky pro operátor $g = f - \lambda \text{id}_{\mathbf{V}}$ bázi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ ve \mathbf{V} , pro kterou platí

$$[g]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$[f]_B^B = [g + \lambda \text{id}_{\mathbf{V}}]_B^B = [g]_B^B + \lambda [\text{id}_{\mathbf{V}}]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda I_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

V posledním příkladu je důležité uvědomit si omezení, které máme pro volbu vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3$, které tvoří bázi $\text{Ker}(f)$. Mají-li být součástí báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ pro kterou je

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

musí být $\mathbf{u}_1 \in \text{Im}(f)$. Ilustrujeme to na následujícím příkladu.

Příklad 9.55. Matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

má hodnost 1, proto $\dim(\text{Ker } A) = 2$. Charakteristický polynom se rovná $-\lambda^3$, jediné vlastní číslo je 0. Podle předchozího příkladu existuje regulární matice $R = (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_3)$ taková, že

$$A(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_3) = (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proto musí být $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \in \text{Ker}(A)$. Pokud bychom ale hledali matici R naivně a zvolili za $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$ libovolnou bázi $\text{Ker}(A)$, například $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0)^T$ a $\mathbf{u}_3 = (1, 0, -2)^T$, obě rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{u}_1$ a $A\mathbf{x} = \mathbf{u}_3$ by byly neřešitelné a žádný vektor \mathbf{u}_2 , který by doplnil matici R , by neexistoval.

Konstrukci matice R musíme začít volbou nenulového vektoru $\mathbf{u}_1 \in \text{Im}(A) \cap \text{Ker}(A)$, například $\mathbf{u}_1 = (1, -2, -2)^T$ a doplnit jej libovolným vektorem \mathbf{u}_3 na bázi $\text{Ker}(A)$. Rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{u}_1$ je potom řešitelná, jedním z řešení je třeba vektor $\mathbf{u}_2 = (0, 0, 1)^T$. Matice

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

pak splňuje rovnost

$$AR = R \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 9.56. Dvě různá vlastní čísla. Zbývá případ, kdy $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na prostoru dimenze 3 má dvě různá vlastní čísla, a přesto není diagonalizovatelný. Nediagonalizovatelnost f znamená, že jedno ze dvou vlastních čísel operátoru f má algebraickou násobnost 2 a geometrickou násobnost 1. Opět budeme předpokládat, že toto vlastní číslo se rovná 0. To znamená, že $\dim(\text{Ker } f) = 1$ a tedy $\dim(\text{Im } f) = 2$. Druhé vlastní číslo označíme $\lambda_2 \neq 0$. To má geometrickou i algebraickou násobnost rovnou 1. Charakteristický polynom f se tedy rovná $p(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - \lambda_2)$.

Je-li \mathbf{x} libovolný vlastní vektor operátoru f příslušný vlastnímu číslu λ_2 , platí $f(\mathbf{x}) = \lambda_2 \mathbf{x}$. A protože $\lambda_2 \neq 0$, je $\mathbf{x} = f(\lambda_2^{-1} \mathbf{x}) \in \text{Im}(f)$. To znamená, že λ_2 je vlastním číslem zúžení operátoru f na $\text{Im}(f)$ a tedy kořenem charakteristického polynomu tohoto zúžení. Protože charakteristický polynom zúžení f na invariantní podprostor dělí charakteristický polynom $p(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - \lambda_2)$ operátoru f , jedinou možností pro charakteristický polynom zúžení f na dvoudimenzionální podprostor $\text{Im}(f)$ je $\lambda(\lambda - \lambda_2)$.

To znamená, že zúžení f na $\text{Im}(f)$ je diagonalizovatelný operátor a existuje báze $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$ v $\text{Im}(f)$ složená z vlastních vektorů f . Označení volíme tak, aby $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{o}$ a $f(\mathbf{u}_3) = \lambda_2 \mathbf{u}_3$. Protože $\mathbf{u}_1 \in \text{Im}(f)$, existuje vektor $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{V}$, pro který platí $f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1$.

Ukážeme, že posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ je báze \mathbf{V} . Je-li

$$a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + a_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{o} ,$$

aplikujeme na obě strany rovnosti operátor f . Dostaneme

$$f(a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + a_3 \mathbf{u}_3) = a_1 f(\mathbf{u}_1) + a_2 f(\mathbf{u}_2) + a_3 f(\mathbf{u}_3) = a_2 \mathbf{u}_1 + a_3 \lambda_2 \mathbf{u}_3 = \mathbf{o} .$$

Posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$ je lineárně nezávislá (je to báze v $\text{Im}(f)$), platí proto $a_2 = 0$ a $a_3 = 0$ (protože $\lambda_2 \neq 0$). Pak také nutně $a_1 = 0$. Posloupnost $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ je lineárně nezávislá a tedy báze ve \mathbf{V} , pro kterou platí

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} .$$

Pokud má f dvě navzájem různá nenulová vlastní čísla λ_1, λ_2 a geometrická násobnost λ_1 je menší než jeho algebraická násobnost, použijeme stejný trik jako v předchozích příkladech. Za pomoci operátoru $g = f - \lambda_1 \text{id}_{\mathbf{V}}$ najdeme bázi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, pro kterou platí

$$[g]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix} .$$

Potom

$$[f]_B^B = [g]_B^B + \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} .$$

Ve všech dosavadních případech jsme našli bázi B v prostoru \mathbf{V} , pro kterou platilo, že matice $[f]_B^B$ měla blokově diagonální tvar a každý z diagonálních bloků se rovnal jedné z tzv. *Jordanových buněk*.

Definice 9.57. *Jordanova buňka* nad tělesem \mathbf{T} řádu $k \geq 1$ s vlastním číslem λ je libovolná čtvercová matice řádu k

$$J_{\lambda,k} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} ,$$

kde $\lambda \in \mathbf{T}$.

Libovolná matice řádu 1 je také Jordanovo buňkou. Jordanova buňka má na hlavní diagonále všechny prvky rovné λ a bezprostředně nad hlavní diagonálou všechny prvky rovné 1. Ostatní prvky matice $J_{\lambda,k}$ jsou nulové. Charakteristický polynom Jordanovy buňky se rovná $p(t) = (\lambda - t)^k$, matice $J_{\lambda,k}$ má jediné vlastní číslo λ , jeho algebraická násobnost se rovná k a geometrická násobnost je 1.

Kdy má operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ vzhledem k nějaké bázi $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ matici $[f]_B^B = J_{\lambda, k}$? Musí platit

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_1) &= \lambda \mathbf{u}_1, \\ f(\mathbf{u}_2) &= \lambda \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1, \\ f(\mathbf{u}_3) &= \lambda \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_2, \\ &\vdots \\ f(\mathbf{u}_k) &= \lambda \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_{k-1}. \end{aligned}$$

Libovolnou posloupnost nenulových vektorů $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ splňující uvedené rovnosti budeme nazývat *Jordanův řetízek* délky k s počátkem \mathbf{u}_1 příslušným k vlastnímu číslu λ . V případě, že Jordanův řetízek je bází B , má toto vlastní číslo λ geometrickou dimenzi 1.

OBRAZEK

Výsledky příkladů týkajících se operátorů na prostorech dimenze 3 můžeme shrnout do následujícího tvrzení.

Tvrzení 9.58. *Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor dimenze 3 nad tělesem \mathbf{T} a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ je lineární operátor takový, že jeho charakteristický polynom $p(\lambda)$ se rozkládá nad \mathbf{T} na součin lineárních činitelů. Potom existují jednoznačně určená čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{T}$ (nikoliv nutně různá) a nějaká báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ ve \mathbf{V} taková, že matice $[f]_B^B$ operátoru f vzhledem k bázi B se rovná jedné z následujících matic*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Buď A matice řádu 3 nad tělesem \mathbf{T} taková, že její charakteristický polynom se nad \mathbf{T} rozkládá na součin lineárních činitelů. Potom je matice A podobná právě jedné z uvedených matic pro nějaká čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{T}$.

Všimněme si, že na hlavní diagonále každé ze tří uvedených matic jsou vlastní čísla operátoru f , každé tolikrát, kolik je jeho algebraická násobnost. Druhá matice odpovídá nediodagonalizovatelným operátorům s jediným vlastním číslem λ_1 , jehož geometrická násobnost je 1. Má-li operátor jedno vlastní číslo s geometrickou násobností 2, odpovídá mu třetí matice. Je-li jeho algebraická násobnost 3, platí $\lambda_1 = \lambda_2$, je-li 2, platí $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Každá z těchto matic je tak jednoznačně (až na pořadí Jordanových buněk) určena vlastními čísly operátoru f a jejich algebraickými a geometrickými násobnostmi.

Každá z bází $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ je disjunktním sjednocením Jordanových řetízků. Jejich počet a délky jsou určeny operátorem f . Bázi složenou ze tří disjunktčních Jordanových řetízků délky 1 mají diagonalizovatelné operátory na třídídimenzionálních prostorech. Bázi sestávající z jednoho řetízku délky 2 a jednoho délky 1 příslušející různým vlastním číslům mají nediodagonalizovatelné operátory se dvěma různými vlastními čísly. Bázi sestávající z jednoho Jordanova řetízku délky 3 mají operátory s jedním vlastním číslem s algebraickou násobností 3 a geometrickou násobností 1. Bázi tvořenou dvěma řetízky příslušnými témuž vlastnímu číslu mají operátory s jedním vlastním číslem s algebraickou násobností 3 a geometrickou násobností 2. Počet Jordanových řetízků s počátkem příslušným danému vlastnímu číslu operátoru f se tak rovná geometrické násobnosti tohoto vlastního čísla, součet jejich délek je algebraická násobnost tohoto čísla.

Pro operátory na prostorech dimenze větší než 3 už pouze s algebraickými a geometrickými násobnostmi vlastních čísel nevystačíme.

Příklad 9.59. Následující dvě matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

jsou obě singulární, jejich charakteristický polynom se rovná v obou případech $p(\lambda) = \lambda^4$. Obě matice mají hodnotu 2, geometrická násobnost vlastního čísla 0 je v obou případech 2, algebraická násobnost je vždy 4. Přesto nejsou matice podobné, což je například vidět z toho, že B^2 se rovná nulové matici, zatímco A^2 je nenulová matice.

Následující **věta o Jordanově kanonickém tvaru** dává úplný popis lineárního operátoru na konečně generovaném prostoru, pokud se charakteristický polynom operátoru rozkládá na součin lineárních činitelů.

Věta 9.60. *Je-li $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na vektorovém prostoru \mathbf{V} dimenze n nad tělesem \mathbf{T} , jehož charakteristický polynom se rozkládá na součin lineárních činitelů nad tělesem \mathbf{T} , pak existuje báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ ve \mathbf{V} , která se skládá ze Jordanových řetízků, tj. matice $[f]_B^B$ operátoru f vzhledem k bázi B je blokově diagonální matice*

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s \end{pmatrix},$$

kde každý diagonální blok J_1, \dots, J_s se rovná nějaké Jordanově buňce.

Důkaz. Větu dokážeme tak, že najdeme bázi \mathbf{V} , která se skládá ze Jordanových řetízků. Postupovat budeme indukcí podle dimenze n .

Je-li $n = 1$, matice f vzhledem k jakékoliv bázi B prostoru \mathbf{V} má řád 1 a je tedy Jordanovo buňkou a báze B je tvořena jedním Jordanovým řetízkiem délky 1. Ten je tak jediným Jordanovým řetízkiem v bázi B , který začíná vlastním vektorem příslušným k jedinému vlastnímu číslu operátoru f . Toto vlastní číslo má geometrickou násobnost 1 (větší mít nemůže).

Předpokládejme, že $n > 1$ a pro každý operátor $g : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$ na prostoru dimenze $r < n$, jehož charakteristický polynom se rozkládá na součin lineárních činitelů nad \mathbf{T} , existuje báze $C = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r)$, která se skládá ze Jordanových řetízků, přičemž počet Jordanových řetízků, jejichž počátkem je vlastní vektor příslušný nějakému vlastnímu číslu λ operátoru g , se rovná geometrické násobnosti vlastního čísla λ .

Napřed uvažíme případ, kdy 0 patří mezi vlastní čísla operátoru f . Potom $\dim(\text{Ker } f) > 0$ a podle věty o dimenzi jádra a obrazu je $\dim(\text{Im } f) = n - \dim(\text{Ker } f) < n$. Označme $\dim(\text{Im } f) = r$. Potom $\dim(\text{Ker } f) = n - r$. Podprostor $\text{Im}(f) \leq \mathbf{V}$ je invariantním podprostorem operátoru f . Zúžení f na podprostor $\text{Im}(f)$ je lineární operátor na prostoru $\text{Im}(f)$, označme si jej g . Charakteristický polynom operátoru g dělí charakteristický polynom operátoru f , který se rozkládá na součin lineárních činitelů nad \mathbf{T} . Proto se i charakteristický polynom operátoru g rozkládá na součin lineárních činitelů nad \mathbf{T} .

Podle indukčního předpokladu existuje báze $C = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r)$, která se skládá ze Jordanových řetízků, přičemž počet Jordanových řetízků, jejichž počátkem je vlastní vektor příslušný nějakému vlastnímu číslu λ operátoru g se rovná geometrické násobnosti vlastnímu číslu λ operátoru g . Označme p dimenzi průniku podprostorů $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$. Je-li $p > 0$, znamená to, že 0 je také vlastní číslo operátoru g a jeho geometrická násobnost v případě operátoru g je p . Podle indukčního předpokladu existuje v bázi C právě p Jordanových řetízků příslušných vlastnímu číslu 0. Každý z těchto p Jordanových řetízků začíná nějakým vlastním vektorem \mathbf{w}_{i_k} zúžení g na podprostor $\text{Im}(f)$ příslušným vlastnímu číslu 0 a končí nějakým vektorem $\mathbf{w}_{j_k} \in \text{Im}(f)$ pro $k = 1, \dots, p$. Existují tedy vektory \mathbf{u}_k takové, že $f(\mathbf{u}_k) = \mathbf{w}_{j_k}$.

OBRÁZEK

Počáteční vektory $(\mathbf{w}_{i_1}, \mathbf{w}_{i_2}, \dots, \mathbf{w}_{i_p})$ těchto p řetízků leží v podprostoru $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$, který má dimenzi p . Protože jsou lineárně nezávislé coby vektory báze C , tvoří bázi v podprostoru $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$. Pokud je $p < \dim(\text{Ker } f) = n - r$, doplníme tuto bázi pomocí vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-r-p}$ do báze jádra $\text{Ker}(f)$. Nyní definujeme posloupnost B tak, že do posloupnosti C přidáme vektory \mathbf{u}_k tak, aby každý z těchto vektorů následoval za vektorem \mathbf{w}_{j_k} pro $k = 1, \dots, p$. Na konec takto vzniklé posloupnosti přidáme vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-r-p}$. Počet prvků takto vzniklé posloupnosti se rovná $r + p + (n - r - p) = n = \dim \mathbf{V}$. Pokud dokážeme, že je lineárně nezávislá, bude tvořit bázi prostoru \mathbf{V} .

Je-li

$$a_1 \mathbf{w}_1 + \dots + a_r \mathbf{w}_r + b_1 \mathbf{u}_1 + \dots + b_p \mathbf{u}_p + c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_{n-r-p} \mathbf{v}_{n-r-p} = \mathbf{o},$$

použijeme na obě strany rovnosti operátor f . Vektor

$$f(a_1 \mathbf{w}_1 + \dots + a_r \mathbf{w}_r)$$

je lineární kombinací vektorů \mathbf{w}_i , mezi kterými se nevyskytují vektory \mathbf{w}_{j_k} , neboť tyto vektory jsou koncovými vektory Jordanových řetízků pro operátor g . Dále platí

$$f(b_1 \mathbf{u}_1 + \dots + b_p \mathbf{u}_p) = b_1 \mathbf{w}_{j_1} + b_2 \mathbf{w}_{j_2} + \dots + b_p \mathbf{w}_{j_p}$$

a $f(\mathbf{v}_l) = \mathbf{o}$ pro každé $l = 1, \dots, n - r - p$. Vektor

$$f(a_1 \mathbf{w}_1 + \dots + a_r \mathbf{w}_r + b_1 \mathbf{u}_1 + \dots + b_p \mathbf{u}_p + c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_{n-r-p} \mathbf{v}_{n-r-p})$$

je tedy nějakou lineární kombinací vektorů posloupnosti $C = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r)$, která se rovná $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$. Protože posloupnost C je lineárně nezávislá (báze $\text{Im}(f)$), jsou všechny koeficienty této lineární kombinace rovné 0. Speciálně jsou rovné 0 koeficienty u vektorů \mathbf{w}_{j_k} , tj. $b_k = 0$ pro $k = 1, \dots, p$. Z původní rovnosti

$$a_1 \mathbf{w}_1 + \dots + a_r \mathbf{w}_r + b_1 \mathbf{u}_1 + \dots + b_p \mathbf{u}_p + c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_{n-r-p} \mathbf{v}_{n-r-p} = \mathbf{o},$$

tak dostáváme rovnost

$$a_1 \mathbf{w}_1 + \dots + a_r \mathbf{w}_r + c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_{n-r-p} \mathbf{v}_{n-r-p} = \mathbf{o}.$$

Posloupnost $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r)$ generuje $\text{Im}(f)$. Patří do ní i vektory $\mathbf{w}_{i_1}, \mathbf{w}_{i_2}, \dots, \mathbf{w}_{i_p}$, které spolu s vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-r-p}$ generují jádro $\text{Ker}(f)$. Posloupnost vektorů $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-r-p})$ tak generuje součet podprostorů $\text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$ neboť oba podprostory leží v jejím lineárním obalu. Dimenze tohoto součtu se podle věty o dimenzi součtu a průniku podprostorů rovná $\dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f) - \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)) = r + (n - r) - p = n - p$, což počet prvků posloupnosti $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-r-p})$. Tato posloupnost je tedy bází součtu podprostorů

$\text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$ a je proto lineárně nezávislá. Odtud plyne, že také všechny koeficienty $a_i = 0$ pro $i = 1, \dots, r$ a $c_l = 0$ pro $l = 0, \dots, n - r - p$. Tím jsme dokázali, že posloupnost B je lineárně nezávislá a tedy báze prostoru \mathbf{V} .

Z konstrukce báze vyplývá, že B je sjednocením Jordanových řetízků pro operátor f . Všechny Jordanovy řetízky pro zúžení operátoru f na podprostor $\text{Im}(f)$ odpovídající vlastnímu číslu 0 tohoto zúžení (tj. s počátečním vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu 0, kterých je v bázi C podle indukčního předpokladu p) jsou v bázi B prodloužené o jeden vektor. K nim přibylo celkem $n - r - p$ jednoprvkových řetízků \mathbf{v}_k , které také začínají ve vlastním vektoru f příslušném vlastnímu číslu 0. Počet Jordanových řetízků s počátkem ve vlastním vektoru příslušném vlastnímu číslu 0 se v bázi B rovná $n - r = \dim(\text{Ker } f)$, což je geometrická násobnost vlastního čísla 0 operátoru f . A je-li λ nenulové vlastní číslo operátoru f , patří libovolný vlastní vektor f příslušný vlastnímu číslu λ do $\text{Im}(f)$. Podprostor vlastních vektorů operátoru g (tj. zúžení f na $\text{Im}(f)$) příslušných λ se tak rovná prostoru vlastních vektorů operátoru f příslušných λ . Oba podprostory tak mají stejnou dimenzi rovnou geometrické násobnosti λ . Počet Jordanových řetízků s počátečním vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu λ v bázi C se podle indukčního předpokladu rovná geometrické násobnosti vlastního čísla λ a v bázi B zůstává stejný.

Tím je plně dokázán indukční krok v případě, že 0 je vlastní vektor operátoru f . Pokud jsou všechna vlastní čísla operátoru f nenulová, použijeme právě dokázaný výsledek na operátor $g = f - \lambda \text{id}_{\mathbf{V}}$, kde λ je libovolné vlastní číslo f . \square

O blokově diagonální matici, jejíž diagonální bloky se rovnají Jordanovým buňkám, také říkáme, že je v Jordanově kanonickém tvaru. Spolu se základní větou algebry plyne z věty o Jordanově kanonickém tvaru následující důsledek, který bývá rovněž často uváděn pod stejným názvem.

Důsledek 9.61. *Pro každý operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně dimenzionálním prostoru \mathbf{V} nad tělesem komplexních čísel \mathbb{C} existuje báze B ve \mathbf{V} taková, že matice $[f]_B^B$ je v Jordanově kanonickém tvaru.*

Každá komplexní matice A řádu n je podobná nějaké matici v Jordanově kanonickém tvaru.

Protože charakteristický polynom libovolné matice v Jordanově kanonickém tvaru se rozkládá na součin lineárních činitelů (je to determinant horní trojúhelníkové matice a tedy součin lineárních polynomů na hlavní diagonále) platí následující věta.

Věta 9.62. *Pro lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} existuje báze B ve \mathbf{V} taková, že matice $[f]_B^B$ je v Jordanově kanonickém tvaru právě tehdy když se charakteristický polynom operátoru f rozkládá na součin lineárních činitelů nad \mathbf{T} .*

Matice A nad tělesem \mathbf{T} je podobná nějaké matici v Jordanově kanonickém tvaru právě tehdy když se charakteristický polynom matice A rozkládá na součin lineárních činitelů nad \mathbf{T} .

Jordanův kanonický tvar rovněž dovoluje rozložit prostor \mathbf{V} na direktní součet invariantních podprostorů operátoru $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$.

Tvrzení 9.63. *Je-li $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor, B báze prostoru \mathbf{V} složená ze Jordanových řetízků pro operátor f a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ Jordanův řetízek s počátkem ve vlastním vektoru \mathbf{u}_1 příslušném vlastnímu číslu λ , pak lineární obal $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ je*

invariantní podprostor operátoru f a je to nejmenší invariantní podprostor operátoru f obsahující vektor \mathbf{u}_k .

Je-li $\lambda \neq 0$, pak zúžení f na invariantní podprostor $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ je izomorfismus (tj. vzájemně jednoznačný operátor).

Důkaz. Každý invariantní podprostor f obsahující vektor \mathbf{u}_k musí obsahovat vektor $f(\mathbf{u}_k) = \lambda \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_{k-1}$ a také vektor $f(\mathbf{u}_k) - \lambda \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k-1}$. Analogicky, protože obsahuje \mathbf{u}_{k-1} , musí obsahovat také $\mathbf{u}_{k-2}, \dots, \mathbf{u}_1$. Každý invariantní podprostor f obsahující \mathbf{u}_k tak musí obsahovat $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$.

Ukážeme, že $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ je invariantní podprostor f . Libovolný vektor $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ vyjádříme jako lineární kombinaci

$$\mathbf{x} = a_k \mathbf{u}_k + \dots + a_2 \mathbf{u}_2 + a_1 \mathbf{u}_1,$$

a spočítáme jeho obraz $f(\mathbf{x}) = a_k f(\mathbf{u}_k) + \dots + a_2 f(\mathbf{u}_2) + a_1 f(\mathbf{u}_1)$. Protože každý z vektorů $f(\mathbf{u}_i) \in \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$, platí také $f(\mathbf{x}) \in \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$.

Matice zúžení g operátoru f na invariantní podprostor $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ vzhledem k bázi $C = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ tohoto podprostoru se rovná $[g]_C^C = J_{\lambda, k}$. Je-li $\lambda \neq 0$, je matice $J_{\lambda, k}$ regulární a operátor g je tak izomorfismus. \square

Větu o Jordanově kanonickém tvaru tak můžeme formulovat také následovně.

Věta 9.64. *Předpokládáme, že charakteristický polynom lineárního operátoru $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na prostoru konečné dimenze n nad tělesem \mathbf{T} se rozkládá na součin lineárních činitelů nad \mathbf{T} . Potom existují invariantní podprostory $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_s$ operátoru f takové, že*

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{V}_s$$

a v každém z podprostorů \mathbf{V}_i existuje báze tvořená jedním Jordanovým řetízkem.

Důkaz. V prostoru \mathbf{V} existuje báze B složená ze Jordanových řetízků. Tuto bázi si rozložíme na jednotlivé Jordanovy řetízky B_1, \dots, B_s . Každý z řetízků B_i generuje invariantní podprostor \mathbf{V}_i operátoru f podle předchozího tvrzení. Protože báze B je sjednocením bází B_i podprostorů \mathbf{V}_i , lze každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ vyjádřit jako součet nějakých vektorů $\mathbf{x}_i \in \mathbf{V}_i$. Vzhledem k tomu, že báze B_i jsou navzájem disjunktní, je toto vyjádření určené jednoznačně. Tím je dokázáno, že $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{V}_s$ podle tvrzení 5.91. \square

Matice

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s \end{pmatrix}$$

v blokově diagonálním tvaru můžeme násobit po diagonálních blocích. Platí

$$J^m = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} J_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s^m \end{pmatrix}.$$

Pro mocnění matic v Jordanově kanonickém tvaru tak stačí umět rychle umocňovat Jordanovy buňky. Použijeme-li konvenci, že binomické číslo $\binom{m}{j} = 0$ pokud $m < j$, platí následující formulka.

Tvrzení 9.65. Je-li $J = J_{\lambda,k}$ Jordanova buňka, pak pro každé kladné m platí

$$J_{\lambda,k}^m = \begin{pmatrix} \lambda^m & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & \binom{m}{2}\lambda^{m-2} & \cdots & \binom{m}{k-1}\lambda^{m-k+1} \\ 0 & \lambda^m & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & \cdots & \binom{m}{k-2}\lambda^{m-k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^m & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^m \end{pmatrix}.$$

Důkaz. S konvencí $\binom{m}{j} = 0$ pokud $m < j$, můžeme prvek na místě (i, j) v mocnině $J_{\lambda,k}^m$ zapsat jako $\binom{m}{j-i}\lambda^{m-(j-i)}$. K důkazu lze použít indukci podle m , případ $m = 1$ je zjevný. Pokud formulka platí pro $m \geq 1$, spočítáme $J_{\lambda,k}^{m+1} = J_{\lambda,k} J_{\lambda,k}^m$. Obě matice, které násobíme, jsou horní trojúhelníkové, součin je proto také horní trojúhelníkový. Zbývá spočítat prvky na místě (i, j) v součinu $J_{\lambda,k} J_{\lambda,k}^m$ pro $i \leq j$. Prvek na místě (i, j) v matici $J_{\lambda,k}^m$ se podle indukčního předpokladu rovná $\binom{m}{j-i}\lambda^{m-(j-i)}$. Prvek na místě (i, j) v matici $J_{\lambda,k} J_{\lambda,k}^m$ se pak rovná

$$\begin{aligned} & \lambda \binom{m}{j-i} \lambda^{m-(j-i)} + 1 \binom{m}{j-(i+1)} \lambda^{m-(j-i-1)} \\ &= \binom{m}{j-i} \lambda^{m+1-(j-i)} + \binom{m}{j-i-1} \lambda^{m+1-(j-i)} \\ &= \binom{m+1}{j-i} \lambda^{m+1-(j-i)}, \end{aligned}$$

použili jsme vztah mezi kombinačními čísly $\binom{m}{l} + \binom{m}{l-1} = \binom{m+1}{l}$. \square

Příklad 9.66. Máme řešit diferenční rovnici $\mathbf{v}_k = A\mathbf{v}_{k-1}$ s reálnou přechodovou maticí

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a počátečním stavem \mathbf{v}_0 , která má řešení $\mathbf{v}_k = A^k \mathbf{v}_0$.

Pokusíme se převést matici A do Jordanova kanonického tvaru J tak, že budeme hledat regulární matici R , pro kterou platí $R^{-1}AR = J$. Charakteristický polynom matice A se rovná $-\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$, rozkládá se tedy nad \mathbb{R} na součin lineárních činitelů. Vlastní čísla matice A jsou 1 (algebraická násobnost je 2) a -1 (s algebraickou násobností 1). Geometrická násobnost vlastního čísla 1 se rovná dimenzi nulového prostoru matice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a je tedy 1. Matice A není diagonalizovatelná. Víme už, že báze \mathbb{R}^3 složená z Jordanových řetízků má jeden řetízek $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ příslušný vlastnímu číslu 1 a jeden řetízek \mathbf{u}_3 příslušný vlastnímu číslu -1 . Vektor \mathbf{u}_1 je nenulový vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1 a najdeme jej jako nenulové řešení soustavy $(A - I_3)\mathbf{x} = \mathbf{o}$, například můžeme zvolit $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 2)^T$. Pro vektor \mathbf{u}_2 musí platit $(A - I_3)\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1$ a můžeme tedy položit $\mathbf{u}_2 = (0, 0, 1)^T$. Nakonec najdeme nenulový vlastní vektor \mathbf{u}_3

příslušný vlastnímu číslu -1 jako nenulové řešení soustavy $(A + I_3)\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$, takže stačí zvolit $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 0)^T$. Našli jsme tak matici $R = (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_3)$, pro kterou platí

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poslední matici, která je v Jordanově kanonickém tvaru, označíme J . Spočteme ještě

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom platí $A^k = RJ^kR^{-1}$. Protože

$$J^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1^k & k1^{k-1} & 0 \\ 0 & 1^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix},$$

dostáváme

$$\begin{aligned} A^k \mathbf{v}_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2k & 0 & k \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ -4k & 0 & 2k + 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

Na závěr této části ukážeme jednoznačnost Jordanova kanonického tvaru, což je totéž jako jednoznačnost počtu a délek Jordanových řetízků s počátkem příslušným danému vlastnímu číslu λ . Každá Jordanova buňka v kanonickém tvaru totiž odpovídá jednomu Jordanovu řetízku. Matice v Jordanově kanonickém tvaru je horní trojúhelníková, algebraická násobnost vlastního čísla λ se tedy rovná počtu výskytů λ na hlavní diagonále, který se rovná součtu délek Jordanových řetízků s počátkem ve vlastní vektoru příslušném λ . V důkazu věty o existenci Jordanova kanonického tvaru jsme dokázali, že počet Jordanových řetízků s počátkem ve vlastní vektoru příslušném vlastnímu číslu λ se rovná geometrické násobnosti λ . Zbývá dokázat, že také délky řetízků příslušných vlastnímu číslu λ jsou určeny jednoznačně. To je obsahem **věty o jednoznačnosti Jordanova kanonického tvaru**.

Věta 9.67. Předpokládáme, že charakteristický polynom lineárního operátoru $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na prostoru konečné dimenze n na tělese \mathbf{T} se rozkládá na součin lineárních činitelů nad \mathbf{T} a B je libovolná báze \mathbf{V} složená ze Jordanových řetízků. Potom pro každé vlastní číslo λ operátoru f a každé $m \geq 1$ je počet řetízků délky m s počátkem ve vlastní vektoru příslušném vlastnímu číslu λ určený jednoznačně operátorem f . Tj. také počet Jordanových buněk $J_{\lambda, m}$ v libovolném Jordanově kanonickém tvaru operátoru f je určený jednoznačně.

Důkaz. Opět začneme případem $\lambda = 0$. Matice $J = [f]_B^B$ je v Jordanově kanonickém tvaru. Pro matici mocniny f^m vzhledem k bázi B platí $[f^m]_B^B = J^m$. A matice J^m má blokově diagonální tvar s diagonálními bloky $J_{\lambda, k}^m$. Snadno nahlédneme, že vynecháním nulových řádků z matice $[f^m]_B^B = J^m$ dostaneme matici v řádkově odstupňovaném tvaru, počet nulových řádků v matici J^m se tedy rovná

$\dim(\text{Ker } f^m)$. Všechny bloky $J_{\lambda,k}^m$ pro nenulová vlastní čísla λ jsou horní trojúhelníkové matice s nenulovými prvky na hlavní diagonále a všechny jejich řádky jsou tedy nenulové. Nulové řádky v matici $[f^m]_B^B = J^m$ tak mohou procházet pouze buňkami příslušnými vlastnímu číslu 0. Každá taková buňka

$$J_{0,k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obsahuje právě jeden nenulový řádek. Platí, že počet nulových řádků v $J_{0,k}^m$ se rovná m , pokud $m \leq k$ a rovná se k , pokud $m \geq k$.

Označíme si s_m počet řetízků v B délky aspoň m příslušných vlastnímu číslu 0. Rozdíl $s_m - s_{m+1}$ se tak rovná počtu řetízků délky přesně m . Při přechodu od $[f^m]_B^B$ k $[f^{m+1}]_B^B$ se zvýší počet nulových řádků v těch buňkách, které mají řád aspoň $m+1$. Platí tedy

$$s_{m+1} = \dim(\text{Ker } f^{m+1}) - \dim(\text{Ker } f^m)$$

a tedy

$$\begin{aligned} s_m - s_{m+1} &= (\dim(\text{Ker } f^m) - \dim(\text{Ker } f^{m-1})) - (\dim(\text{Ker } f^{m+1}) - \dim(\text{Ker } f^m)) \\ &= -\dim(\text{Ker } f^{m-1}) + 2\dim(\text{Ker } f^m) - \dim(\text{Ker } f^{m+1}) . \end{aligned}$$

Počet řetízků délky m příslušných vlastnímu číslu 0, tj. počet buněk $J_{0,m}$ v Jordanově kanonickém tvaru, tak závisí pouze na operátoru f a nezávisí na konkrétní volbě báze složené ze Jordanových řetízků.

V případě nenulového vlastního čísla λ použijeme právě dokázaný výsledek na operátor $g = f - \lambda \text{id}_{\mathbf{V}}$, který má vlastní číslo 0. \square

Věta o jednoznačnosti Jordanova kanonického tvaru ukazuje, že počet buněk $J_{\lambda,k}$ v Jordanově kanonickém tvaru, tj. počet řetízků délky k v bázi složené ze Jordanových řetízků pro operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, je určený vlastními čísly λ operátoru, jejich algebraickou násobností, a dimenzemi podprostorů $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_{\mathbf{V}})^k$. Těmito číselným charakteristikám operátoru f říkáme *algebraické invarianty operátoru f* .

Příklad 9.68. Jordanův kanonický tvar umožňuje rovněž řešit soustavy lineárních diferenciálních rovnic s nediagonalizovatelnou maticí.

OBRAZEK

Čistá voda protéká třemi tanky o objemu V metrů krychlových, napřed do tanku číslo 3, pak do tanku číslo 2 a nakonec do tanku číslo 1. Voda protéká rychlostí r metrů krychlových za sekundu. V každém tanku je nějaké množství nečistot, jeho objem v i -tém tanku v čase t označíme $u_i(t)$ metrů krychlových. Podíl nečistot v i -tém tanku v čase t je tedy $u_i(t)/V$. Jak se vyvíjí podíl nečistot v jednotlivých tancích?

Objem nečistot v prvním tanku se mění rychlostí

$$u_1'(t) = \frac{r}{V}(u_2(t) - u_1(t)) .$$

Podobně

$$u_2'(t) = \frac{r}{V}(u_3(t) - u_2(t))$$

a

$$u_3'(t) = -\frac{r}{V}u_3(t) .$$

Vektor koncentrací nečistot se také vyvíjí v čase podle rovnice

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ u_3'(t) \end{pmatrix} = \frac{r}{V} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} .$$

Tato soustava má horní trojúhelníkovou matici (kvůli koeficientu r/V není v Jordanově kanonickém tvaru) a její řešení tak splňují soustavu rovnic

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \frac{r}{V}(-u_1(t) + u_2(t)) \\ u_2'(t) &= \frac{r}{V}(-u_2(t) + u_3(t)) \\ u_3'(t) &= -\frac{r}{V}u_3(t) . \end{aligned}$$

Přidáme-li počáteční podmínky $u_i(0) = c_i$, dostaneme ze třetí rovnice jednoznačně určené řešení

$$u_3(t) = c_3 e^{-rt/V} .$$

Dosadíme do druhé rovnice a dostaneme tak

$$u_2'(t) = -\frac{r}{V}u_2 + \frac{r}{V}c_3 e^{-rt/V}$$

Tato rovnice má jednoznačné řešení

$$u_2(t) = c_2 e^{-rt/V} + c_3 \frac{rt}{V} e^{-rt/V} .$$

Metodu, jak toto řešení nalézt, se dozvíte příští rok v kursu matematické analýzy. Teď jenom můžeme ověřit, že uvedená funkce je skutečně řešením. Po dosazení tohoto řešení do první rovnice dostaneme

$$u_1'(t) = -\frac{r}{V}u_2 + \frac{r}{V}(c_2 e^{-rt/V} + c_3 \frac{rt}{V} e^{-rt/V})$$

a tato rovnice má jednoznačné řešení

$$u_1(t) = c_1 e^{-rt/V} + c_2 \frac{rt}{V} c_3 e^{-rt/V} + \frac{1}{2} c_3 \left(\frac{rt}{V}\right)^2 e^{-rt/V} .$$

Vidíme, že znečištění nejrychleji ubývá ve třetím tanku, o něco pomaleji ve druhém a nejpomaleji v prvním tanku.

Ukážeme si ještě **Cayley-Hamiltonovu větu**. Ta říká, že každá matice je „kořenem“ svého charakteristického polynomu. My si ji dokážeme pouze v případě, že se její charakteristický polynom rozkládá na součin lineárních činitelů.

Příklad 9.69. V příkladu 9.66 jsme ukázali, že matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom $p(t) = -(t-1)^2(t+1) = -t^3 + t^2 + t - 1$. Našli jsme tam regulární matici R takovou, že $R^{-1}AR = J$, kde

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

je matice v Jordanově kanonickém tvaru. Vypočteme $A = RJR^{-1}$ a dosadíme do charakteristického polynomu

$$p(A) = -A^3 + A^2 + A - I_3 = R(-J^3 + J^2 + J - I_3)R^{-1} .$$

Protože

$$J^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

platí $-J^3 + J^2 + J - I_3 = O_{3 \times 3}$ a tedy také $p(A) = R(-J^3 + J^2 + J - I_3)R^{-1} = O_{3 \times 3}$.

Tento příklad není v ničem náhodný, pomocí věty o Jordanově kanonickém tvaru můžeme dokázat, že každá matice splňuje svoji charakteristickou rovnici. Nejdříve si ujasníme, že ji splňuje každá Jordanova buňka.

Příklad 9.70. Je-li $A = J_{0,k}$, pak charakteristický polynom matice A se rovná $p(t) = (-1)t^k$. Pro matici A platí $A^k = O_{k \times k}$.

Podobně, charakteristický polynom matice $B = J_{\lambda,k}$ se rovná $p(t) = (\lambda - t)^k$ a matice B splňuje rovnici $(\lambda I_k - B)^k = (-J_{0,k})^k = O_{k \times k}$.

Věta 9.71. Je-li A matice řádu n nad tělesem \mathbf{T} a její charakteristický polynom $p(t)$ se rovná $c_n t^n + \dots + c_1 t + c_0$. Pak platí

$$p(A) = c_n A^n + \dots + c_1 A + c_0 I_n = O_{n \times n} .$$

Důkaz. Dokážeme si větu pouze v případě, že se charakteristický polynom matice A rozkládá nad \mathbf{T} na součin lineárních činitelů. V případě, že tomu tak není, je nutné napřed rozšířit těleso \mathbf{T} do většího tělesa tak, aby v tom větším tělese měl charakteristický polynom dostatek kořenů. To lze udělat vždy a bude to v kursu algebry ve druhém ročníku.

Protože předpokládáme, že se charakteristický polynom matice A rozkládá na součin lineárních činitelů, existují kořeny $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{T}$ s algebraickými násobnostmi l_1, \dots, l_m tak, že platí

$$p(t) = (\lambda_1 - t)^{l_1} (\lambda_2 - t)^{l_2} \dots (\lambda_m - t)^{l_m} .$$

podle věty o Jordanově kanonickém tvaru existuje regulární matice R taková, že matice $R^{-1}AR$ je v Jordanově kanonickém tvaru J s Jordanovými buňkami J_1, \dots, J_s na hlavní diagonále. Dosadíme matici $A = RJR^{-1}$ do charakteristického polynomu a dostaneme

$$\begin{aligned} p(A) &= (\lambda_1 I_n - RJR^{-1})^{l_1} (\lambda_2 I_n - RJR^{-1})^{l_2} \dots (\lambda_m I_n - RJR^{-1})^{l_m} \\ &= R(\lambda_1 I_n - J)^{l_1} (\lambda_2 I_n - J)^{l_2} \dots (\lambda_m I_n - J)^{l_m} R^{-1} = Rp(J)R^{-1} . \end{aligned}$$

Protože J je v blokově diagonálním tvaru, platí

$$p(J) = p \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(J_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(J_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(J_s) \end{pmatrix} .$$

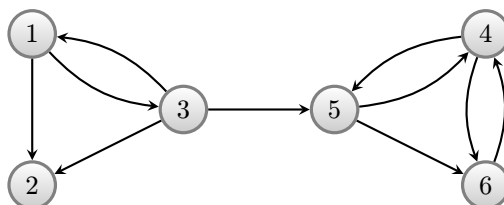
Stačí ověřit, že $p(J_i) = O$ pro každou Jordanovu buňku J_i . Každá Jordanova buňka $J_i = J_{\lambda,k}$, kde $\lambda = \lambda_j$ a $k \leq l_j$ pro nějaké $j = 1, \dots, m$. Podle předchozího příkladu $(\lambda_j I_k - J_i)^k = O_{k \times k}$ a tedy také $(\lambda_j I_k - J_i)^{l_j} = O_{k \times k}$. Odtud vyplývá, že $p(J_i) = O_{k \times k}$ pro každou buňku J_i a proto také $p(A) = Rp(J)R^{-1} = O_{n \times n}$. \square

9.9. Google. Ukážeme si jednu moderní aplikaci vlastních čísel a vlastních vektorů. Myšlenku uspořádání webových stránek podle důležitosti si napřed předvedeme na jednoduchém příkladu. Poté odvodíme obecnou formulaci problému.

Představme si malou síť šesti webových stránek, které na sebe odkazují. Odkazy si zapíšeme do matice $A = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = 1$ právě když stránka j odkazuje na stránku i . Naše síť je zadána maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Protože $a_{21} = 1$, stránka 1 odkazuje na stránku 2. Dále $a_{23} = 1$, také stránka 3 odkazuje na stránku 2. Žádná jiná stránka na stránku 2 neodkazuje. Takto si můžeme nakreslit graf sítě.



OBRÁZEK 19. Google

Z vrcholu j vede šipka do i právě když stránka j odkazuje na stránku i . Matice A je tak maticí incidence grafu sítě. Z prvního semestru víme, že prvek na místě (i, j) v mocnině A^k říká, kolik orientovaných cest délky k vede z vrcholu j do vrcholu i .

Základní myšlenka vyhledávače Google spočívá v tom, že měří důležitost stránky pravděpodobností, s jakou se na stránku dostaneme náhodným klikáním. Důležitosti stránky se dopracujeme tak, že na začátku přiřadíme všem stránkám stejnou důležitost $1/6$. Počáteční aproximací vektoru důležitosti stránek tak bude vektor $\mathbf{r}_0 = (1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6)^T$, i -tá složka je důležitost i -té stránky.

Nyní musíme matici incidence webu upravit tak, aby její hodnoty říkali, s jakou pravděpodobností klikneme na link ze stránky j na stránku i . Pokud ze stránky j vede více odkazů, řekněme k , pak na každý z nich klikneme s pravděpodobností $1/k$. Matici A si upravíme tak, že každou jednotku v j -tém sloupci nahradíme číslem $1/k$, kde k je počet prvků rovných 1 v j -tém sloupci matice A . Dostaneme tak

matici

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Všechny prvky matice H jsou nezáporné a součet každého sloupce se rovná buď 1 nebo 0. Druhá možnost nastane v případě, že z příslušné stránky nevede žádný odkaz. Jako třeba ze stránky s pdf souborem těchto přednášek.

První iteraci vektoru důležitosti stránek v naší síti pak získáme jako $\mathbf{r}_1 = H\mathbf{r}_0$. Složka i tohoto vektoru říká, s jakou pravděpodobností se na stránku i dostaneme z náhodně vybrané stránky po jednom kliknutí. Platí

$$\mathbf{r}_1 = H\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/18 \\ 5/36 \\ 1/12 \\ 1/4 \\ 5/36 \\ 1/6 \end{pmatrix}.$$

Druhou iteraci vektoru důležitosti \mathbf{r}_2 dostaneme jako $H\mathbf{r}_1$. Můžeme ji slovně popsat tak, že uvádí, s jakou pravděpodobností se na i -tou stránku dostaneme jedním kliknutím z nějaké stránky, přičemž počáteční stránky volíme s pravděpodobnostmi danými vektorem \mathbf{r}_1 . Stránka je tedy tím „důležitější“, čím „důležitější“ stránky na ni odkazují. Vyjde

$$\mathbf{r}_2 = H\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/18 \\ 5/36 \\ 1/12 \\ 1/4 \\ 5/36 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/36 \\ 1/18 \\ 1/36 \\ 17/72 \\ 11/72 \\ 14/72 \end{pmatrix}.$$

Hledání vektoru důležitosti jednotlivých stránek tak vede na diferenční rovnici $\mathbf{r}_k = H\mathbf{r}_{k-1}$, která jak víme má řešení $\mathbf{r}_k = H^k\mathbf{r}_0$. Tento vektor můžeme interpretovat tak, že udává, s jakou pravděpodobností se dostaneme na danou stránku po k náhodných kliknutích.

Pro porovnávání důležitosti všech webových stránek bychom museli uvažovat matici celého webu, tedy matici řádu n , kde n je číslo v současnosti větší než třicet miliard. Každá iterace navíc vyžaduje spočítat součin matice tohoto řádu s jedním n -složkovým vektorem, počet aritmetických operací je tak řádu n^2 . To všechno se zdá být zhora nemožné. Nicméně matice H je velmi řídká, naprostá většina jejích prvků se rovná 0. Pro ty jsou vypracované efektivní metody ukládání. Dále v každém sloupci matice H je v průměru 10 odkazů na jiné stránky, aspoň tak je jejich počet odhadován. Takže součin matice s vektorem vyžaduje pouze $10n$ operací. A to už je v současnosti výpočetně zvládnutelné.

Popsaná diferenční rovnice vyvolává řadu důležitých otázek:

- Konverguje posloupnost vektorů \mathbf{r}_k k nějakému vektoru nebo je celý proces nestabilní?

- Může se stát, že posloupnost vektorů osciluje kolem několika různých limitních vektorů?
- Za jakých podmínek na matici H proces konverguje k jedinému vektoru?
- Pokud konverguje, dává výsledný limitní vektor dobrou míru důležitosti jednotlivých webových stránek?
- Závisí konvergence na počáteční aproximaci \mathbf{r}_0 ?
- Pokud proces konverguje, kolik iterací musíme provést, abychom dostali dobrou aproximaci limitního vektoru?

Už při prvním hraní si s naším malých příkladem zjistíme jeden problém tohoto přístupu. Díky tomu, že v našem příkladu ze stránky 2 nevede žádný odkaz, důležitost této stránky se nijak neprojeví na důležitosti jiných stránek. Na druhou stranu při každé iteraci do sebe nasaje něco z důležitosti jiných stránek a celková suma důležitostí všech stránek se postupně snižuje. Stránkou 2 tak důležitost „odtéká“. Mnohem závažnější je skutečnost, že klastr stránek 4,5,6 odkazuje pouze na stránky 4,5,6, a žádná z nich neodkazuje na žádnou ze stránek 1,2,3, zatímco stránka 3 odkazuje na stránku 5 z tohoto klastru. Klastr stránek 4,5,6 tak bude akumulovat důležitost stránek z celé sítě. Skutečně, již třináctá iterace \mathbf{r}_{13} má první tři složky zanedbatelně malé a zbylé tři složky v poměru $(2/3) : (1/3) : (1/5)$.

Problém se stránkami, ze kterých nevede žádný odkaz, vyřešíme předpokladem, že z takové stránky můžeme náhodně přeskočit na jakoukoliv jinou stránku, na všechny se stejnou pravděpodobností. V našem malém příkladu je takovou stránkou stránka 2, nulový sloupec v matici H nahradíme sloupcem ze samých hodnot $1/6$. Dostaneme tak matici

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} .$$

V obecném případě bychom matici H nahradili maticí

$$S = H + \frac{1}{n} \mathbf{e} \mathbf{a}^T ,$$

kde \mathbf{e} je sloupcový vektor se všemi složkami rovnými 1 a \mathbf{a} je vektor, jehož j -tá složka je rovna 1, pokud z j -té stránky nevede žádný odkaz, a rovna se 0, pokud z j -té stránky nějaký odkaz na jinou stránku vede. Matice S je markovovská matice, to znamená, že její prvky jsou nezáporné a každý sloupec má součet rovný 1. O takových maticích už víme, že číslo 1 je jejich vlastním číslem.

Problém klastru stránek, které akumulují důležitost všech ostatních stránek, touto úpravou nevyřešíme. V našem příkladu bude pořád platit, že mezi klastrem stránek 1,2,3 a klastrem stránek 4,5,6 vedou odkazy pouze jednosměrně, ze stránek 1,2,3 na stránky 4,5,6. Naše brouzdání po webu upravíme ještě jedním způsobem. Zvolíme si nějaké číslo $\alpha \in (1/2, 1)$. Toto číslo je pravděpodobnost, se kterou volíme následující krok při prohlížení webu tak, že klikneme na nějaký odkaz. Pravděpodobnost $1 - \alpha$ je pak pravděpodobnost, že skočíme náhodně na jakoukoliv jinou stránku webu. Dostaneme tak další matici

$$G = \alpha S + \frac{1}{n} (1 - \alpha) \mathbf{e} \mathbf{e}^T .$$

Tato **Google matice** je matice, kterou zakladatelé firmy Google Larry Page a Sergey Brin uvedli ve svém prvním článku o jejich algoritmu PageRank na porovnávání důležitosti webových stránek. Všimněme si, že všechny prvky matice G jsou kladné a součet prvků v každém sloupci zůstává rovný 1.

Náš malý příklad vede při volbě $\alpha = 0,9$ na matici

$$G = 0,9 \cdot S + 0,1 \cdot \frac{1}{6} \mathbf{e}\mathbf{e}^T = \begin{pmatrix} 1/60 & 1/6 & 19/60 & 1/60 & 1/60 & 1/60 \\ 7/15 & 1/6 & 19/60 & 1/60 & 1/60 & 1/60 \\ 7/15 & 1/6 & 1/60 & 1/60 & 1/60 & 1/60 \\ 1/60 & 1/6 & 1/60 & 1/60 & 7/15 & 11/12 \\ 1/60 & 1/6 & 19/60 & 7/15 & 1/60 & 1/60 \\ 1/60 & 1/6 & 1/60 & 7/15 & 7/15 & 1/60 \end{pmatrix}.$$

Diferenční rovnice $\mathbf{r}_k = G\mathbf{r}_{k-1}$ s počátečním vektorem \mathbf{r}_0 má pak řešení $\mathbf{r}_k = G^k\mathbf{r}_0$, které konverguje k jednoznačně určenému vektoru

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0,03721 \\ 0,05396 \\ 0,04151 \\ 0,3751 \\ 0,206 \\ 0,2862 \end{pmatrix}.$$

Tento limitní vektor interpretujeme tak, že náhodný brouzdač po webu řídicí se našimi pravidly stráví v průměru 3,721% času na stránce 1, 5,396% času na stránce 2, 37,51% času na stránce 4, atd.

Vlastnosti vlastních čísel matice G plynou z **Perronovy věty**, kterou dokázal již v roce 1907 německý matematik Oskar Perron. Uvedeme si bez důkazu její důsledky pro Google matici G .

Věta 9.72. *Pro Google matici G platí*

- (1) Číslo 1 je vlastním číslem matice G ,
- (2) geometrická i algebraická násobnost vlastního čísla 1 se rovná jedné,
- (3) existuje vlastní vektor \mathbf{r} příslušný vlastnímu číslu 1, který má všechny složky kladné,
- (4) pro jakékoliv jiné vlastní číslo λ matice G platí $|\lambda| < 1$.

Pokud kladný vlastní vektor \mathbf{r} splňuje navíc podmínku $\|\mathbf{r}\| = 1$, nazývá se *Perronův vektor* matice G . První vlastnost jsme si už ukázali dříve, protože matice G je markovovská (tj. nezáporná a součet každého sloupce se rovná 1) a 1 je proto vlastní číslo G . Můžeme si také ověřit, že z dalších uvedených vlastností matice G plyne konvergence vektorů $\mathbf{r}_k = G^k\mathbf{r}_0$. Pokud si matici G převedeme do Jordanova kanonického tvaru $J = R^{-1}GR$ pomocí nějaké regulární matice R , můžeme předpokládat, že první Jordanova buňka $J_1 = J_{1,1}$ odpovídá vlastnímu číslu 1 a Perronův vektor \mathbf{r} je prvním sloupcem matice R , jejíž sloupce tvoří bázi $B = (\mathbf{r} = \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ aritmetického prostoru \mathbb{R}^n složenou ze Jordanových řetězků. Potom pro matici $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s)$ platí

$$\mathbf{r}_k = RJ^kR^{-1}\mathbf{r}_0 = R \text{diag}(J_1^k, J_2^k, \dots, J_s^k)R^{-1}\mathbf{r}_0.$$

Protože $|\lambda| < 1$ pro jakékoliv vlastní číslo matice G různé od 1, platí $J_i^k \rightarrow O$ pro jakoukoliv Jordanovu buňku různou od J_1 . Matice J^k tak konverguje k matici,

kteřá má na místě $(1, 1)$ prvek 1 a všechny ostatní prvky nulové. Odtud plyne, že posloupnost vektorů

$$\mathbf{r}_k = R J^k R^{-1} \mathbf{r}_0 = R \operatorname{diag}(J_1^k, J_2^k, \dots, J_s^k) R^{-1} \mathbf{r}_0$$

konverguje k nějakému skalárnímu násobku vektoru \mathbf{r} . Protože začínáme s vektorem \mathbf{r}_0 , který má součet složek rovný 1, a násobíme jej markovovskou maticí, každý vektor \mathbf{r}_k má součet složek rovný 1 a tedy jej má rovný 1 i limita posloupnosti vektorů \mathbf{r}_k . Posloupnost vektorů \mathbf{r}_k tak konverguje k nějakému kladnému násobku Perronova vektoru \mathbf{r} , který má všechny složky kladné.

Tento výpočet ukazuje, že vhodný násobek Perronova vektoru odpovídá na všechny otázky spojené s řešením diferenční rovnice $\mathbf{r}_k = G^k \mathbf{r}_{k-1}$ s výjimkou rychlosti konvergence. Rychlost konvergence posloupnosti \mathbf{r}_k závisí na tom, jak rychle konvergují k O mocniny Jordanovy buňky příslušné vlastním číslům $\lambda \neq 1$. Nejpomaleji z nich konvergují buňky odpovídající vlastním číslům $\lambda \neq 1$, který má co největší absolutní hodnotu $|\lambda|$. Rychlost konvergence tak závisí nejvíce na $|\lambda_2|$, kde λ_2 je druhé největší (pokud jde o absolutní hodnotu) vlastní číslo matice G .

Pokud jde o volbu parametru α , autoři algoritmu uvádějí $\alpha = 0,85$. Na volbě α závisí rychlost konvergence a numerická stabilita výpočtů. Z odhadů absolutní hodnoty druhého největšího vlastního čísla matice G vyplývá, že při této volbě α stačí k přesnosti na tři desetinná místa zhruba 50 iterací, tj. stačí spočítat vektor \mathbf{r}_{50} . Rychlost konvergence výpočtu také závisí na volbě počátečního vektoru \mathbf{r}_0 . Otázka volby \mathbf{r}_0 je teoreticky podrobně zkoumána, žádné definitivní výsledky zatím nejsou. Firma Google uvádí, že každý výpočet začíná vždy od stejného počátečního vektoru $\mathbf{r}_0 = (1/n)\mathbf{e}$. Zatím se nepodařilo najít způsob, jak využít předchozích masivních výpočtů při výpočtu nové aktualizace vektoru důležitosti stránek.

Uvedené použití Jordanova kanonického tvaru pro důkaz konvergence posloupnosti vektorů \mathbf{r}_k dobře ilustruje význam teoretických výsledků. Při vlastním výpočtu iterací $\mathbf{r}_k = G \mathbf{r}_{k-1}$ jej nepotřebujeme, součin počítáme přímo. Jordanův kanonický tvar nám umožňuje dokázat, že uvedený numerický postup vede k očekávanému výsledku.

Poslední poznámka se týká rychlosti násobení matice s vektorem. Matice G už není řídká, všechny její prvky jsou nenulové. Její tvar je

$$G = \alpha S + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \mathbf{e} \mathbf{e}^T = H + \alpha \mathbf{e} \mathbf{a}^T + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \mathbf{e} \mathbf{e}^T .$$

Matice H je řídká, s naprostou většinou prvků rovných 0. Matice G se od ní liší přičtením dvou matic s hodnotí rovnou 1. Násobíme-li maticí G libovolný vektor \mathbf{x} , počítáme

$$G \mathbf{x} = (\alpha S + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \mathbf{e} \mathbf{e}^T) \mathbf{x} = H \mathbf{x} + \alpha \mathbf{e} \mathbf{a}^T \mathbf{x} + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{x} .$$

Člen $\alpha \mathbf{e} \mathbf{a}^T \mathbf{x}$ vyžaduje pouze výpočet standardního skalárního součinu $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$, což je n násobení, doplněného o jedno další násobení $\alpha(\mathbf{a}^T \mathbf{x})$. Stejný počet násobení vyžaduje výpočet třetího členu. Celá složitost výpočtu $G \mathbf{x}$ tak závisí na složitosti výpočtu součinu velmi řídké matice H s vektorem \mathbf{x} .

Tento tvar matice G tak stále umožňuje řadu optimalizací výpočtů vytvořených pro počítání s řídkými maticemi.

Označíme-li $E = \frac{1}{n} \mathbf{e} \mathbf{e}^T$ matici, jejíž všechny prvky jsou rovné $1/n$, můžeme rovnici definující vektor \mathbf{r} napsat ve tvaru

$$(\alpha S + (1 - \alpha) E) \mathbf{r} = \mathbf{r} .$$

Její jednoduchost a elegance vede některé autory k názoru, že by měla být zařazena do příštího vydání knihy *It Must Be Beautiful: Great Equations of Modern Science*, jejíž první vydání vyšlo v roce 2002.

9.10. Unitární podobnost. V této části se budeme zabývat výhradně reálnými a komplexními maticemi. Jejich sloupce jsou vektory z \mathbb{R}^n nebo \mathbb{C}^n . V obou prostorech je definovaný standardní skalární součin a můžeme se tak ptát, lze-li matici diagonalizovat pomocí ortogonální nebo unitární matice. To znamená, existuje-li pro danou reálnou nebo komplexní matici ortonormální báze v \mathbb{R}^n nebo v \mathbb{C}^n složená z vlastních vektorů matice. Ukážeme, že pro symetrické a hermitovské matice takové báze existují. Nakonec plně charakterizujeme matice, pro které existuje ortonormální báze složená z vlastních vektorů. Takové báze jsou důležité pro stabilitu numerických výpočtů.

Ne vždy je nutné najít bázi složenou ze Jordanových řetízků. V řadě případů stačí najít bázi, vzhledem ke které má daná matice A horní trojúhelníkový tvar. Na hlavní diagonále mají tyto matice vlastní čísla. A protože podobné matice mají stejné charakteristické polynomy a tedy stejná vlastní čísla, stačí ke zjištění vlastních čísel převést danou matici pomocí podobnosti na horní trojúhelníkovou matici. Ukazuje se, že v takovém případě vystačíme s ortonormálními bázemi.

Příklad 9.73. K matici

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

najdeme ortogonální matici U , pro kterou je matice $U^T A U$ horní trojúhelníková. Spočítáme charakteristický polynom matice A

$$p(\lambda) = (-1 - \lambda)\left(\lambda^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - 1) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 1) .$$

K vlastnímu číslu $\lambda = -1$ najdeme nějaký vlastní vektor, který má normu rovnou 1, např. $\mathbf{u}_1 = (0, 0, 1)^T$. Doplníme jej libovolně do ortonormální báze $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, např. $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)^T$ a $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 0)^T$. Vektory zapíšeme do sloupců matice

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Platí $U_1^{-1} = U_1^T = U_1$ a tedy

$$U_1^T A U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Poslední matice je „blokově horní trojúhelníková“. Označíme druhý diagonální blok

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \\ & \frac{1}{2} \\ & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Tato matice má charakteristický polynom $\lambda^2 - 1$ a tedy vlastní čísla 1, -1 . Najdeme nějaký vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1, např. $(1, 1)$. Tento vektor normalizujeme, dostaneme $\mathbf{v}_1 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, a doplníme jej do ortonormální báze \mathbb{R}^2

pomocí vektoru $\mathbf{v}_2 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. Vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ zapíšeme jako sloupce matice

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Matice V je ortogonální, platí tedy $V^{-1} = V^T$. Spočítáme

$$V^T B V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nyní definujeme matici řádu 3

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{o}^T \\ \mathbf{o} & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Matice U_2 je ortogonální, platí proto $U_2^{-1} = U_2^T$. Nakonec spočítáme

$$\begin{aligned} U_2^T (U_1^T A U_1) U_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Poslední matice je horní trojúhelníková a položíme-li

$$U = U_1 U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

platí pak, že $U^T A U$ je horní trojúhelníková matice.

Následující **Schurova věta** říká, že pomocí unitárních matic můžeme každou komplexní matici převést do horního trojúhelníkového tvaru.

Věta 9.74. *Pro každou komplexní matici A řádu n existuje unitární matice U taková, že $U^* A U$ je horní trojúhelníková matice.*

Je-li matice A reálná a všechna vlastní čísla matice A jsou také reálná, pak existuje (reálná) ortogonální matice Q taková, že $Q^T A Q$ je horní trojúhelníková matice.

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle n . Pro $n = 1$ není co dokazovat, položíme $U = (1)$.

Předpokládáme, že $n > 1$ a pro každou komplexní matici B řádu $n - 1$ existuje unitární matice V taková, že $V^* B V$ je horní trojúhelníková matice. Protože je A komplexní matice, má její charakteristický polynom aspoň jeden komplexní kořen λ_1 . K tomuto vlastnímu číslu matice A najdeme vlastní vektor \mathbf{u}_1 . Zvolíme jej tak, aby platilo $\|\mathbf{u}_1\| = 1$. Vektor \mathbf{u}_1 doplníme libovolně do ortonormální báze $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$. Vektory báze C napíšeme do sloupců matice $U_1 = (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \dots | \mathbf{u}_n)$. Protože $A \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1$, platí

$$U_1^* A U_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{t}^T \\ \mathbf{o} & B \end{pmatrix},$$

kde B je nějaká matice řádu $n-1$, \mathbf{t} je nějaký aritmetický sloupcový vektor dimenze $n-1$ a \mathbf{o} je nulový sloupcový vektor dimenze $n-1$.

Podle indukčního předpokladu existuje unitární matice V řádu $n-1$ taková, že součin V^*BV je horní trojúhelníková matice T . Z matice V vytvoříme matici

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & V \end{pmatrix} .$$

Vzhledem k tomu, že matice V má ortonormální sloupce vzhledem k standardnímu skalárnímu součinu v \mathbb{C}^{n-1} , má i matice U_2 ortonormální sloupce vzhledem k standardnímu skalárnímu součinu v \mathbb{C}^n . Platí tedy

$$U_2^{-1} = U_2^* = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & V^* \end{pmatrix} .$$

Potom

$$\begin{aligned} U_2^* U_1^* A U_1 U_2 &= \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & V^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{t}^T \\ \mathbf{o} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & V \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{t}^T V \\ \mathbf{o} & V^* B V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{t}^T V \\ \mathbf{o} & T \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Poslední matice je horní trojúhelníková. A protože součin unitárních matic je opět unitární matice, můžeme položit $U = U_1 U_2$.

Pokud můžeme na každém kroku najít reálné vlastní číslo, pak celý postup můžeme provést pouze s reálným vlastním vektorem \mathbf{u}_1 , ortonormální bází $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ a vyjde nám reálná matice B . \square

Důsledek 9.75. *Hermitovská matice řádu n má všechna vlastní čísla reálná. Navíc existuje v \mathbb{C}^n ortonormální báze složená z vlastních vektorů matice A .*

Je-li A symetrická reálná matice, existuje ortonormální báze \mathbb{R}^n složená z vlastních vektorů matice A .

Důkaz. Podle Schurovy věty existuje k dané hermitovské matici A unitární matice U taková, že $U^*AU = T$, kde T je horní trojúhelníková matice. Pro ni platí

$$T^* = (U^*AU)^* = U^*A^*U = U^*AU = T ,$$

neboť $A^* = A$. Má-li být $T^* = T$ pro horní trojúhelníkovou matici T , musí být T diagonální s reálnými prvky na hlavní diagonále. Sloupce matice U pak jsou vlastní vektory matice A .

Je-li A reálná symetrická matice, je hermitovská a podle právě dokázaného tvrzení jsou všechna vlastní čísla matice A reálná. Odtud vyplývá, pro každé vlastní číslo matice A existuje reálný vlastní vektor příslušný tomuto vlastnímu číslu. Unitární matice U tvořená vlastními vektory matice A je proto reálná matice a její sloupce tvoří ortonormální bázi \mathbb{R}^n . \square

Poslednímu důsledku se často říká **spektrální věta pro symetrické (hermitovské) matice**. Pro hermitovskou matici A tak existuje unitární matice $U = (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \dots | \mathbf{u}_n)$ a reálná diagonální matice $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, pro které platí

$$AU = U \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) ,$$

tj. $A\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$. Připomeňme si, že každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_n\mathbf{u}_n ,$$

kde $a_i = \mathbf{u}_i^* \mathbf{x}$ a $a_i \mathbf{u}_i = (\mathbf{u}_i^* \mathbf{x}) \mathbf{u}_i$ je ortogonální projekce vektoru \mathbf{x} do směru vektoru \mathbf{u}_i . Potom platí

$$A\mathbf{x} = a_1 A\mathbf{u}_1 + \cdots + a_n A\mathbf{u}_n = \lambda_1 a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mathbf{u}_n = \lambda_1 (\mathbf{u}_1^* \mathbf{x}) \mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_n (\mathbf{u}_n^* \mathbf{x}) \mathbf{u}_n.$$

Každé zobrazení $P_i \mathbf{x} = (\mathbf{u}_i^* \mathbf{x}) \mathbf{u}_i = (\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^*) \mathbf{x}$ je lineární a je to ortogonální projekce prostoru \mathbb{C}^n do přímky určené vektorem \mathbf{u}_i . Pro zobrazení určené maticí A tak platí

$$A\mathbf{x} = \lambda_1 P_1 \mathbf{x} + \lambda_2 P_2 \mathbf{x} + \cdots + \lambda_n P_n \mathbf{x}.$$

Spektrální větu tak můžeme formulovat také následovně.

Důsledek 9.76. *Operátor $f_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ určený hermitovskou maticí A lze vyjádřit jako lineární kombinaci projekcí do vzájemně kolmých směrů s reálnými koeficienty.*

Příklad 9.77. Jako ilustraci spektrální věty pro reálné symetrické matice najdeme pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ortogonální matici Q takovou, že $Q^T A Q$ je reálná diagonální matice. Matice A má charakteristický polynom $p(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1)$ a tedy vlastní čísla $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ a $\lambda_3 = -1$. Najdeme ortonormální bázi v podprostoru vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 1, např.

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

K ní přidáme normalizovaný vlastní vektor \mathbf{u}_3 příslušný vlastnímu číslu $\lambda_3 = -1$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a dostaneme matici

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak platí $A = Q \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) Q^T = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \lambda_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_3^T$, neboli

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pro operátor f_A určený maticí A pak platí

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \\ &+ \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Schurova věta dokonce umožňuje charakterizovat komplexní matice A řádu n , pro které existuje ortonormální báze prostoru \mathbb{C}^n složená z vlastních vektorů matice A . Neboli, pro které existuje unitární matice U taková, že U^*AU je diagonální matice $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Pokud taková unitární matice U existuje, platí

$$\begin{aligned} AA^* &= UDU^*(UDU^*)^* = UDU^*UD^*U^* = UDD^*U^* = UD^*DU^* \\ &= UD^*U^*UDU^* = (UDU^*)^*UDU^* = A^*A . \end{aligned}$$

Definice 9.78. Matice A se nazývá *normální* pokud platí $AA^* = A^*A$.

Lemma 9.79. *Horní trojúhelníková matice T řádu n , která je normální, musí být diagonální.*

Důkaz. Platí to určitě pro (jakoukoliv) matici řádu 1. Označíme $T = (t_{ij})$. Potom $T^* = (u_{ij})$, kde $u_{ij} = \overline{t_{ji}}$. Z předpokladu, že T je normální, plyne $TT^* = T^*T$. Protože T je horní trojúhelníková, plyne odtud $t_{ij} = 0$ kdykoliv $i > j$.

Nechť tedy $n > 1$. Indukční předpoklad je, že každá normální horní trojúhelníková matice řádu $n - 1$ je diagonální.

Porovnáme prvky v levém horním rohu obou matic TT^* a T^*T . V matici TT^* se tento prvek rovná

$$t_{11}\overline{t_{11}} + t_{12}\overline{t_{12}} + \dots + t_{1n}\overline{t_{1n}} = |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + \dots + |t_{1n}|^2 .$$

V matici T^*T se prvek v levém horním rohu rovná $\overline{t_{11}}t_{11} = |t_{11}|^2$. Z porovnání obou prvků plyne

$$|t_{12}|^2 + \dots + |t_{1n}|^2 = 0$$

a tedy $t_{12} = t_{13} = \dots = t_{1n} = 0$. Pro matici T tedy platí

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U \end{pmatrix} ,$$

kde U je horní trojúhelníková matice řádu $n - 1$. Platí

$$T^* = \begin{pmatrix} \overline{t_{11}} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U^* \end{pmatrix}$$

a

$$TT^* = \begin{pmatrix} |t_{11}|^2 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & UU^* \end{pmatrix} , \quad T^*T = \begin{pmatrix} |t_{11}|^2 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U^*U \end{pmatrix} .$$

Z rovnosti $TT^* = T^*T$ plyne $UU^* = U^*U$ a matice U je tedy normální. Z indukčního předpokladu plyne, že je diagonální, což dokazuje i diagonalitu matice T . \square

Mezi normální matice patří symetrické a hermitovské matice, ortogonální a unitární matice, kosymetrické matice (tj. matice, pro které platí $A^T = -A$) a kosohermitovské (pro které platí $A^* = -A$).

Věta 9.80. *Pro komplexní matici A řádu n existuje ortonormální báze v \mathbb{C}^n složená z vlastních vektorů matice A právě když je matice A normální.*

Důkaz. Zbývá dokázat, že pro každou normální matici A řádu n existuje ortonormální báze v \mathbb{C}^n složená z vlastních vektorů matice A . Podle Schurovy věty existuje unitární matice U , pro kterou platí $U^*AU = T$, kde T je nějaká horní trojúhelníková matice. Pro matici T platí

$$\begin{aligned} TT^* &= U^*AU(U^*AU)^* = U^*AUU^*A^*U = U^*AA^*U \\ &= U^*A^*AU = U^*A^*UU^*AU = T^*T . \end{aligned}$$

Horní trojúhelníková matice T je proto normální. Z předcházejícího příkladu plyne, že matice T je diagonální. Z rovnosti $U^*AU = T$ pak plyne $AU = UT$, sloupce matice U jsou tedy vlastní vektory matice A . Protože matice U je unitární, tvoří sloupcové vektory matice U ortonormální bázi prostoru \mathbb{C}^n složenou z vlastních vektorů matice A . \square

Věta 9.81. *Komplexní matice A je hermitovská právě když je normální a všechna vlastní čísla matice A jsou reálná.*

Komplexní matice A je unitární právě když je normální a pro každé vlastní číslo λ matice A platí $|\lambda| = 1$ (tj. leží na jednotkové kružnici).

Důkaz. Spektrální věta pro hermitovské matice říká, že všechna vlastní čísla hermitovské matice A jsou reálná a $AA^* = A^2 = A^*A$, tj. A je normální. Je-li naopak A normální matice s reálnými vlastními čísly, existují unitární matice U a reálná diagonální matice $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, pro které platí $U^*AU = D$. Protože $D^* = D$ pro reálnou diagonální matici, platí rovněž $A^* = A$.

Je-li A unitární matice a λ vlastní číslo A , platí pro nenulový vlastní vektor \mathbf{x} matice U příslušný vlastnímu číslu λ , že $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ (z unitárnosti) a

$$\|A\mathbf{x}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\| .$$

Proto $|\lambda| = 1$. Protože $A^*A = I_n = A^*A$, je U normální.

Je-li naopak A normální, existuje ortonormální báze $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ v \mathbb{C}^n složená z vlastních vektorů matice A . Pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $\|A\mathbf{u}_i\| = \|\lambda_i\mathbf{u}_i\| = |\lambda_i|\|\mathbf{u}_i\| = \|\mathbf{u}_i\|$, protože $|\lambda_i| = 1$ pro každé vlastní číslo λ_i . Libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vyjádříme jako lineární kombinaci $\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_n\mathbf{u}_n$. S použitím Pythagorovy věty pak dostaneme

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{x}\|^2 &= \|A(a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_n\mathbf{u}_n)\|^2 \\ &= \|\lambda_1 a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_n a_n \mathbf{u}_n\|^2 \\ &= \|\lambda_1 a_1 \mathbf{u}_1\|^2 + \dots + \|\lambda_n a_n \mathbf{u}_n\|^2 \\ &= |\lambda_1|^2 \|a_1 \mathbf{u}_1\|^2 + \dots + |\lambda_n|^2 \|a_n \mathbf{u}_n\|^2 \\ &= \|a_1 \mathbf{u}_1\|^2 + \dots + \|a_n \mathbf{u}_n\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 . \end{aligned}$$

Ze základní věty o unitárních maticích plyne, že A je unitární (f_A zachovává normy vektorů). \square

Příklad 9.82. Podíváme se na rotace v reálném prostoru \mathbb{R}^2 pohledem vlastních čísel. Víme, že rotace kolem počátku o úhel ϕ v kladném směru má vzhledem ke kanonické bázi matici

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} .$$

Charakteristický polynom této matice se rovná $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda \cos \phi + 1$. Jeho kořeny - vlastní čísla matice A - jsou $\cos \phi + i \sin \phi$ a $\cos \phi - i \sin \phi$. Použijeme-li Eulerovu formuli, můžeme je napsat jako $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ a $e^{-i\phi} = \cos \phi - i \sin \phi$. Vlastní čísla jsou reálná právě když ϕ je násobek π . V případě $\phi = 0$, jsou obě vlastní čísla rovná 1 a zobrazení f_A je identické. V případě $\phi = \pi$ jsou obě vlastní čísla rovná -1 a zobrazení f_A je středová symetrie, neboli stejnolehlost s koeficientem -1 . Ve všech ostatních případech jsou vlastní čísla komplexní a vlastní vektory tak budou mít komplexní souřadnice.

Vlastní vektory matice rotace příslušné vlastnímu číslu $\cos \phi + i \sin \phi$ spočítáme jako jádro matice

$$A - (\cos \phi + i \sin \phi)I_2 = \begin{pmatrix} -i \sin \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & -i \sin \phi \end{pmatrix},$$

kteří je generováno např. vektorem $(1, -i)^T$. Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\cos \phi - i \sin \phi$ je například $(1, i)^T$. Oba vektory jsou kolmé vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v \mathbb{C}^n . Vydělíme je jejich normou a dostaneme ortonormální bázi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, kde

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k bázi B má rotace f_A matici

$$[f_A]_B = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že $\frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = (1, 0)^T$ a $\frac{i}{2}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = (0, 1)^T$ jsou vektory kanonické báze v \mathbb{R}^2 i v \mathbb{C}^2 .

Příklad 9.83. Jak vypadají obecná ortogonální zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$? Označme si A matici f vzhledem ke kanonické bázi. Je to reálná matice. Podle charakterizace unitárních zobrazení pro všechna vlastní čísla matice A platí $|\lambda| = 1$. Protože má charakteristický polynom matice A (tj. operátoru f) reálné koeficienty, jsou obě vlastní čísla buď reálná nebo je tvoří dvojice komplexně sdružených čísel $\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi}$ a $\cos \phi - i \sin \phi = e^{-i\phi}$. Dále podle téže charakterizace unitárních matic existuje ortonormální báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ prostoru \mathbb{C}^2 složená z vlastních vektorů matice A .

Nejdříve probereme případ, kdy vlastní čísla matice A , tj. operátoru f , jsou reálná. Pak můžeme zvolit oba vlastní vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ reálné. Zde máme tři možnosti.

- Obě vlastní čísla se rovnají 1. Matice $[f]_B^B$ se pak rovná I_2 a operátor f se rovná identickému zobrazení.
- Obě vlastní čísla se rovnají -1 . Matice $[f]_B^B$ se pak rovná $-I_2$ a operátor f se rovná středové symetrii - stejnolehlosti s koeficientem -1 .
- Jedno vlastní číslo se rovná 1 a druhé -1 . Matice $[f]_B^B$ se pak rovná

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zobrazení f je reflexe (zrcadlení) vzhledem k přímce generované vektorem \mathbf{u}_1 .

Zbývá případ komplexních vlastních čísel, která nejsou reálná. Čísla $\lambda = \cos \phi + i \sin \phi$ a $\bar{\lambda} = \cos \phi - i \sin \phi$ jsou komplexně sdružená. Označme si $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda = \cos \phi + i \sin \phi$. Z rovnosti $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ přechodem ke komplexně sdruženým číslům dostaneme

$$\overline{A\mathbf{u}} = \overline{\lambda\mathbf{u}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{u}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{u}},$$

kde $\bar{\mathbf{u}}$ je vektor, který dostaneme z \mathbf{u} nahrazením každé složky komplexně sdruženým číslem, a \bar{A} dostaneme z A nahrazením každého prvku komplexně sdruženým číslem. Matice A je ale reálná, proto $\bar{A} = A$ a tedy $A\bar{\mathbf{u}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{u}}$. Vektor $\bar{\mathbf{u}}$ je tak (nenulový) vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\bar{\lambda} = e^{-i\phi}$. Protože geometrická i

algebraická násobnost $e^{-i\phi}$ je rovna 1, je vektor $\bar{\mathbf{u}}$ skalárním násobkem \mathbf{u}_2 , je tedy kolmý na vektor $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$, protože \mathbf{u}_2 je kolmý na \mathbf{u} .

Označíme

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix}$$

a

$$\operatorname{Re} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

jsou reálná a imaginární část vektoru \mathbf{u} . Z ortogonalit vektorů \mathbf{u} a $\bar{\mathbf{u}}$ plyne

$$\mathbf{u}^* \bar{\mathbf{u}} = (a - ib | c - id) \begin{pmatrix} a - ib \\ c - id \end{pmatrix} = a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - 2i(ab + cd) = 0 .$$

Proto $ab + cd = 0$ a reálné vektory $\operatorname{Re} \mathbf{u}$ a $\operatorname{Im} \mathbf{u}$ jsou kolmé. Dále mají oba stejnou normu $\sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{b^2 + d^2}$ a jsou proto oba nenulové. Protože jsou kolmé, jsou navíc lineárně nezávislé. Označíme-li

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}} \operatorname{Re} \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_2 = -\frac{1}{\sqrt{b^2 + d^2}} \operatorname{Im} \mathbf{u},$$

dostaneme ortonormální bázi $C = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ prostoru \mathbb{R}^2 (a také \mathbb{C}^2 , pokud násobíme i komplexními skaláry). Spočítáme matici $[f]_C^C$. Platí

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}} f(\operatorname{Re} \mathbf{u}) = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + c^2}} f(\mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a^2 + c^2}} (\lambda \mathbf{u} + \bar{\lambda} \bar{\mathbf{u}}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a^2 + c^2}} ((\cos \phi + i \sin \phi)(\operatorname{Re} \mathbf{u} + i \operatorname{Im} \mathbf{u}) + (\cos \phi - i \sin \phi)(\operatorname{Re} \mathbf{u} - i \operatorname{Im} \mathbf{u})) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a^2 + c^2}} (2 \cos \phi \operatorname{Re} \mathbf{u} - 2 \sin \phi \operatorname{Im} \mathbf{u}) \\ &= \cos \phi \mathbf{v}_1 + \sin \phi \mathbf{v}_2 . \end{aligned}$$

Podobně spočítáme, že $f(\mathbf{v}_2) = -\sin \phi \mathbf{v}_1 + \cos \phi \mathbf{v}_2$. Vidíme tak, že matice $[f]_C^C$ se rovná

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

a zobrazení f je tedy rotace.

Pokud vezmeme do úvahy, že středová symetrie je rotace o úhel π a identické zobrazení je rotace o úhel 0, dokázali jsme následující *klasifikaci ortogonálních zobrazení* v euklidovském prostoru dimenze 2.

Tvrzení 9.84. *Každé ortogonální zobrazení f v prostoru \mathbb{R}^2 se standardním skalárním součinem je buď rotace nebo reflexe. Rotace je to právě když $\det[f]_B^B = 1$ a reflexe je to právě když $\det[f]_B^B = -1$, kde B je libovolná báze \mathbb{R}^2 .*

Protože složení dvou ortogonálních zobrazení je opět ortogonální zobrazení, dostáváme s použitím věty o součinu determinantů tento důsledek.

Důsledek 9.85. *Složení dvou rotací v \mathbb{R}^2 je opět rotace, složení dvou reflexí je rotace a složení rotace s reflexí (v libovolném pořadí) je opět nějaká reflexe.*

Pomocí klasifikace ortogonálních zobrazení ve dvoudimenzionálním prostoru můžeme také klasifikovat ortogonální zobrazení v euklidovském prostoru dimenze 3.

Příklad 9.86. Necht $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je ortogonální lineární zobrazení a $A = [f]_K^K$ jeho matice vzhledem ke kanonické bázi v \mathbb{R}^3 . Charakteristický polynom má všechna vlastní čísla rovná v absolutní hodnotě 1 a existuje báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ prostoru \mathbb{C}^3 složená z vlastních vektorů matice A . Protože má navíc reálné koeficienty, jsou buď všechna vlastní čísla reálná (rovná ± 1) a nebo je jedno reálné a zbylá dvě jsou komplexně sdružená čísla $e^{i\phi}$ a $e^{-i\phi}$ pro nějaký úhel ϕ .

Předpokládejme, že pouze jedno vlastní číslo je reálné. K němu příslušný vlastní vektor \mathbf{u}_1 můžeme proto také zvolit reálný. Podprostor $\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$ prostoru \mathbb{C}^3 (ortogonální doplněk vektoru \mathbf{u}_1) je invariantní podprostor operátoru f . Na tomto podprostoru dimenze 2 je zúžení f také ortogonální operátor a má komplexní vlastní čísla $e^{i\phi}$ a $e^{-i\phi}$. Podle předchozího příkladu je matice zúžení operátoru f na podprostor $\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$ vzhledem k ortonormální bázi $(a \operatorname{Re} \mathbf{u}_2, -a \operatorname{Im} \mathbf{u}_2)$ tohoto podprostoru, kde $a = \|\operatorname{Re} \mathbf{u}_2\|^{-1}$, rovná

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Je-li reálné vlastní číslo rovné 1, má potom f vzhledem k bázi $C = (\mathbf{u}_1, a \operatorname{Re} \mathbf{u}_2, -a \operatorname{Im} \mathbf{u}_2)$ prostoru \mathbb{R}^3 (báze C je ortonormální) matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

a jde tedy o rotaci kolem osy generované vektorem \mathbf{u}_1 o úhel ϕ proti směru hodinových ručiček při pohledu z kladného směru vektoru \mathbf{u}_1 .

Je-li jediné reálné vlastní číslo operátoru f rovné -1 , platí

$$[f]_C^C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a zobrazení f je tedy složením rotace kolem osy generované \mathbf{u}_1 o úhel ϕ spolu s reflexí (zrcadlením) určeném rovinou kolmou na vektor \mathbf{u}_1 .

Jsou-li všechna vlastní čísla operátoru f reálná, můžeme zvolit ortonormální bázi \mathbb{C}^3 složenou z reálných vektorů a matice $[f]_B^B$ má (až na pořadí prvků na hlavní diagonále) jeden z tvarů

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

V prvním případě jde o identické zobrazení (tj. rotaci o úhel 0), ve druhém případě jde o zrcadlení vzhledem k rovině $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \{\mathbf{u}_3\}^\perp$, ve třetím případě jde o rotaci kolem osy generované \mathbf{u}_1 o úhel π a ve čtvrtém případě jde o složení této rotace s reflexí (zrcadlením) určenou rovinou $\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$.

Platí proto následující tvrzení.

Tvrzení 9.87. Každé ortogonální zobrazení v euklidovském prostoru \mathbb{R}^3 je buď rotace kolem nějaké osy, ortogonální reflexe vzhledem k nějaké rovině a nebo složení rotace s ortogonální reflexí. Rotace je to právě tehdy, když determinant matice tohoto zobrazení vzhledem k jakékoliv bázi je rovný 1.

Důsledek 9.88. Složení dvou rotací v \mathbb{R}^3 je zase rotace v \mathbb{R}^3 , složení dvou různých pravoúhlých zrcadlení je rotace kolem osy, která se rovná průniku rovin zrcadlení.

10. BILINEÁRNÍ FORMY

Cíl. *Bilineární formu lze chápat jako zobecnění skalárního součinu. Ponecháme pouze vlastnosti linearity v každé složce a vzdáme se symetrie a pozitivní definitnosti, a navíc nepředpokládáme, že tělesem jsou reálná nebo komplexní čísla. Taková zobecnění skalárního součinu se používají například ve fyzice, konkrétně ve speciální teorii relativity. Naší hlavní motivací pro studium bilineárních forem je porozumění kvadratickým formám, které určují „kvadratické útvary“. Ukážeme, že kvadratické formy vzájemně jednoznačně odpovídají symetrickým bilineárním formám. Hlavní náplní bude nalezení báze, vzhledem ke které má symetrická bilineární forma, a tím i příslušná kvadratická forma, jednoduchý tvar. To nám umožní analyzovat tvar kvadratických útvarů.*

Připomeňme, že lineární forma na vektorovém prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} je lineární zobrazení z \mathbf{V} do \mathbf{T} , tj. zobrazení $f : V \rightarrow T$, které vektoru přiřazuje prvek tělesa, splňující $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ a $f(t\mathbf{u}) = t(f(\mathbf{u}))$ pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, t \in T$. Lineární forma na konečně generovaném prostoru je jako každé lineární zobrazení popsána maticí vzhledem k zvoleným bázím. V jednodimenzionálním prostoru \mathbf{T} vždy volíme kanonickou bázi (1). Matice má 1 řádek. Je-li báze zvolená v prostoru \mathbf{V} označena B , pak této matici (řádkovému vektoru) také říkáme *souřadnice* lineární formy f vzhledem k bázi B . Například, je-li $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ báze \mathbf{V} , pak souřadnice f vzhledem k B jsou

$$[f]_{K_1}^B = (f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)) = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Je-li \mathbf{v} vektor z \mathbf{V} a $[\mathbf{v}]_B = (x_1, \dots, x_n)$ jeho souřadnice vzhledem k B , pak

$$f(\mathbf{v}) = [f]_{K_1}^B [\mathbf{v}]_B = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

Lineární forma je až na násobek určená svým jádrem: Jádrem nulové formy je celý prostor, jádrem každé nenulové formy je nadrovina. Celá forma je pak určena svým jádrem a obrazem nějakého vektoru mimo jádro. Například v \mathbb{R}^2 jsou lineární formy zobrazení tvaru $f((x_1, x_2)^T) = a_1 x_1 + a_2 x_2$ (kde (a_1, a_2) jsou souřadnice vzhledem ke kanonické bázi). Jádrem je pro nenulovou formu přímka. V \mathbb{R}^3 jsou lineární formy tvaru $f((x_1, x_2, x_3)^T) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$ a jádrem nenulové formy je rovina. Příkladem formy je pak zobrazení, které udává orientovanou vzdálenost od jádra nebo nějaký jeho pevný násobek (a každá forma na \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 je tohoto tvaru).

Lineární forma \mathbb{R}^n je tedy lineární funkce bez konstantního členu. Vyskytující se například při aproximaci funkcí. Pro diferencovatelnou funkci $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na obrázku je nejlepší lineární aproximací h v bodě $(2, 1)$ (odpovídající tečné rovině) funkce $z = 2x + 3y + 5$. Nekonstantní část $f(x, y) = 2x + 3y$ této funkce je lineární forma, tzv. totální diferenciál funkce h v bodě $(1, 2)$, koeficienty jsou derivace ve směru souřadnicových os.

OBRAZEK

Bilineární forma je zobrazení, které každé dvojici vektorů přiřadí prvek tělesa, které je lineární v obou složkách.

Definice 10.1. Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor nad tělesem \mathbf{T} . *Bilineární forma* na prostoru \mathbf{V} je zobrazení $f : V \times V \rightarrow T$, které je lineární v obou složkách, tj. pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, t \in T$ platí

- (1) $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, $f(\mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + f(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ a
 (2) $f(t\mathbf{v}, \mathbf{w}) = t f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, $f(\mathbf{v}, t\mathbf{w}) = t f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Bilineární formou na \mathbb{R}^3 je například zobrazení

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T) &= 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 5x_1y_3 + 6x_2y_1 + x_2y_3 + 10x_3y_2 \\ &= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Uvidíme, že každá bilineární forma je podobného tvaru.

Příkladem bilineární formy je libovolný skalární součin na reálném vektorovém prostoru, ten je navíc symetrický a pozitivně definitní. Bilineární formy tedy můžeme chápat jako zobecnění skalárního součinu. **Pozor!** Skalární součin na komplexním vektorovém prostoru bilineární forma není — vlastnost $f(t\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ bychom museli nahradit vlastností $f(t\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \bar{t}f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Takovým formám se říká *seskvilineární* a nebudeme se jimi podrobněji zabývat.

Axiomy (1) a (2) byly také základními vlastnostmi použité při odvození vzorce pro determinant matic 2×2 . Můžeme říct, že determinant čtvercových matic řádu 2 je bilineární forma sloupců matice. Pro matice vyšších řádů je determinant příkladem tzv. *multilineární* formy, tedy zobrazení $V \times V \times \dots \times V \rightarrow T$ lineární v každé složce.

My využijeme bilineární formy hlavně při studiu kvadratických forem.

Definice 10.2. Je-li f bilineární forma na vektorovém prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} , pak zobrazení $f_2 : V \rightarrow T$ definované předpisem

$$f_2(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \quad \text{pro každé } \mathbf{v} \in V$$

nazýváme *kvadratickou formou* vytvořenou bilineární formou f .

Rovněž říkáme, že f_2 je kvadratická forma příslušná bilineární formě f . Pro bilineární formu na \mathbb{R}^3 výše je

$$\begin{aligned} f_2((x_1, x_2, x_3)^T) &= 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 5x_1x_3 + 6x_2x_1 + x_2x_3 + 10x_3x_2 \\ &= 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_1x_3 + 11x_2y_3 \end{aligned}$$

Kvadratická forma na aritmetickém prostoru je kvadratický polynom, jehož všechny členy mají stupeň právě 2. Kvadratické formy umožňují přesněji aproximaci funkce. Nejlepší aproximace funkce výše uvedené funkce h v bodě $(1, 2)^T$ kvadratickou funkcí je funkce $z = 4x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x + 3y + 5$, její kvadratická část $h((x, y)^T) = 4x^2 - 2xy + 3y^2$ je kvadratická forma.

OBRAZEK

Tato kvadratická forma určuje, zda je funkce v daném bodě konvexní, konkávní, nebo má sedlový bod.

OBAZEK

Základní problém je pro nás stejný jako u lineárních operátorů: najít bázi, vzhledem ke které je bilineární forma přehledná.

10.1. Matice.

Podobně jako v úvodu do determinantů spočítáme, že každá bilineární forma je určena obrazy dvojic prvků libovolné báze. To nám dává maticovou reprezentaci bilineárních forem a tzv. analytické vyjádření. Necht f je bilineární forma na \mathbf{V} a $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ je báze prostoru \mathbf{V} . Vezmeme dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ a

vyjádříme $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ pomocí souřadnic vektorů \mathbf{x}, \mathbf{y} v bázi B a pomocí hodnot $a_{ij} = f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}]_B &= (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad [\mathbf{y}]_B = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T . \\ f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f(x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n, y_1\mathbf{v}_1 + \dots + y_n\mathbf{v}_n) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i\mathbf{v}_i, \sum_{i=1}^n y_i\mathbf{v}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i f\left(\mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n y_j\mathbf{v}_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j a_{ij} \\ &= (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

To vede k pojmu matice bilineární formy vzhledem k bázi.

Definice 10.3. Necht $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je báze vektorového prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} a f je bilineární forma na \mathbf{V} . *Maticí bilineární formy f vzhledem k B* rozumíme čtvercovou matici řádu n nad \mathbf{T} , která má na pozici (i, j) prvek $f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$. Tuto matici značíme $[f]_B$.

Tvrzení 10.4. Je-li B báze konečně generovaného prostoru \mathbf{V} a $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, pak

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_B^T [f]_B [\mathbf{y}]_B .$$

Jsou-li souřadnice vektorů $[\mathbf{x}]_B = (x_1, \dots, x_n)^T$, $[\mathbf{y}]_B = (y_1, \dots, y_n)^T$ a $[f]_B = (a_{ij})_{n \times n}$, pak

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j .$$

Tomuto vyjádření také říkáme *analytické vyjádření bilineární formy f* .

Všimněte si, že naopak pro libovolnou čtvercovou matici A řádu n nad \mathbf{T} je zobrazení

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_B^T A [\mathbf{y}]_B$$

bilineární a prvek na pozici (i, j) je nutně $f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ (viz cvičení). Při pevně zvolené bázi B tedy takto bilineární formy na \mathbf{V} vzájemně jednoznačně odpovídají čtvercovým maticím nad \mathbf{T} řádu n .

Příklad 10.5. Zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem

$$f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = 2x_1y_1 + 4x_2y_1 = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

je bilineární forma na \mathbb{R}^2 . Jeho matice vzhledem ke kanonické bázi je

$$[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} .$$

Vezmeme jinou bázi \mathbb{R}^2 , například

$$B = \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right) \right) .$$

Matice f vzhledem k B je podle definice

$$[f]_B = \begin{pmatrix} f((1, -1)^T, (1, -1)^T) & f((1, -1)^T, (2, 0)^T) \\ f((2, 0)^T, (1, -1)^T) & f((2, 0)^T, (2, 0)^T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} ,$$

kde například prvek na místě $(1, 2)$ spočteme

$$f((1, -1)^T, (2, 0)^T) = (1, -1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, -1) \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = -4 .$$

Matice bilineární formy f vzhledem k B nám umožňuje rychle spočítat $f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T)$ známe-li vyjádření vektorů vzhledem k bázi B :

$$\begin{aligned} [(x_1, x_2)^T]_B &= (x'_1, x'_2)^T, & [(y_1, y_2)^T]_B &= (y'_1, y'_2)^T, \\ f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) &= (x'_1 \ x'_2) \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} \\ &= -2x'_1y'_1 - 4x'_1y'_2 + 4x'_2y'_1 + 8x'_2y'_2 . \end{aligned}$$

Matici $[f]_B$ spočítáme ještě jedním způsobem, který nám zároveň ukáže, jak se obecně mění matice bilineární formy při přechodu od báze k bázi. Označme X matici přechodu od B ke kanonické bázi K_2 .

$$X = [\text{id}]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro libovolný vektor $\mathbf{z} \in V$ platí $[\mathbf{z}]_{K_2} = X[\mathbf{z}]_B$ a transponováním získáme $[\mathbf{z}]_{K_2}^T = [\mathbf{z}]_B^T X^T$. Pak

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x'_1, x'_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} \\ &= (x'_1, x'_2) \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Z jednoznačnosti maticového vyjádření f nyní plyne, že matice f vzhledem k B je stejná jako u předchozího výpočtu.

Zobecněním výpočtu v předchozím příkladu dostáváme vztah o změně matice při přechodu od báze k bázi.

Tvrzení 10.6. *Nechť f je bilineární forma na vektorovém prostoru \mathbf{V} , B a C jsou báze \mathbf{V} a $X = [\text{id}]_B^C$ je matice přechodu od C k B . Pak $[f]_C = X^T[f]_B X$.*

Důkaz. Pro libovolné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_B^T [f]_B [\mathbf{y}]_B = ([\text{id}]_B^C [\mathbf{x}]_C)^T [f]_B ([\text{id}]_B^C [\mathbf{y}]_C) = [\mathbf{x}]_C^T X^T [f]_B X [\mathbf{y}]_C .$$

Z jednoznačnosti matice bilineární formy vzhledem k bázi nyní plyne $[f]_C = X^T [f]_B X$. \square

Čtvercová matice A řádu n má teď pro nás dva geometrické významy: lineární operátor f_A na \mathbf{T}^n a bilineární forma $\mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ na \mathbf{T}^n . Všimněte si rozdílu při změně báze. Je-li R matice přechodu od B ke kanonické bázi, pak matice příslušného lineárního operátoru vzhledem k B je $R^{-1} A R$ zatímco matice příslušné bilineární formy vzhledem k B je $R^T A R$.

10.2. Symetrické a antisymetrické formy. Kvadratická forma může být vytvořena různými bilineárními formami, například bilineární formy

$$f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + x_2y_1, \quad g((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = 2x_1y_1 + 4x_2y_1$$

vytváří stejnou kvadratickou formu

$$f_2((x_1, x_2)^T) = g_2((x_1, x_2)^T) = 2x_1^2 + 4x_1x_2$$

V této části si, v případě těles charakteristiky různé od dva, jednoznačně rozložíme každou bilineární formu na součet symetrické a antisymetrické, a ukážeme, že vytvořená kvadratická forma je určena symetrickou částí.

Definice 10.7. Bilineární forma f na vektorovém prostoru \mathbf{V} se nazývá

- *symetrická*, pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;
- *antisymetrická*, pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Příkladem symetrické formy je skalární součin na reálném vektorovém prostoru.

Zda je forma symetrická (antisymetrická) poznáme snadno z matice vzhledem k libovolné bázi.

Tvrzení 10.8. *Nechť \mathbf{V} je konečně generovaný vektorový prostor, B je báze \mathbf{V} a f je bilineární forma na \mathbf{V} . Pak*

- *f je symetrická právě tehdy, když je $[f]_B$ symetrická matice;*
- *f je antisymetrická právě tehdy, když je $[f]_B$ antisymetrická matice.*

Důkaz. Dokážeme první ekvivalenci, druhá se dokáže podobně. Označme $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Prvek na místě (i, j) v matici $[f]_B$ je podle definice roven $f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$. Je-li tedy f symetrický pak prvek na místě (i, j) je stejný jako prvek na místě (j, i) , takže $[f]_B$ je symetrický matice.

Je-li naopak $[f]_B$ symetrická matice, pak pro libovolné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_B^T [f]_B [\mathbf{y}]_B = [\mathbf{x}]_B^T [f]_B^T [\mathbf{y}]_B = ([\mathbf{x}]_B^T [f]_B^T [\mathbf{y}]_B)^T = [\mathbf{y}]_B^T [f]_B [\mathbf{x}]_B = f(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

kde ve třetí rovnosti jsme využili, že $(t)^T = t$ pro libovolný skalár $t \in T$. \square

Bilineární formy můžeme přirozeným způsobem sčítat a násobit skalárem. Jsou-li f, g dvě bilineární formy na \mathbf{V} a $t \in T$ pak definujeme

$$(f + g)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + g(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (tf)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = tf(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

S těmito operacemi tvoří množina všech bilineárních forem na \mathbf{V} vektorový prostor. Je-li B konečná báze \mathbf{V} , snadno se ověří vztahy

$$[f + g]_B = [f]_B + [g]_B, \quad [tf]_B = t[f]_B.$$

Zamysleme se nyní, jak rozložit danou bilineární formu f na prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} na součet symetrické formy f_s a antisymetrické formy f_a . Pro konečně generované prostory je tento úkol ekvivalentní rozkladu čtvercové matice na součet symetrické a antisymetrické. Pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ chceme, aby platilo

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f_a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = f_s(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f_a(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f_a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Dostali jsme pro $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ a $f_a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ soustavu dvou rovnic s řešením

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x})), \quad f_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{x})).$$

Je snadné nahlédnout, že bilineární forma f_s definovaná tímto předpisem je symetrická a f_a je antisymetrická. Problém je pouze v případě, kdy soustava má singulární matici, tj. v případě, že $1 = -1$, ekvivalentně, charakteristika tělesa \mathbf{T} je 2. V opačném případě z postupu vyplývá, že f_s, f_a jsou určeny jednoznačně. Dokázali jsme

Tvrzení 10.9. *Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor nad tělesem \mathbf{T} charakteristiky různé od 2. Pak každou bilineární formu f na \mathbf{V} lze psát jako součet $f = f_s + f_a$, kde f_s je symetrická a f_a je antisymetrická. Tento rozklad je jednoznačný a platí*

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x})), \quad f_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{x})) .$$

Důkaz.

□

Množina symetrických bilineárních forem na \mathbf{V} i množina antisymetrických bilineárních forem na \mathbf{V} tvoří podprostory prostoru všech bilineárních forem na \mathbf{V} (cvičení). Tvrzení lze formulovat také tak, že vektorový prostor všech bilineárních forem na \mathbf{V} je direktním součtem těchto dvou podprostorů.

Příklad 10.10. Bilineární forma f na \mathbb{R}^2

$$f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = 2x_1y_1 + 4x_2y_1 + 2x_1y_2 = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

je součtem

$$f_s((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 + 3x_1y_2 = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$f_a((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = x_1y_2 - x_2y_1 = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

To odpovídá maticovému vztahu

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro tělesa charakteristiky dva, například $\mathbf{T} = \mathbb{Z}_2$, je teorie bilineárních forem odlišná, ale tímto případem se nebudeme zvlášť zabývat. Poznamenejme jen, že pojmy symetrická a antisymetrická v tomto případě splývají (cvičení).

Bilineární formy využíváme mimo jiné ke studiu příslušných kvadratických forem. Tato kvadratická forma závisí pouze na symetrické části bilineární formy:

Tvrzení 10.11. *Nechť f, g jsou bilineární formy na vektorovém prostoru \mathbf{V} nad tělesem charakteristiky různé od 2. Pak $f_2 = g_2$ právě tehdy, když $f_s = g_s$. Navíc*

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f_2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f_2(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{y})) .$$

Důkaz. Je-li g antisymetrická forma, pak pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in V$ platí $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Pokud je charakteristika tělesa různá od dva, vyplývá z tohoto vztahu $g_2(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$. Pro libovolnou bilineární formu f pak máme

$$f_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f_a(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) .$$

Vytvořená kvadratická forma tedy závisí jen na symetrické části. Odtud plyne implikace zprava doleva.

Vzorec z tvrzení ověříme přímočarým výpočtem.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f_2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f_2(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{y})) &= \frac{1}{2}(f_s(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) - f_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f_s(\mathbf{y}, \mathbf{y})) \\ &= \frac{1}{2}(f_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f_s(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f_s(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - f_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f_s(\mathbf{y}, \mathbf{y})) \\ &= \frac{1}{2}(2f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Implikace zleva doprava je nyní zřejmá. \square

Vztah v předchozí větě je varianta polarizační identity z tvrzení 8.7. Dává explicitní vzorec na výpočet hodnoty symetrické bilineární formy pomocí příslušné formy kvadratické. Tuto jednoznačně určenou symetrickou bilineární formu také nazýváme *symetrická forma příslušná dané kvadratické formě*.

Příklad 10.12. Uvažujme kvadratickou formu

$$f_2((x_1, x_2)^T) = 2x_1^2 + 7x_1x_2 + 5x_2^2$$

Pro nalezení symetrické formy f není třeba používat vzorec z předchozího tvrzení, stačí si uvědomit z jakých členů bilineární formy pochází členy f_2 . Je-li

$$f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$$

a $f_2((x_1, x_2)^T) = f((x_1, x_2)^T, (x_1, x_2)^T)$, pak koeficient u x_1^2 v kvadratické formě f_2 musí pocházet ze členu $a_{11}x_1y_1$, tedy $a_{11} = 2$. Podobně $a_{22} = 5$. Koeficient u x_1x_2 vznikne součtem $a_{12} + a_{21}$ a kvůli symetrii je $a_{12} = a_{21} = 7/2$. Takže je

$$f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = 2x_1^2 + 3,5x_1y_2 + 3,5x_2y_1 + 5x_2^2 = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 3,5 \\ 3,5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

10.3. Ortogonální báze.

V celém zbytku kapitoly se budeme věnovat pouze symetrickým formám nad tělesy charakteristiky různé od 2. Budeme se snažit najít bázi vzhledem k níž má daná bilineární forma co nejjednodušší matici, ideálně diagonální. Narozdíl od lineárních operátorů to vždy lze provést. Symetrické bilineární formy vzájemně jednoznačně odpovídají kvadratickým. Všechny pojmy a výsledky pro symetrické bilineární pojmy budeme proto používat i pro příslušné kvadratické formy.

Co pro bilineární formu f znamená, že matice vzhledem k bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ je diagonální? Podle definice musí pro dva různé vektory $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$, $i \neq j$ platit $f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$. To motivuje pojem ortogonalit vektorů.

Definice 10.13. Nechť f je symetrická bilineární forma na \mathbf{V} a $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Říkáme, že \mathbf{x} a \mathbf{y} jsou *f-ortogonální*, pokud $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Zapisujeme $\mathbf{x} \perp_f \mathbf{y}$.

Báze $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{V} se nazývá *f-ortogonální*, pokud je $[f]_B$ diagonální, tj. pro libovolné $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$, jsou vektory $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ *f-ortogonální*. (Pokud je f zřejmé z kontextu, říkáme někdy pouze ortogonální.)

V případě, že f je skalární součin na reálném vektorovém prostoru, se pojmy shodují s již zavedenými. Na hledání ortogonální báze můžeme použít například Gram-Schmidtův ortogonalizační proces.

Má-li f vzhledem k B diagonální matici $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, pak pro příslušnou kvadratickou formu platí

$$f_2(\mathbf{x}) = a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2, \quad [\mathbf{x}]_B = (x_1, \dots, x_n)$$

Z takového vyjádření lépe vidíme, jak daná kvadratická forma vypadá. Na obrázku jsou znázorněny grafy několika kvadratických forem na \mathbb{R}^2 .

OBRÁZEK

10.3.1. Ortogonální doplněk. Ortogonální bázi můžeme zkusit hledat hladovým algoritmem: zvolit vektor \mathbf{v}_1 , pak vektor \mathbf{v}_2 , aby $f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$, pak vektor \mathbf{v}_3 , aby $f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) = f(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = 0$, atd. Pokud se nám takto podaří najít n lineárně nezávislých vektorů, pak vzniklá posloupnost je polární bázi. Pokud by f byl skalární součin, pak vlastnost $f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) = f(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = 0$ znamená, že \mathbf{v}_3 je v ortogonálním doplňku množiny $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. V případě obecných forem definujeme tento pojem analogicky.

Definice 10.14. Necht f je symetrická bilineární forma na \mathbf{V} . Pro podmnožinu $M \subseteq V$ definujeme f -ortogonální doplněk množiny M vztahem

$$M^{\perp f} = \{\mathbf{y} \in V : (\forall \mathbf{x} \in M) f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\} .$$

Některé jednoduché vlastnosti ortogonálního doplňku jsou stejné jako u skalárního součinu (viz cvičení):

- $M^{\perp f}$ je podprostorem \mathbf{V} ,
- Je-li $M \subseteq N$, pak $M^{\perp f} \supseteq N^{\perp f}$.
- $M^{\perp f} = \langle M \rangle^{\perp f}$.

Ne všechny vlastnosti jsou samozřejmě stejné, například ortogonální doplněk podprostoru W může mít netriviální průnik s původním prostorem, nemusí to tedy být doplněk prostoru v běžném významu (tj. podprostor, který tvoří spolu s původním podprostorem direktní rozklad).

Příklad 10.15. Určíme f -ortogonální doplněk podprostoru $W = \langle (1, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T \rangle$ pro bilineární formu f na \mathbb{Z}_3^3 danou maticí

$$[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Víme, že $W^{\perp f} = \{(1, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T\}^{\perp f}$. Hledáme vektory $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{Z}_3^3$, pro které

$$f((1, 1, 0)^T, \mathbf{x}) = (1 \ 1 \ 0)[f]_{K_3}\mathbf{x} = (2, 0, 2)\mathbf{x} = 2x_1 + 2x_3 = 0$$

a

$$f((1, 0, 1)^T, \mathbf{x}) = (1 \ 0 \ 1)[f]_{K_3}\mathbf{x} = (1, 0, 1)\mathbf{x} = x_1 + x_3 = 0 .$$

Vidíme, že $W^{\perp f}$ je řešení homogenní soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} (1 \ 1 \ 0)[f]_{K_3} \\ (1 \ 0 \ 1)[f]_{K_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim (1 \ 0 \ 1) .$$

Takže

$$W^{\perp f} = \langle (2, 0, 1)^T, (0, 1, 0)^T \rangle$$

Předchozí příklad ukazuje, jak hledat ortogonální doplněk konečné množiny vektorů obecně.

Pozorování 10.16. Necht B je báze konečně generovaného prostoru \mathbf{V} , f je symetrická bilineární forma na \mathbf{V} a $M = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$. Pak

$$[M^{\perp f}]_B = \text{Ker}([\mathbf{w}_1]_B | \dots | [\mathbf{w}_k]_B)^T [f]_B .$$

Důkaz. Budeme postupovat podobně jako ve cvičení. Vektor \mathbf{x} leží v $M^{\perp f}$ právě tehdy, když $f(\mathbf{w}_i, \mathbf{x}) = 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$. Podmínka $f(\mathbf{w}_i, \mathbf{x}) = 0$ je ekvivalentní $[\mathbf{w}_i]_B^T [f]_B [\mathbf{x}]_B = 0$, takže tato podmínka platí pro každé i právě tehdy, když $([\mathbf{w}_1]_B | \dots | [\mathbf{w}_k]_B)^T [f]_B [\mathbf{x}]_B = 0$. Jinými slovy, \mathbf{x} leží v $M^{\perp f}$ právě tehdy, když $[\mathbf{x}]_B$ je řešením homogenní soustavy rovnic s maticí $([\mathbf{w}_k]_B)^T [f]_B$. Z toho plyne dokazované tvrzení. \square

Ortogonalnímu doplňku celého prostoru \mathbf{V} říkáme radikál. Určuje do jaké míry je forma degenerovaná. Hledáním radikálu bude první krok při hledání ortogonální báze.

Definice 10.17. Necht f je symetrická bilineární forma na prostoru \mathbf{V} dimenze n . Pak

- *radikál* f je podprostor $V^{\perp f}$ prostoru \mathbf{V} , značíme $\text{rad } f$, tj.

$$\text{rad } f = V^{\perp f} = \{\mathbf{x} \in V : (\forall \mathbf{y} \in V) f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\},$$

- *nulita* f je dimenze radikálu $n_0(f) = \dim(\text{rad } f)$,
- *hodnota* f je $r(f) = n - n_0(f)$,
- f je *regulární*, pokud $n_0(f) = 0$, jinak je *singulární*.

Na výpočet radikálu můžeme použít předchozí pozorování.

Příklad 10.18. Je dána matice bilineární formy f na \mathbb{R}^2 vzhledem k bázi B .

$$B = \left(\left(\begin{array}{c} 5 \\ 6 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -2 \\ 2 \end{array} \right) \right), \quad [f]_B = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right)$$

Ortogonalní doplněk \mathbb{R}^2 je roven ortogonalnímu doplňku kanonické báze, takže podle pozorování je

$$[\text{rad } f]_B = \text{Ker}(I_2[f]_B) = \text{Ker} \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right) = \left\langle \left(\begin{array}{c} -2 \\ 1 \end{array} \right) \right\rangle.$$

Takže

$$\text{rad } f = \left\langle -2 \left(\begin{array}{c} 5 \\ 6 \end{array} \right) + 1 \left(\begin{array}{c} -2 \\ 2 \end{array} \right) \right\rangle = \left\langle \left(\begin{array}{c} -12 \\ -10 \end{array} \right) \right\rangle = \left\langle \left(\begin{array}{c} 6 \\ 5 \end{array} \right) \right\rangle.$$

Forma f je singulární, nulita i hodnota jsou 1.

Z příkladu také vidíme, jak poznáme hodnotu z matice vzhledem k libovolné bázi.

Pozorování 10.19. Necht f je symetrická bilineární forma na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} a B je báze \mathbf{V} . Pak $[\text{rad } f]_B = \text{Ker}([f]_B)$. Speciálně, $r(f) = r([f]_B)$, a f je regulární právě tehdy, když $[f]_B$ je regulární. Navíc

Důkaz. Je-li $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, pak $V^{\perp f} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}^{\perp f}$ a podle pozorování 10.16 máme

$$[V^{\perp f}]_B = \text{Ker}([\mathbf{v}_1]_B | \dots | [\mathbf{v}_n]_B)^T [f]_B = \text{Ker}(I_n [f]_B) = \text{Ker}([f]_B).$$

Zbytek je důsledkem definic. \square

Bilineární forma je na radikálu nulová. Následující tvrzení říká, že na libovolném podprostoru W splňujícím $W \oplus (\text{rad } f) = \mathbf{V}$ je naopak regulární. Takovému podprostoru W říkáme *doplňkem* $\text{rad } f$. Pozor, neplést s ortogonálním doplňkem (který obecně doplňkem není). „Formou na podprostoru W “ rozumíme přesněji zúžení

bilineární formy f na $W \times W$. Tuto bilineární formu budeme značit $f|_W$ a nazývat *zúžení na W* .

Tvrzení 10.20. *Nechť f je symetrická bilineární forma na \mathbf{V} a \mathbf{W} je doplněk radikálu f , tj. podprostor \mathbf{W} prostoru \mathbf{V} takový, že $W \oplus (\text{rad } f) = V$. Pak zúžení f na W je regulární bilineární forma.*

Důkaz. Vezmeme libovolný vektor $\mathbf{w} \in \text{rad } f|_W$ a ukážeme, že nutně $\mathbf{w} \in \text{rad } f$. Uvažujme libovolný vektor $\mathbf{v} \in V$. Protože $W + \text{rad } f = V$, existuje vektor $\mathbf{x} \in W$ a $\mathbf{y} \in \text{rad } f$ tak, že $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Protože $\mathbf{w} \in \text{rad } f|_W$ a $\mathbf{x} \in W$, platí $f(\mathbf{w}, \mathbf{x}) = 0$. Protože $\mathbf{y} \in \text{rad } f$, pak $f(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = 0$. Dohromady

$$f(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{w}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{w}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = 0 .$$

Ukázali jsme, že $\mathbf{w} \in \text{rad } f$. Pak $\mathbf{w} \in W \cap \text{rad } f = \{\mathbf{o}\}$. □

Předchozí tvrzení nám umožňuje převést hledání f -ortogonální báze obecné symetrické bilineární formy f na speciální případ regulárních forem. Pro ty využijeme zobecnění věty 8.29 o ortogonálním doplňku: V případě, že je bilineární forma f na podprostoru W regulární, je f -ortogonální doplněk doplňkem, tj. lze každý vektor jednoznačně napsat jako součet vektoru z W a vektoru z f -ortogonálního doplňku prostoru W .

Věta 10.21. *Nechť f je regulární symetrická bilineární forma na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} dimenze n a \mathbf{W} podprostor \mathbf{V} takový, že $f|_W$ je regulární. Pak*

- (1) $\dim(W^{\perp f}) = n - \dim(W)$,
- (2) $V = W \oplus W^{\perp f}$ a zúžení f na $W^{\perp f}$ je regulární forma.
- (3) $(W^{\perp f})^{\perp f} = W$.

Důkaz. (1) Nechť $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)$ je nějaká báze \mathbf{W} . Z tvrzení 10.16 vyplývá, že $[W^{\perp f}]_B = \text{Ker}([\mathbf{w}_1]_B | \dots | [\mathbf{w}_k]_B)^T$, kde B je libovolná báze \mathbf{V} , takže podle věty o dimenzi jádra a obrazu máme $\dim(W^{\perp f}) = n - k$.

(2) V průniku $W \cap W^{\perp f}$ jsou vektory $\mathbf{w} \in W$ takové, že $f(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$ pro libovolný vektor $\mathbf{v} \in W$, tedy právě prvky $\text{rad } f|_W$. Protože je $f|_W$ regulární, musí být nutně $\mathbf{w} = \{\mathbf{o}\}$.

Ukážeme dva způsoby, jak dokázat $W + W^{\perp f} = V$, které kopírují postupy pro skalární součin.

1. způsob. Jedna možnost je srovnání dimenzí. Označme $n = \dim(\mathbf{V})$, zvolme libovolnou bázi B prostoru \mathbf{V} , libovolnou bázi $C = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)$ prostoru \mathbf{W} a označme $D = ([\mathbf{w}_1]_B | \dots | [\mathbf{w}_k]_B)$. Podle pozorování 10.16 je $[W^{\perp f}]_B = \text{Ker}(D^T[f]_B)$. Matice D^T má k řádků, takže její hodnota je nejvýše k . Součin $D^T[f]_B$ má proto také hodnota nejvýše k (podle tvrzení 5.77 o hodnotě součinu). Jádro $D^T[f]_B$ a tím pádem i $W^{\perp f}$ má pak podle věty o dimenzi jádra a obrazu dimenzi alespoň $n - k$. Nyní stačí odhadnout dimenzi součtu podle věty 5.87 o dimenzi součtu a průniku:

$$\dim(W + W^{\perp f}) = \dim W + \dim W^{\perp f} - \dim(W \cap W^{\perp f}) \geq k + (n - k) - 0 = n .$$

Z toho plyne, že součet je celý prostor.

2. způsob. Druhou možností je přímo najít rozklad libovolného vektoru $\mathbf{v} \in V$ na součet $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$, kde $\mathbf{w} \in W$ a $\mathbf{u} \in W^{\perp f}$. Ekvivalentně, chceme najít vektor \mathbf{w} , aby $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ ležel v $W^{\perp f}$. Zvolíme nějakou bázi

$C = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)$ prostoru \mathbf{W} a označíme $[\mathbf{w}]_C = (a_1, \dots, a_k)^T$. Vektor $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ leží v $W^{\perp f}$ právě tehdy, když je $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ f -ortogonální k vektorům $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$. Je tedy nutné a stačí, aby pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ platilo

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{w}_i) &= 0 \\ f(\mathbf{v} - a_1 \mathbf{w}_1 - a_2 \mathbf{w}_2 - \dots - a_k \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_i) &= 0 \\ a_1 f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_i) + \dots + a_k f(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_i) &= f(\mathbf{v}, \mathbf{w}_i) \end{aligned}$$

Získali jsem soustavu lineárních rovnic s maticí $[f]_C$ (u skalárního součinu jsme tuto matici nazývali Gramova matice). Protože $f|_W$ je regulární, je $[f]_C$ regulární (viz pozorování 10.19), takže soustava má řešení. Nalezli jsme vektor \mathbf{w} , pro který $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ leží v $W^{\perp f}$, čímž je důkaz $W + W^{\perp f} = V$ hotov.

Zbývá dokázat, že $f|_{W^{\perp f}}$ je regulární, to přenecháme do cvičení.

- (3) Tato část se dokáže stejně jako ve větě 8.29 užitím $W \subseteq (W^{\perp f})^{\perp f}$ (to platí pro jakoukoliv bilineární formu) a srovnáním dimenzí. □

10.3.2. Hledání ortogonální báze, metoda ortogonálních doplňků. Pro regulární formu f nyní můžeme pro hledání ortogonálního doplňku použít „téměř“ hladový algoritmus. Zvolíme \mathbf{v}_1 tak, aby zúžení f na $\langle \mathbf{v}_1 \rangle$ bylo regulární, neboli $f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = f_2(\mathbf{v}_1) \neq 0$. Pak spočítáme $\{\mathbf{v}_1\}^{\perp f}$ a hledáme podobným postupem zbylé vektory \mathbf{v}_2, \dots v prostoru $\{\mathbf{v}_1\}^{\perp f}$. Jak vektor \mathbf{v}_1 nalézt nám napovídá polarizační identita z tvrzení 10.11.

Pozorování 10.22. *Nechť $B = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ je báze vektorového prostoru \mathbf{V} nad tělesem charakteristiky různé od 2 a f je nenulová symetrická bilineární forma na \mathbf{V} . Pak $f_2(\mathbf{w}_i) \neq 0$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, n\}$ nebo $f_2(\mathbf{w}_i + \mathbf{w}_j) \neq 0$ pro nějaká $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$.*

Důkaz. Jsou-li všechny hodnoty $f_2(\mathbf{w}_i)$, $f_2(\mathbf{w}_i + \mathbf{w}_j)$ nulové, pak podle identity v tvrzení 10.11 pro libovolné $i \neq j$ platí $f(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) = 0$. Matice $[f]_B$ je tedy nulová, z čehož vyplývá, že forma f je nulová. □

Shrneme postup pro hledání f -ortogonální báze symetrické bilineární formy f na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} .

- Najdeme rad f , najdeme doplněk \mathbf{W} prostoru rad f a položíme $g = f|_W$
- Zvolíme \mathbf{v}_1 tak, aby $g_2(\mathbf{v}_1) \neq 0$. Spočítáme $\{\mathbf{v}_1\}^{\perp g}$.
- Zvolíme $\mathbf{v}_2 \in \{\mathbf{v}_1\}^{\perp g}$ tak, aby $g_2(\mathbf{v}_2) \neq 0$.
- Zvolíme $\mathbf{v}_3 \in \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}^{\perp g}$ tak, aby $g_2(\mathbf{v}_3) \neq 0$.
- ...
- Zvolíme $\mathbf{v}_r \neq \mathbf{0} \in \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r-1}\}^{\perp g}$, kde $r = r(f)$.
- K nalezeným vektorům $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ připojíme nějakou bázi $(\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ radikálu. Tím získáme f -ortogonální bázi prostoru \mathbf{V} .

Z důkazu následující věty vyplývá, že uvedený postup funguje.

Věta 10.23. *Nechť \mathbf{T} je těleso charakteristiky různé od 2. Pro každou symetrickou bilineární formu f na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} nad \mathbf{T} existuje f -ortogonální báze.*

Pro každou čtvercovou matici A řádu n nad \mathbf{T} existuje regulární matice B řádu n taková, že $B^T A B$ je diagonální.

Důkaz. Větu nejprve dokážeme, za předpokladu, že f je regulární. Důkaz provedeme indukcí podle $n = \dim \mathbf{V}$. Je-li $n = 1$, pak libovolný nenulový vektor tvoří f -ortogonální bázi. Předpokládejme, že $n > 1$ a že tvrzení platí pokud $\dim(\mathbf{V}) < n$. Protože f je regulární, je nenulová, takže podle pozorování 10.22 najdeme vektor \mathbf{v}_1 , pro který $f_2(\mathbf{v}_1) \neq 0$. Označme $U = \langle \mathbf{v}_1 \rangle^{\perp f}$. Protože $f_2(\mathbf{v}_1) \neq 0$, je restrikce f na $\langle \mathbf{v}_1 \rangle$ regulární forma, takže podle věty 10.21 je $\langle \mathbf{v}_1 \rangle \oplus U = V$ a restrikce $f|_U$ je regulární. Podprostor \mathbf{U} prostoru \mathbf{V} je doplněk prostoru dimenze 1, proto má (např. podle věty 5.87 o dimenzi součtu a průniku) dimenzi $n - 1$. Podle indukčního předpokladu existuje $(f|_U)$ -ortogonální báze $(\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{U} . Protože $\langle \mathbf{v}_1 \rangle \oplus U = V$, je $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ báze \mathbf{V} . Navíc $f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$ kdykoliv $2 \leq i < j \leq n$, protože $(\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ je $(f|_U)$ -ortogonální, a také $f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_j) = 0$ pro libovolné $2 \leq j \leq n$, protože vektory $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ leží v f -ortogonálním doplňku vektoru \mathbf{v}_1 . Ukázali jsme, že $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je f -ortogonální báze \mathbf{V} .

Zbývá vyřešit případ, kdy f je singularní. Nechť \mathbf{W} je nějaký doplněk rad f v prostoru \mathbf{V} a označme $g = f|_{\mathbf{W}}$. Podle tvrzení 10.20 je g regulární forma. Protože \mathbf{W} je doplněk rad f je např. podle věty 5.87 o dimenzi součtu a průniku jeho dimenze rovná $n - \dim(\text{rad } f) = r(f) = r$. Podle přechozího odstavce existuje g -ortogonální báze $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$ prostoru \mathbf{W} . Doplněním libovolnou bází $(\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ radikálu získáme f -ortogonální bázi \mathbf{V} .

Tvrzení o maticích je pouze jinou formulací první části. Vezmeme symetrickou bilineární formu f na \mathbf{T}^n , jejíž matice vzhledem ke kanonické bázi je A , tj. $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$. Označme B nějakou f -ortogonální bází \mathbf{T}^n a $X = [\text{id}]_{K_n}^B$. Protože B je f -ortogonální, je $[f]_B$ diagonální. Podle tvrzení 10.6 je $[f]_B = X^T A X$. \square

Příklad 10.24. Najdeme f -ortogonální bázi pro symetrickou bilineární formu f na prostoru \mathbb{Z}_3^4 zadanou její maticí vzhledem ke kanonické bázi.

$$A = [f]_{K_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nejprve vypočítáme radikál. V příkladu 10.18 jsme si všimli, že je rovný jádru matice A .

$$\begin{aligned} \text{rad } f &= \text{Ker } A = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Nulita f je 1, hodnost 3.

Doplníme bázi radikálu na bázi \mathbb{Z}_3^4 , například vektory

$$\mathbf{w}_1 = (0, 1, 0, 0)^T, \mathbf{w}_2 = (0, 0, 1, 0)^T, \mathbf{w}_3 = (0, 0, 0, 1)^T .$$

Označme $B = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$. Zřejmě $W = \langle B \rangle$ je doplněk radikálu. Matice zúžené formy $g = f|_W$ vzhledem k B je podle definice

$$[g]_B = C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dále budeme počítat s vektory v bázi B . Najdeme \mathbf{v}_1 tak, aby $g_2(\mathbf{v}_1) \neq 0$. Podle pozorování 10.22 můžeme použít jeden z vektorů

$$[\mathbf{v}_1]_B \in \{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T\} .$$

První tři vektory zřejmě nefungují (hodnoty g_2 jsou na diagonále). Pro vektor

$$[\mathbf{v}_1]_B = (1, 1, 0)^T$$

vyjde

$$g_2(\mathbf{v}_1) = (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2 \ 2 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 .$$

Volba je tedy úspěšná. Podle pozorování 10.16 spočítáme $\{\mathbf{v}_1\}^{\perp_g}$.

$$[\{\mathbf{v}_1\}^{\perp_g}]_B = \text{Ker} \left((1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Ker} (2 \ 2 \ 2) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Vektor \mathbf{v}_2 volíme v tomto prostoru tak, aby $g_2(\mathbf{v}_2) \neq 0$. Podle pozorování 10.22 můžeme použít jeden z vektorů

$$[\mathbf{v}_2]_B \in \{(2, 0, 1)^T, (2, 1, 0)^T, (2, 0, 1)^T + (2, 1, 0)^T = (1, 1, 1)^T\} .$$

Zkusíme třeba

$$[\mathbf{v}_2]_B = (1, 1, 1)^T .$$

Vyjde

$$g_2(\mathbf{v}_2) = (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 .$$

Volba je úspěšná. Spočítáme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}^{\perp_g}$.

$$\begin{aligned} [\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}^{\perp_g}]_B &= \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Zvolíme $[\mathbf{v}_3]_B = (2, 1, 0)^T$. Pro tento vektor musí nutně platit $g_2(\mathbf{v}_3) \neq 0$, protože víme, že forma g je na $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}^{\perp_g}$ regulární. Přesto tuto hodnotu spočítáme, bude se nám hodit pro kontrolu a pro získání matice f vzhledem k nalezené f -ortogonální bázi.

$$g_2(\mathbf{v}_3) = (2 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 .$$

Přepočítáme nalezené vektory do kanonické báze a doplníme bázi radikálu.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Báze $D = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ je ortogonální. Matice f vzhledem k D je

$$[f]_D = \begin{pmatrix} f_2(\mathbf{v}_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2(\mathbf{v}_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_2(\mathbf{v}_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_2(\mathbf{v}_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Maticově

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= ([\text{id}]_{K_4}^D)^T A ([\text{id}]_{K_4}^D) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

10.3.3. *Hledání ortogonální báze – metoda symetrických úprav.* Předpokládejme, že f je bilineární forma na vektorovém prostoru \mathbf{V} dimenze n nad tělesem \mathbf{T} , C je báze \mathbf{V} a $A = [f]_C$. Vytvoříme matici typu $n \times 2n$ tak, že vedle A napíšeme jednotkovou matici, tj. vytvoříme matici $(A|I_n)$. S touto maticí provádíme tzv. *symetrické úpravy*. Jedna symetrická úprava sestává s elementární řádkové úpravy a následné „stejně“ úpravy na sloupce. Máme tedy tři typy symetrických úprav:

- prohození i -tého a j -tého řádku, následné prohození i -tého a j -tého sloupce,
- vynásobení i -tého řádku nenulovým prvkem $t \in T$, následné vynásobení i -tého sloupce prvkem t ,
- přičtení t -násobku i -tého řádku k j -tému, kde $t \in T$ a $i \neq j$, následné přičtení t -násobku i -tého sloupce k j -tému.

Řádkové úpravy provádíme s celými řádky (vektory z \mathbf{T}^{2n}), sloupcové úpravy se vždy týkají jen levého bloku matice.

Odvodíme maticový popis symetrické úpravy matice $(X|Y)$ typu $n \times 2n$. Označíme E matici příslušné řádkové úpravy. Po provedení řádkové úpravy vznikne matice $E(X|Y) = (EX|EY)$. Příslušná sloupcová úprava odpovídá násobení maticí E^T zprava, takže po provedení obou úprav máme matici $(EXE^T|EY)$. Začneme-li tedy s maticí $(A|I_n)$ a provedeme několik symetrických úprav, dostaneme posloupnost matic

$$(A|I_n), (E_1 A E_1^T | E_1), (E_2 E_1 A E_1^T E_2^T | E_2 E_1), \dots, (E_k \dots E_1 A E_1^T \dots E_k^T | E_k \dots E_1) .$$

Označme $F = (E_k \dots E_1)^T$, tj. poslední matice je $(F^T A F | F^T)$. Matice F je regulární, protože je transponovaným součinem elementárních matic. Označme B bázi \mathbf{V} takovou, že $[\text{id}]_C^B = F$, tj. vyjádření vektorů báze G vzhledem k bázi C je ve sloupcích matice F , neboli v řádcích pravého bloku výsledné matice $(F^T A F | F^T)$. Podle tvrzení 10.6 o změně matice bilineární formy při změně báze je matice $F^T A F$ v levé bloku matice $(F^T A F | F^T)$ rovná matici f vzhledem k B .

Toto pozorování můžeme využít například pro hledání f -ortogonální báze v případě, že f je symetrický forma: Symetrickými úpravami převedeme matici $(A|I_n)$ do tvaru $(D|G)$, kde D je diagonální. Jako cvičení si rozmyslete, že to vždy lze provést. Pak v řádcích matice G máme vyjádření vektorů jisté báze B v původní bázi C a platí $[f]_B = D$, tj. speciálně B je f -ortogonální.

Příklad 10.25. Najdeme f -ortogonální bázi pro bilineární formu f na \mathbb{Z}_3^3 .

$$[f]_{K_3} = A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Upravujeme matici $(A|I_n)$ symetrickými úpravami do tvaru $(D|G)$, kde D je diagonální.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Komentář k úpravám: V prvním kroku potřebujeme na pivotní pozici $(1, 1)$ nenulový prvek, docílíme toho přičtením druhého řádku k prvnímu (a následnou symetrickou úpravou – přičtení druhého sloupce k prvnímu). Všimněte si, že prohozením řádků v tomto případě ničeho nedocílíme. Kdybychom například prohodili první a druhý řádek, a následně symetricky první a druhý sloupec, na pozici $(1, 1)$ by byla stále nule. Po této úpravě jsme již jen přičetli první řádek k druhému a třetímu, a symetricky se sloupci.

Z diskuze nad příkladem vyplývá, že $B = ((1, 1, 0)^T, (1, 2, 0)^T, (1, 1, 1)^T)$ je f -ortogonální báze a $[f]_B = \text{diag}(1, 2, 2)$.

10.3.4. *Hledání ortogonální báze – explicitní vzorec.* Následující tvrzení dává v některých případech explicitní vzorec pro vektory nějaké f -ortogonální báze. Na výpočet f -ortogonální báze se příliš nehodí, ale tvrzení je užitečné v případě, že nás zajímá pouze matice vzhledem k nějaké f -ortogonální bázi B aniž bychom potřebovali tuto bázi znát. Souřadnice vektorů báze B budou algebraické doplňky prvků jistých matic. Připomeňme, že X_{ij} značí algebraický doplněk prvku (i, j) v matici X , který je definován jako determinant matice vzniklé z X vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce, vynásobený znaménkem $(-1)^{i+j}$ (viz definice 6.30). Pro matici X řádu 1 definujeme $X_{11} = 1$.

Tvrzení 10.26. *Nechť f je symetrická bilineární forma na prostoru \mathbf{V} dimenze n , B je báze \mathbf{V} a $A = [f]_B$. Pro $1 \leq i \leq n$ označme $A^{(i)}$ matici tvořenou prvními i řádky a i sloupci matice A . Pokud je každá z matic $A^{(1)}, \dots, A^{(n)} = A$ regulární, pak posloupnost $C = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, kde*

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_1]_B &= ((A^{(1)})_{11}, 0, 0, \dots, 0)^T \\ [\mathbf{v}_2]_B &= ((A^{(2)})_{12}, (A^{(2)})_{22}, 0, \dots, 0)^T \\ &\vdots \\ [\mathbf{v}_n]_B &= ((A^{(n)})_{1n}, (A^{(n)})_{2n}, \dots, (A^{(n)})_{nn})^T, \end{aligned}$$

je f -ortogonální báze a

$$[f]_C = \text{diag}(|A^{(1)}|, |A^{(1)}| \cdot |A^{(2)}|, |A^{(2)}| \cdot |A^{(3)}|, \dots, |A^{(n-1)}| \cdot |A^{(n)}|)$$

Důkaz. Předně C je za daných předpokladů báze, protože $([\mathbf{v}_1]_B | \dots | [\mathbf{v}_n]_B)$ je dolní trojúhelníková matice s nenulovými prvky na diagonále.

Označme $A = (a_{ij})$. Hodnotu $f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ pro $i \geq j$ spočítáme využitím věty o rozvoji determinantu podle sloupce a věty o falešném rozvoji.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) &= [\mathbf{v}_i]_B [f]_B [\mathbf{v}_j]_B \\ &= ((A^{(i)})_{1i}, \dots, (A^{(i)})_{ii}, 0, \dots, 0) A ((A^{(j)})_{1j}, \dots, (A^{(j)})_{jj}, 0, \dots, 0)^T \\ &= ((A^{(i)})_{1i} a_{11} + \dots + (A^{(i)})_{ii} a_{i1}, \dots, (A^{(i)})_{1i} a_{1i} + \dots + (A^{(i)})_{ii} a_{ii}, ?, \dots, ?) \\ &\quad ((A^{(j)})_{1j}, \dots, (A^{(j)})_{jj}, 0, \dots, 0)^T \\ &= \underbrace{(0, \dots, 0)}_{(i-1) \times} |A^{(i)}|, ?, \dots, ? ((A^{(j)})_{1j}, \dots, (A^{(j)})_{jj}, 0, \dots, 0)^T \end{aligned}$$

Otazníky značí neznámé nezajímavé prvky tělesa. V poslední rovnosti jsme využili větu o falešném rozvoji ($(i-1)$ -krát) a větu o rozvoji podle i -tého sloupce pro matici $A^{(i)}$.

Z odvozeného vztahu vidíme, že $f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$ pro $i > j$. Ze symetrie bilineární formy f platí také $f(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i) = 0$. Pro $i = j > 1$ máme $f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = |A^{(i)}| |(A^{(i)})_{ii}| = |A^{(i)}| |A^{(i-1)}|$ a pro $i = j = 1$ zřejmě $f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = |A^{(1)}|$. Tím je důkaz hotov. \square

Všimněte si, že tvrzení nemůžeme nikdy použít pro singulární formy, protože pro ty je vždy $A^{(n)} = A$ singulární. To ale není jediné omezení. I pro regulární formy může vzhledem k nějaké bázi B pro matici $A = [f]_B$ platit např. $|A^{(1)}| = a_{11} = 0$.

Příklad 10.27. Uvažme symetrickou bilineární formu f na \mathbb{R}^3 danou maticí A vzhledem ke kanonické bázi.

$$A = [f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro tuto matici platí $|A^{(1)}| = 1$, $|A^{(2)}| = -3$, $|A^{(3)}| = -9$, takže tvrzení můžeme použít. Získáme f -ortogonální bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{v}_2 = (-2, 1, 0)^T, \quad \mathbf{v}_3 = (6, -3, -3)^T$$

a matici f vzhledem k této bázi

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

10.3.5. *Hledání ortogonální báze – Gram-Schmidtova ortogonalizace.* V případě, že máme bilineární formu na reálném vektorovém prostoru, která je skalárním součinem, můžeme na hledání ortogonální báze také použít Gram-Schmidtovu ortogonalizaci.

10.4. Ortogonální báze nad \mathbb{R} .

10.4.1. *Setrvačnost.* Ortogonální báze ani matice vzhledem k této bázi není určena jednoznačně. Uvažme bilineární formu f na prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} a f -ortogonální bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{V} . Matice $[f]_B$ je diagonální, řekněme $[f]_B = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$. Vynásobíme i -tý vektor báze B prvkem $t_i \in T$. Vzniklá báze $C = (t_1\mathbf{v}_1, \dots, t_n\mathbf{v}_n)$ je stále f -ortogonální (protože $f(\lambda_i\mathbf{v}_i, \lambda_j\mathbf{v}_j) = \lambda_i\lambda_j f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$ pro $i \neq j$) a na diagonále matice $[f]_C$ jsou prvky $f(t_i\mathbf{v}_i, t_i\mathbf{v}_i) = t_i^2 f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = t_i^2 a_i$, tj. $[f]_C = \text{diag}(a_1 t_1^2, \dots, a_n t_n^2)$.

V případě, že $\mathbf{T} = \mathbb{C}$ z provedené úvahy vyplývá, že pro každou bilineární formu na \mathbf{V} můžeme najít bázi takovou, že $[f]_C = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)$, protože zřejmě pro každé $a_i \in \mathbb{C}$ můžeme najít $t_i \in \mathbb{C}$ tak, že $a_i t_i^2 = 1$. Pro $\mathbf{T} = \mathbb{R}$ můžeme volbou $t_i = \sqrt{|a_i|}$ docílit toho, že $[f]_C$ má na diagonále pouze čísla $1, -1, 0$, tj. při vhodném uspořádání báze $[f]_C = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1, -1, \dots, -1, 0, 0, \dots, 0)$. Počet jedniček je roven počtu kladných prvků na diagonále $[f]_B$, apod.

Na první pohled není jasné, že počet jedniček, minus jedniček a nul nezávisí na volbě báze. Věta 10.30, tzv. *zákon setrvačnosti kvadratických forem* říká, že tomu tak skutečně je. Dokážeme jí tak, že dáme těmto počtům geometrický význam, který nezávisí na volbě báze. Pro počet nul již potřebný pojem máme: počet nul je roven dimenzi radikálu, protože radikál je přesně podprostor generovaný těmi vektory báze C , které odpovídají nulám na diagonále (viz důkaz věty o setrvačnosti). Pro počty jedniček a minus jedniček potřebujeme pojmy pozitivně a negativně definitní forma:

Definice 10.28. Symetrická bilineární forma g na reálném vektorovém prostoru \mathbf{W} je *pozitivně definitní*, pokud $g_2(\mathbf{w}) > 0$ pro libovolný vektor $\mathbf{o} \neq \mathbf{w} \in W$.

Symetrická bilineární forma g na reálném vektorovém prostoru \mathbf{W} je *negativně definitní*, pokud $g_2(\mathbf{w}) < 0$ pro libovolný vektor $\mathbf{o} \neq \mathbf{w} \in W$.

Zřejmě g je pozitivně definitní právě tehdy, když $-g$ je negativně definitní. Také si všimněte, že pro reálný vektorový prostor \mathbf{V} je pozitivně definitní symetrická bilineární forma totéž jako skalární součin. Vlastnosti (SL1), (SL2) a (SL3) z definice 8.3 skalárního součinu říkají, že skalární součin je symetrická bilineární forma, a vlastnost (SP) je pozitivní definitnost.

Pozorování 10.29. *Nechť g je symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru \mathbf{W} a D je báze \mathbf{W} taková, že $[g]_D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$. Pak g je pozitivně definitní právě tehdy, když $a_1, \dots, a_n > 0$.*

Důkaz. Pro libovolný vektor je $g_2(\mathbf{w}) = g(\mathbf{w}, \mathbf{w})$ rovno

$$g_2(\mathbf{w}) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2, \text{ kde } [\mathbf{w}]_D = (x_1, \dots, x_n) .$$

Obě implikaci jsou teď vidět: Je-li $a_1, \dots, a_n > 0$, pak je výraz pro libovolný nenulový vektor kladný, takže g je pozitivně definitní. Naopak, pokud je výraz pro libovolný nenulový vektor kladný, pak volbou $[\mathbf{w}]_D = \mathbf{e}_i$ získáme $a_i > 0$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. \square

Pro negativně definitní samozřejmě platí obdobné pozorování: g je negativně definitní právě tehdy, když $a_1, \dots, a_n < 0$.

Pojmy pozitivně a negativně definitní formy nám umožňují dát slíbený geometrický význam počtu kladných a záporných prvků na diagonále matice symetrické formy vzhledem k ortogonální bázi a tím dokázat zákon setrvačnosti:

Věta 10.30 (Zákon setrvačnosti kvadratických forem). *Nechť f je symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru \mathbf{V} dimenze n a C, C' báze \mathbf{V} takové, že*

$$[f]_C = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k \times}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{l \times}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m \times})$$

$$[f]_{C'} = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k' \times}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{l' \times}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m' \times})$$

Pak $k = k', l = l', m = m'$.

Důkaz. Označme $C = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$.

Nejprve si všimneme, že rad $f = \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l \rangle$. K tomu můžeme použít například pozorování 10.19 o výpočtu radikálu, které říká, že $\text{rad } f|_C = \text{Ker}([f]_C)$. Jádro matice $[f]_C$ je právě množina vektorů z T^n , jejichž prvních $k+l$ složek je nulových, takže rad f tvoří lineární kombinace posledních l vektorů, jak jsme chtěli. Z toho plyne, že $l = \dim \text{rad } f$. Dimenze radikálu nijak nezávisí na zvolené bázi, takže $m = m'$.

Nyní ukážeme, že k je rovno největší možné dimenzi s podprostoru \mathbf{W} prostoru \mathbf{V} takového, že restrikce $f|_W$ je pozitivně definitní. Restrikce f na podprostor $W = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ je pozitivně definitní například podle pozorování 10.29, protože matice $f|_W$ vzhledem k bázi $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ je $\text{diag}(1, 1, \dots, 1)$. Tím jsme ukázali nerovnost $s \geq k$. K důkazu opačné nerovnosti uvažujme libovolný podprostor \mathbf{W} prostoru \mathbf{V} takový, že $f|_W$ je pozitivně definitní. Chceme dokázat, že $\dim \mathbf{W} \leq k$. Předpokládejme pro spor, že $\dim \mathbf{W} > k$. Označme $U = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l \rangle$. Pomocí věty 5.87 o dimenzi součtu a průniku dokážeme, že $W \cap U \neq \{\mathbf{o}\}$:

$$\dim(\mathbf{W} \cap \mathbf{U}) = \dim(\mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U}) - \dim(\mathbf{W} + \mathbf{U}) > k + (l + m) - n = 0$$

Vezmeme nenulový vektor $\mathbf{x} \in W \cap U$. Protože $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in W$ a $f|_W$ je pozitivně definitní, platí $f_2(\mathbf{x}) > 0$. Na druhou stranu $\mathbf{x} \in U$, takže ve vyjádření $[\mathbf{x}]_C = (a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l, c_1, \dots, c_m)$ máme $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$ a platí

$$f_2(\mathbf{x}) = 1a_1^2 + \dots + 1a_k^2 + (-1)b_1^2 + \dots + (-1)b_l^2 + 0c_1^2 + \dots + 0c_m^2 \leq 0,$$

což je spor. Tento spor dokazuje, že $k = s$. Z toho vidíme, že k nezávisí na volbě báze C a tedy $k = k'$.

Protože $m = m', k = k'$ a $k+l+m = k'+l'+m' = 0$, víme automaticky, že $l' = l$. Lepší je si uvědomit, že l lze podobně jako k charakterizovat geometricky: je rovno největší možné dimenzi podprostoru, na kterém je forma negativně definitní. \square

Definice 10.31. Nechť f je symetrická bilineární forma na reálném konečně generovaném vektorovém prostoru \mathbf{V} . Číslo k (resp. l) z předchozí věty nazýváme *pozitivní* (resp. *negativní*) *index setrvačnosti formy f* , značíme $n_+(f)$ (resp. $n_-(f)$). *Signaturou formy f* rozumíme trojici $(n_0(f), n_+(f), n_-(f))$.

10.4.2. *Hledání signatury, Sylvestrovo kritérium.* Signaturu můžeme samozřejmě hledat tak, že najdeme f -ortogonální bázi a podíváme se na matici f vzhledem k nalezené bázi. Pokud nás zajímá pouze signatura, můžeme také někdy využít explicitní tvar z tvrzení 10.26.

Příklad 10.32. V příkladu 10.27 jsme uvažovali symetrickou bilineární formu f na \mathbb{R}^3 danou následující maticí A vzhledem ke kanonické bázi.

$$A = [f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro tuto matici platí $|A^{(1)}| = 1$, $|A^{(2)}| = -3$, $|A^{(3)}| = -9$, takže tvrzení 10.26 lze použít. Pokud nás zajímá pouze signatura, důležité jsou pouze znaménka těchto subdeterminantů. Víme, že vzhledem k nějaké bázi (konkrétní tvar je v tvrzení) má forma f diagonální matici s prvky $|A^{(1)}| > 0$, $|A^{(1)}||A^{(2)}| < 0$ a $|A^{(2)}||A^{(3)}| > 0$, takže signatura je $(0, 2, 1)$.

Příklad 10.33. Pro bilineární formu f na \mathbb{R}^2 s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je $|A^{(1)}| = 0$, takže tvrzení 10.26 přímo použít nelze, přestože je f regulární. Můžeme si vypomoci symetrickými úpravami. Víme totiž, že provedeme-li symetrickou úpravu, výsledná matice je matice stejné formy vzhledem k jiné bázi, takže signatura se nezmění. Přičteme druhý řádek k prvnímu a následně druhý sloupec k prvnímu. Vyjde

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní již $|C^{(1)}| = 2 > 0$, $|C^{(2)}| = -1 < 0$ a signatura je $(0, 1, 1)$.

Příklad 10.34. Podíváme se ještě na bilineární formu f na \mathbb{R}^3 s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Protože sečtením druhého a třetí řádku matice A dostaneme první řádek, je forma f singulární a tvrzení 10.26 nemůžeme použít ani po případných symetrických úpravách.

Spočítáme radikál

$$\begin{aligned} \text{rad } f &= \text{Ker } A = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Doplňek radikálu je např. $W = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T \rangle$. Matice $f|_W$ vzhledem k bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je stejná jako v předchozím příkladu, takže signatura $f|_W$ je $(0, 1, 1)$. Z toho vyplývá, že signatura f je $(1, 1, 1)$.

Pro pozitivně definitní formy teď nahlédneme, že determinanty z tvrzení 10.26 nemohou být nikdy nulové, takže dostáváme charakterizaci pozitivně definitních forem pomocí subdeterminantů. Značení pro podmatice $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ přebíráme z tohoto tvrzení.

Tvrzení 10.35 (Sylvestrové kritérium). *Nechť f je symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru dimenze n a A je její matice vzhledem k nějaké bázi. Pak f je pozitivně definitní (tj. f je skalární součin) právě tehdy, když všechny determinanty $|A^{(1)}|, \dots, |A^{(n)}|$ jsou kladné.*

Důkaz. Implikace zprava doleva plyne z tvrzení 10.26.

Předpokládejme naopak, že f je pozitivně definitní. Indukcí pro $i = 1, 2, \dots, n$ ukážeme, že $|A^{(i)}| > 0$. Využijeme vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ z tvrzení 10.26 a důkaz tohoto tvrzení. Pro $i = 1$ uvažujme vektor \mathbf{v}_1 . Ten je nenulový (jeho vyjádření v bázi B je vektor \mathbf{e}_1). Výpočet v důkazu ukazuje, že $f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = |A^{(1)}|$, takže $|A^{(1)}| > 0$, protože f je pozitivně definitní. Předpokládejme, že $|A^{(i-1)}| > 0$. Pak je vektor \mathbf{v}_i nenulový, protože i -tá složka jeho vyjádření v bázi B je rovna $(A^i)_{ii} = |A^{(i-1)}|$, což je kladné číslo podle indukčního předpokladu. Podle výpočtu v důkazu máme $f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = |A^{(i)}| |A^{(i-1)}|$. Z indukčního předpokladu a pozitivní definitnosti dostáváme $|A^{(i)}| > 0$. \square

Podobné kritérium lze přirozeně získat pro negativně definitní formy, viz cvičení.

10.4.3. *Geometrické příklady.* Podíváme se na dvě aplikace nabytých poznatků na určení tvaru „kvadratického“ útvaru. V příkladech používáme názvy geometrických útvarů, které nemusí být čtenáři známé. K představě snad postačí obrázek, podrobnější diskuze o kvadratických útvarech v \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 bude později.

Příklad 10.36. Podíváme se na množinu bodů $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ splňujících $x_3 = -x_1^2 + x_1x_2 - 3x_2^2$. Je to graf kvadratické formy $f_2((x_1, x_2)^T) = -x_1^2 + x_1x_2 - 3x_2^2$. Příslušná symetrická bilineární forma f na \mathbb{R}^2 je

$$f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = -x_1y_1 + 1/2x_1y_2 + 1/2x_2y_1 - 3x_2^2$$

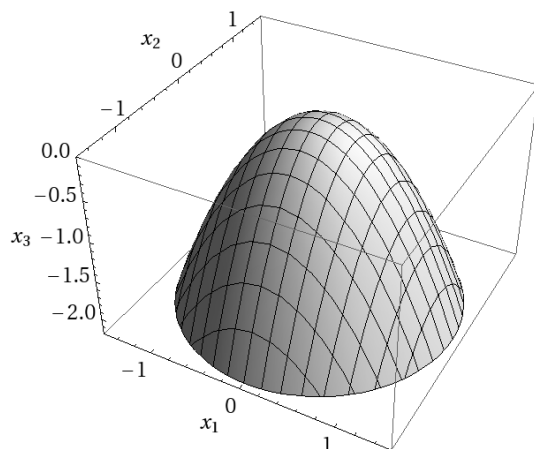
a její matice vzhledem ke kanonické bázi je

$$[f]_{K_2} = A = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Máme $|A^{(1)}| = -1 < 0$, $|A^{(2)}| = 3 - 1/4 > 0$, takže signatura je $(0, 0, 2)$. Analytické vyjádření f_2 vzhledem k jisté bázi B je proto

$$f_2((x_1, x_2)^T) = -(x'_1)^2 - (x'_2)^2, \text{ kde } [(x_1, x_2)^T]_B = (x'_1, x'_2)^T.$$

Grafem $x_3 = -x_1^2 - x_2^2$ je rotační paraboloid otevřený směrem dolů (viz obrázek). Tak vypadá graf vzhledem k bázi B . To nám dává představu, jak vypadá původní útvar – jde o „lineárně zdeformovaný“ rotační paraboloid. Ve skutečnosti je to eliptický paraboloid, ale není to zřejmé.



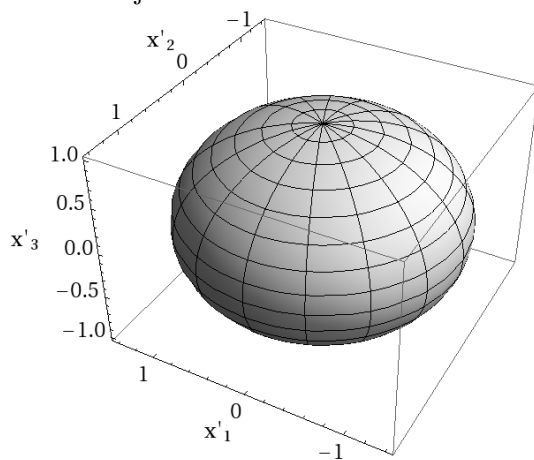
Příklad 10.37. Uvažujme množinu bodů $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ splňujících

$$10x_1^2 + 13x_2^2 + 13x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 = 9 .$$

Levá strana je kvadratická forma f_2 na \mathbb{R}^3 . Příslušná symetrická bilineární forma f má matici

$$[f]_{K_3} = A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 13 & 4 \\ 2 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

Signatura f je $(0, 3, 0)$ (zjistíme například opět výpočtem subdeterminantů a užitím tvrzení 10.26. Vzhledem k jisté bázi B má tedy útvar rovnici $(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2 = 9$, takže jde o „lineárně zdeformovanou“ sféru. Ve skutečnosti jde o elipsoid, ale opět to není to zřejmé.



10.4.4. *Ortonormální diagonalizace.* Jak jsme viděli na příkladech, signatura kvadratické formy f_2 nám dává hrubou představu o tvaru útvarů až na „lineární deformaci“. Víme totiž, že vzhledem k nějaké bázi B má kvadratická forma tvar $\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm \dots$ (kde počet jednotlivých znamének a nenulových členů je daná signaturou). Kvadratické útvary bez smíšených členů se snáze představí, tím získáme představu o podobě původního útvaru. Abychom určili přesný tvar, potřebovali bychom aby B byla ortonormální báze. Naštěstí takovou bázi můžeme vždy najít

(ale nemůžeme samozřejmě vyžadovat, aby koeficienty u kvadratických členů byly z množiny $\{-1, 0, 1\}$).

Tvrzení 10.38. *Nechť g je skalární součin na reálném vektorovém prostoru \mathbf{V} dimenze n a f je symetrická bilineární forma na \mathbf{V} . Pak existuje báze B prostoru \mathbf{V} , která je f -ortogonální a zároveň g -ortonormální.*

Připomeňme, že báze $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je g -ortonormální, pokud je g -ortogonální a navíc $g_2(\mathbf{v}_i) = 1$ pro každé $1 \leq i \leq n$. Tento pojem se shoduje s pojmem ortonormální báze s kapitoly o skalárním součinu.

Důkaz. Pro skalární součin g existuje podle věty 8.44 ortonormální báze C prostoru \mathbf{V} . Označme $A = [f]_C$. V kapitole o unitární diagonalizaci jsme se dozvěděli, že existuje ortonormální báze $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ prostoru \mathbb{R}^n (ortonormalita je zde vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu!) složená z vlastních vektorů matice A (viz důsledek ??). Maticově napsáno, označíme-li $U = (\mathbf{u}_1 | \dots | \mathbf{u}_n)$, je U ortogonální matice a $U^{-1}AU = U^T AU = D$ je diagonální. Vezmeme $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, aby $[\mathbf{v}_i]_C = \mathbf{u}_i$, tj. báze B je zvolená tak, že U je matice přechodu od B k C . Podle tvrzení 10.6 o změně báze je matice f vzhledem k B rovná $U^T AU = D$, takže B je f -ortogonální báze. Protože vyjádření vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ v bázi C tvoří ortonormální bázi vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu a C je ortonormální báze vzhledem ke g , dostáváme, že $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ tvoří ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu g (viz tvrzení 8.21). \square

Z tvrzení vyplývá, že jsou-li f, g dvě symetrické bilineární formy na reálném konečně generovaném prostoru \mathbf{V} , **z nichž alespoň jedna je pozitivně definitní**, pak existuje báze B , která je zároveň f -ortogonální a g -ortogonální. To obecně neplatí, vynecháme-li zvýrazněný požadavek, že alespoň jedna z forem je pozitivně definitní, viz cvičení.

Příklad 10.39. Vrátime se k příkladu 10.37.

Metodou z důkazu předchozího tvrzení najdeme ortonormální bázi (vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu), která je zároveň f -ortogonální. Jako ortonormální bázi C zvolíme kanonickou, tj.

$$[f]_{K_3} = A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 13 & 4 \\ 2 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

Najdeme ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů. Vlastní čísla vyjdou $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ (dvojnásobné) a $\lambda_3 = 18$. V příslušných podprostorech vybereme ortonormální bázi, v M_9 je to např. $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ a v M_{18} (\mathbf{v}_3) .

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Matice f vzhledem k (ortonormální) bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ je $[f]_B = \text{diag}(9, 9, 18)$, takže vzhledem k B je rovnice našeho útvaru

$$9(x'_1)^2 + 9(x'_2)^2 + 18(x'_3)^2 = 18$$

a po drobné úpravě

$$\left(\frac{x'_1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{x'_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + (x'_3)^2 = 1 .$$

Vidíme, že jde o elipsoid s poloosami velikosti $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1$, viz obrázek.

OBRÁZEK

Následující příklad ilustruje obecnější situaci, kdy skalární součin není standardní. Na \mathbb{R}^2 si to můžeme představovat tak, že se na rovinu díváme jinak než zpříma, takže vzdálenosti a úhly jsou deformované. Můžeme se pak například ptát, jak nějaký útvar vypadá z tohoto pohledu.

Příklad 10.40. Na \mathbb{R}^2 máme dány dvě symetrické bilineární formy f, g :

$$[f]_{K_2} = R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad [g]_{K_2} = S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Bilineární forma je podle Sylvestrova kritéria pozitivně definitní na \mathbb{R}^2 . Metodou z důkazu předchozího tvrzení najdeme g -ortonormální bázi, která je zároveň f -ortogonální.

Nejprve potřebujeme nějakou bázi C , která je ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu g . Tu můžeme získat Gram-Schmidtovou ortogonalizací kanonické báze $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = ((1, 0)^T, (0, 1)^T)$. Budeme průběžně normovat. Uvědomte si, že skalární součin vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y} je nyní $\mathbf{x}^T S \mathbf{y}$ a $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T S \mathbf{x}$.

$$\mathbf{w}'_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{w}'_1}{\sqrt{\mathbf{w}'_1{}^T S \mathbf{w}'_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}'_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{w}'_1{}^T S \mathbf{v}_2) \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{w}'_2}{\sqrt{\mathbf{w}'_2{}^T S \mathbf{w}'_2}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Získali jsme g -ortonormální bázi

$$C = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(Tedy z našeho pohledu na \mathbb{R}^2 se nám vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ jeví jako jednotkové a kolmé.)

Matice f vzhledem k bázi C je

$$A = [f]_C = ([\text{id}]_{K_2}^C)^T R [\text{id}]_{K_2}^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní nalezneme ortonormální bázi (vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu) tvořenou vlastními vektory matice A . Vlastní čísla jsou 1 a -1 a příslušné prostory vlastních vektorů jsou $M_1 = \langle (1, 1)^T \rangle$, $M_{-1} = \langle (1, -1)^T \rangle$, takže hledaná báze je

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Pro porovnání s důkazem, označíme-li $U = (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2)$ je U ortogonální matice a $U^T A U = \text{diag}(1, -1)$.

Nyní zvolíme vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ tak, aby $[\mathbf{v}_1]_C = \mathbf{u}_1$ a $[\mathbf{v}_2]_C = \mathbf{u}_2$, čili

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{w}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{w}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{w}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{w}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Báze $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je hledanou f -ortogonální, g -ortonormální bází. Navíc $[f]_B = \text{diag}(1, -1)$ (a samozřejmě $[g]_B = I_2$, protože B je g -ortonormální.)

Optimalizujeme postup v předchozím příkladu. Nechť f, g jsou symetrické bilineární formy na aritmetickém prostoru \mathbb{R}^n a $R = [f]_{K_n}$, $S = [g]_{K_n}$ jejich matice vzhledem ke kanonickým bázím. Nechť C je g -ortonormální báze. Bázi $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ hledáme tak, že $[\mathbf{v}_i]_C = \mathbf{u}_i$ je vlastní vektor matice $A = [f]_C$. Označíme-li $Q = [\text{id}]_{K_2}^C$, máme

$$[f]_C = A = Q^T R Q, \quad [g]_C = I_n = Q^T S Q, \quad [\mathbf{v}_i]_C = [\text{id}]_C^{K_n} [\mathbf{v}_i]_{K_n} = Q^{-1} \mathbf{v}_i$$

Upravíme podmínku, že $[\mathbf{v}_i]_C$ je vlastní vektor matice A . Pro příslušné vlastní číslo λ máme

$$\begin{aligned} ([f]_C - \lambda I_n)[\mathbf{v}_i]_C &= \mathbf{0} \\ (Q^T R Q - \lambda Q^T S Q)Q^{-1} \mathbf{v}_i &= \mathbf{0} \\ Q^T (R - \lambda S) Q Q^{-1} \mathbf{v}_i &= \mathbf{0} \\ (R - \lambda S) \mathbf{v}_i &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_i &\in \text{Ker}(R - \lambda S) \end{aligned}$$

Můžeme tedy postupovat tak, že vypočteme kořeny $\det(R - \lambda S)$, čímž zjistíme vlastní čísla matice A , a pak nalezneme g -ortonormální bázi v jednotlivých vlastních prostorech $\text{Ker}(R - \lambda S)$. Bázi C ani matici A nemusíme vůbec počítat.

Příklad 10.41. V přechodím příkladu je

$$R - \lambda S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 - 3\lambda \\ 1 - 3\lambda & 6 - 10\lambda \end{pmatrix}.$$

Determinant této matice je $\lambda^2 - 1$, jehož kořeny jsou 1, -1. Máme

$$\text{Ker}(R - 1S) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

a

$$\text{Ker}(R + 1S) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

Znormováním (vzhledem ke g !) získáme g -ortonormální, f -ortogonální bázi stejnou jako u předchozího výpočtu.

10.4.5. *Analýza roviného útvaru.* Budeme analyzovat následující útvar v \mathbb{R}^2 :

$$U = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 10x_1 - 14x_2 + 7 = 0\}$$

Výraz z definice je součtem kvadratické formy $f_2((x_1, x_2)^T) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$, lineární formy $h((x_1, x_2)^T) = -10x_1 - 14x_2$ a konstanty 7.

Najdeme nejprve ortonormální f -ortogonální bázi \mathbb{R}^2 , kde f je symetrická bilineární příslušná f_2 :

$$[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla matice $[f]_{K_2}$ jsou 2 a 4 a příslušné znormované vlastní vektory jsou $\frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1)$ a $\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)$. Hledaná báze B a je tedy

$$B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Vyjádříme útvar U v bázi B . Matice f vzhledem k bázi B je $\text{diag}(2, 4)$, matice lineární formy h vzhledem k B je

$$[h]_{K_1}^B = [h]_{K_1}^{K_2} [\text{id}]_{K_2}^B = (-10, -14) \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}(2, -12) ,$$

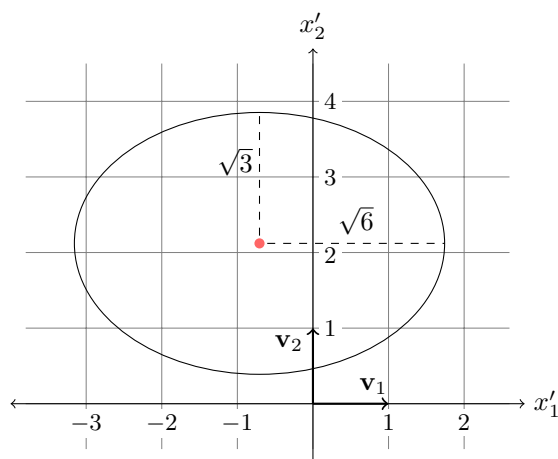
takže U má vzhledem k B vyjádření

$$[U]_B = \{(x'_1, x'_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 2(x'_1)^2 + 4(x'_2)^2 + 2\sqrt{2}x'_1 - 12\sqrt{2}x'_2 + 7 = 0\} .$$

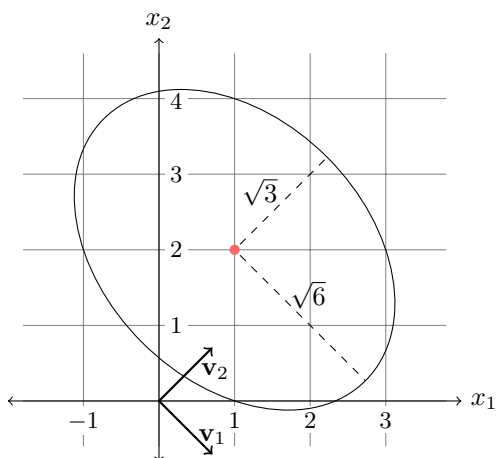
Doplněním na čtverce a drobnými úpravami získáme

$$\begin{aligned} [U]_B &= \left\{ (x'_1, x'_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 2 \left(x'_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 4 \left(x'_2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 12 \right\} \\ &= \left\{ (x'_1, x'_2)^T \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x'_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{6}} \right)^2 + \left(\frac{x'_2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}} \right)^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

Z toho vidíme, že vzhledem k B je útvar elipsa se středem $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})^T$ a velikostmi poloos $\sqrt{6}$ a $\sqrt{3}$.



Přepočteme střed do původních souřadnic: $-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{v}_2 = (1, 2)^T$. Vidíme, že U je elipsa se středem v bodě $(1, 2)^T$, hlavní poloosou ve směru $\langle \mathbf{v}_1 \rangle$ a velikostí $\sqrt{6}$ a vedlejší poloosou ve směru $\langle \mathbf{v}_2 \rangle$ a velikostí $\sqrt{3}$.



Jednodušším způsobem lze tento útvar a podobné útvary analyzovat užitím projektivních prostorů, to se naučíme v kapitole ??.

Cvičení

1. Jednoznačná korespondence matic a BF
2. o char 2
3. rozklad na sym a antisym jako direktní součet
4. vlastnosti doplnku
5. dokončit důkaz věty o OG doplnku
6. symetrickými úpravami lze převést na diagonální
7. Sylvester pro negativně definitní
8. společná diagonalizace nejde bez pozitivní definitnosti ?

11. AFINNÍ PROSTORY

Cíl.

V této kapitole se začneme blíže zabírat geometrií. Zkoumanými objekty jsou množiny *bodů*, například množina bodů v prostoru, a množiny *vektorů*. Vektory si představujeme jako „šipky“ určené dvěma body, přičemž dva vektory považujeme za stejné, pokud se liší jenom umístěním. S vektory můžeme provádět známé operace sčítání a násobení skalárem. Další přirozenou geometrickou operací je přičtení bodu a vektoru. To provedeme umístěním počátku vektoru do daného bodu, výsledkem je koncový bod.

OBRAZEK (přičtení bodu a vektoru)

Tento pohled je přirozenější lidskému vnímání. Prostor se skládá z bodů a bod je tedy základním objektem, vektor je pojem odvozený. Doposud jsme tento nedostatek řešili tak, že jsme si v prostoru zvolili počátek a vektory umísťovali do počátku. Bod jsme pak ztotožňovali s jeho polohovým vektorem. Tento pohled má několik nedostatků. Jedním z nich je, že prostor nemá apriori žádný význačný bod, takže volba nějakého počátku je nepřirozená. Podstatnější nevýhoda vynikne, když si připomeneme, že lineární algebru lze chápat jako studium „rovných“ útvarů (přímky, roviny, atd.) a „rovných“ zobrazení mezi nimi. Odpovídající objekty ve vektorových prostorech jsou podprostory a lineární zobrazení. Podprostory ale nepopisují všechny rovné útvary, pouze rovné útvary *procházející počátkem*, i když jiné rovné útvary se přirozeně objevily, například jako množiny řešení nehomogenní soustavy rovnic. Podobně, lineární zobrazení popisují jen rovná zobrazení *zachovávající počátek*, tedy například žádné posunutí o nenulový vektor nebylo objektem studia.

Nyní tedy začneme rozlišovat body a vektory. V další kapitole pak nahlédneme, že body a vektory lze vlastně chápat jako různé instance stejného geometrického objektu, a tím se poněkud paradoxně vrátíme ke studiu rovných útvarů pouze pomocí vektorů. Tento pohled nám přinese řadu výhod.

V celé kapitole budeme pracovat výhradně s prostory konečné dimenze, které jsou bližší geometrickému náhledu. Řada pojmů a tvrzení se přirozeně přenáší na prostory, které nejsou konečně generované.

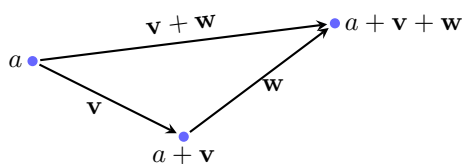
11.1. Definice afinního prostoru. Jak jsme předeslali v úvodu, afinní prostor je tvořen množinou bodů a množinou vektorů. Na množině vektorů máme operace sčítání a násobení skalárem, které mají všechny doposud používané vlastnosti, tedy množina vektorů tvoří spolu s těmito operacemi vektorový prostor. Přibude operace sčítání bodu a vektoru. Požadované axiomy jsou opět ve shodě s geometrickou představou.

Definice 11.1. Necht \mathbf{T} je těleso. Afinním prostorem \mathbf{A} nad \mathbf{T} rozumíme množinu A , jejíž prvky nazýváme *body*, spolu s vektorovým prostorem \mathbf{V} nad \mathbf{T} a operací $+$: $A \times V \rightarrow A$, která bodu $a \in A$ a vektoru $\mathbf{v} \in V$ přiřadí bod $a + \mathbf{v} \in A$, splňující axiomy:

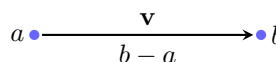
$$(aS2) \text{ Pro libovolný bod } a \in A \text{ a libovolné vektory } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \text{ platí } a + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (a + \mathbf{v}) + \mathbf{w}.$$

$$(aS1) \text{ Pro libovolný bod } a \in A \text{ platí } a + \mathbf{o} = a.$$

$$(aM) \text{ Ke každé dvojici bodů } a, b \in A \text{ existuje právě jeden vektor } \mathbf{v} \in V, \text{ pro který } a + \mathbf{v} = b. \text{ Tento vektor značíme } b - a.$$



Axiom (aS2)



Axiom (aM)

Sčítat můžeme dva vektory a bod s vektorem. Sčítání dvou bodů nedává (zatím) žádný geometrický smysl. Pro body budeme používat stejně jako v definici malá písmena abecedy. Z axiomu (aS2) vidíme, že ve výrazech tvaru $a + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n$ nemusíme psát závorky. Při popisu afinního prostoru \mathbf{A} budeme většinou zdůrazňovat jen množinu bodů A s tím, že vektorový prostor a sčítání je zřejmé z kontextu. Vektorový prostor \mathbf{V} budeme někdy nazývat *prostor vektorů* afinního prostoru \mathbf{A} .

Pokud v afinním prostoru zvolíme nějaký bod $a \in A$, pak každému bodu $b \in A$ můžeme podle (aM) přiřadit vektor $b - a$ a naopak, každému vektoru \mathbf{v} můžeme přiřadit bod $a + \mathbf{v}$. Jak se snadno ověří (cvičení), tato zobrazení jsou navzájem inverzní bijekce bodů a vektorů (bijekce nejsou přirozené, závisí na volbě bodu a). V tomto smyslu si body a vektory vzájemně jednoznačně odpovídají, proto například dává smysl mluvit o dimenzi afinního prostoru.

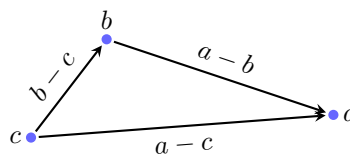
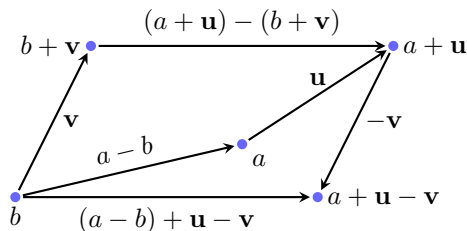
Definice 11.2. *Dimenzí* afinního prostoru \mathbf{A} rozumíme dimenzi jeho prostoru vektorů.

Afinní prostor dimenze 0 tvoří jediný bod $A = \{a\}$. Afinní prostor dimenze 1 nazýváme *afinní přímkou*, nebo jen *přímka*, afinní prostor dimenze 2 nazýváme *afinní rovinou*, nebo jen *rovina*.

Mechanickým cvičením jsou následující vlastnosti operací, které platí pro libovolné body $a, b, c, d \in A$ a vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Geometrický význam je jasný z obrázku.

- $a - b = -(b - a)$
- $(a + \mathbf{u}) - (b + \mathbf{v}) = (a - b) + \mathbf{u} - \mathbf{v}$
- $(a - b) + (c - d) = (a - d) + (c - b)$
- $(a - b) + (b - c) = a - c$

Tyto a podobné vlastnosti budou podrobněji diskutovány v části o lineárních kombinacích bodů.



Příklady. Pro libovolný vektorový prostor \mathbf{V} tvoří $A = V$ spolu se sčítáním ve \mathbf{V} afinní prostor. Množiny bodů a vektorů jsou tedy stejné, rozdíl je jen v pohledu – na prvky A se díváme jako na body, na prvky V jako na vektory. Rozdílný bude také například pojem podprostoru, jak jsme diskutovali v úvodu. Speciálně pro $\mathbf{V} = \mathbf{T}^n$

dostáváme *aritmický afinní prostor*. Budeme jej značit stejně jako aritmetický vektorový prostor, tj. \mathbf{T}^n , jeho dimenze je n .

Trochu jiným příkladem je

$$A = (1, 2, 3)^T + \langle (2, 3, 4)^T, (6, 7, 8)^T \rangle, \quad V = \langle (2, 3, 4)^T, (6, 7, 8)^T \rangle .$$

Vektorový prostor \mathbf{V} je podprostor \mathbb{R}^3 generovaný vektory $(2, 3, 4)^T$ a $(6, 7, 8)^T$ a A je rovina v \mathbb{R}^3 se „směrem“ \mathbf{V} procházející bodem $(1, 2, 3)^T$. (Sčítání bodu a vektoru probíhá po složkách.) V tomto případě A není vektorovým podprostorem \mathbb{R}^3 . Bod v A můžeme sečíst s vektorem ve V , ale součet dvou bodů, pokud bychom ho počítali jako v \mathbb{R}^3 , v A obecně neleží. Toto je příklad podprostoru afinního prostoru \mathbb{R}^3 . Jeho dimenze je 2, je to afinní rovina.

Obecněji, pro libovolný afinní prostor \mathbf{A} s prostorem směrů \mathbf{V} je každá množina bodů tvaru $a+W$, kde $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ se zděděnými operacemi afinní prostor, jehož prostor směrů je \mathbf{W} . Tento prostor je podprostorem \mathbf{A} . Takové podprostory aritmetických prostorů vznikají například při řešení soustavy lineárních rovnic. Podrobněji se podprostory budeme zabývat zanedlouho, zatím jsme ani přesně nepopsali, co je podprostor. Vystačíme s intuitivní představou.

Chceme-li ještě pracovat s metrickými vlastnostmi, jako velikosti vektorů, vzdálenosti bodů, atd., potřebujeme na \mathbf{V} mít ještě dán skalární součin. V tomto případě musí být $\mathbf{T} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbf{T} = \mathbb{C}$.

Definice 11.3. *Afinním eukleidovským prostorem* (resp. *afinním unitárním prostorem*) rozumíme afinní prostor \mathbf{A} nad tělesem \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) spolu se skalárním součinem $\langle | \rangle$ na jeho prostoru vektorů.

Nejjednodušším příkladem afinního eukleidovského prostoru je \mathbb{R}^n se standardním skalárním součinem. Nejjednodušším příkladem afinního unitárního prostoru je \mathbb{C}^n se standardním skalárním součinem. V této kapitole budeme uvažovat pouze afinní prostory a afinní eukleidovské prostory. Přímocharé rozšíření na komplexní případ si čtenář může rozmyslet sám.

Již víme, co pro afinním eukleidovský prostor znamená velikost vektoru, úhel dvou vektorů, kolmost, apod. Vzdálenost bodů definujeme opět ve shodě s intuicí.

Definice 11.4. Vzdáleností dvou bodů $a, b \in A$ v afinním eukleidovském prostoru \mathbf{A} rozumíme číslo $\|a - b\|$.

11.1.1. *Soustava souřadnic.* Na bázi vektorového prostoru lze nazírat jako na jeho soustavu souřadnic – zvolíme-li bázi, můžeme vektory vyjadřovat jako n -tice skalárů (prvky \mathbf{T}^n) a počítat s nimi jako v \mathbf{T}^n (viz oddíl 5.4.3). Soustava souřadnic v afinním prostoru má podobnou roli. Sestává z bodu, tzv. počátku soustavy souřadnic, a n -tice vektorů, které si představujeme umístěné do počátku. Máme-li zadanou soustavu, můžeme přirozeným způsobem vyjadřovat body i vektory jako n -tice prvků tělesa a počítání pak probíhá jako v aritmetickém afinním prostoru \mathbf{T}^n .

Definice 11.5. *Soustavou souřadnic* v afinním prostoru \mathbf{A} dimenze n s prostorem vektorů \mathbf{V} rozumíme $(n+1)$ -tici $S = (a, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$, kde $a \in A$ je bod nazývaný *počátek soustavy souřadnic* a $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je báze \mathbf{V} .

Je-li S soustava souřadnic jako výše, $b \in A$ je bod a $\mathbf{w} \in V$ je vektor, pak *souřadnice vektoru \mathbf{w} v soustavě souřadnic S* definujeme jako souřadnice \mathbf{w} vzhledem k bázi B a značíme $[\mathbf{w}]_S$, tj.

$$[\mathbf{w}]_S = [\mathbf{w}]_B$$

a souřadnice bodu b v soustavě souřadnic S definujeme jako souřadnice vektoru $b - a$ v bázi B , tj.

$$[b]_S = [b - a]_S = [b - a]_B .$$

Souřadnice bodu jsou definovány ve shodě s geometrickou intuicí. To je možná ještě lépe vidět s následujícího přeformulování definice: Souřadnice bodu b v soustavě S je rovno té jednoznačně určené n -tici prvků $(t_1, \dots, t_n) \in T^n$, pro kterou platí

$$b = a + t_1 \mathbf{u}_1 + \dots + t_n \mathbf{u}_n .$$

OBRAZEK

Souřadnice počátku a vzhledem k S jsou $[a]_S = (0, 0, \dots, 0)^T$ a $[a + \mathbf{u}_i]_S = \mathbf{e}_i$.

Příklad 11.6. V aritmetickém afinním prostoru \mathbb{R}^3 je

$$S = (a, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \left(\left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -2 \\ -1 \end{array} \right) \right)$$

soustava souřadnic, protože $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ je bázi aritmetického vektorového prostoru \mathbb{R}^2 . Určíme souřadnice vektoru $\mathbf{w} = (-1, 3)^T$ a bodu $b = (-1, 3)^T$ v S . K tomu potřebujeme nalézt vyjádření vektoru $(-1, 3)^T$ a vektoru $(-1, 3)^T - (3, 2)^T = (-4, 1)^T$ v bázi $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. To vede na řešení dvou soustav rovnic se stejnou maticí. Vyřešíme je současně.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

Z toho dopočteme řešení

$$[\mathbf{w}]_S = \left(\begin{array}{c} 7 \\ 4 \end{array} \right), \quad [b]_S = \left(\begin{array}{c} 6 \\ 5 \end{array} \right) .$$

Pro kontrolu můžeme ověřit, že skutečně $\mathbf{w} = 7\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2$ a $b = a + 6\mathbf{u}_1 + 5\mathbf{u}_2$.

Příklad 11.7. V aritmetických afinních prostorech máme význačnou soustavu souřadnic, budeme jí nazývat *kanonická*:

$$S = ((0, 0, \dots, 0)^T, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) .$$

Je charakterizovaná tím, že $[a]_S = a$ a $[\mathbf{w}]_S = \mathbf{w}$ pro libovolné bod a a libovolný vektor \mathbf{w} .

V afinním eukleidovském prostoru jsou „nejlepší“ soustavy souřadnic kartézské.

Definice 11.8. Soustava souřadnic $S = (a, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ v afinním eukleidovském prostoru se nazývá *kartézská*, pokud $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je ortonormální báze.

V kartézské soustavě souřadnic jsou tedy vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ jednotkové a navzájem kolmé. V aritmetickém afinním prostoru se standardním skalárním součinem (budeme mu říkat aritmetický afinní eukleidovský prostor) je kanonická soustava souřadnic kartézská.

Volba soustavy souřadnic převádí počítání v afinním prostoru na počítání v aritmetickém vektorovém prostoru, podobně jako báze pro vektorové prostory (viz tvrzení 5.64). Je-li prostor afinní eukleidovský, tak v kartézské soustavě souřadnic se skalární součin převádí na standardní (viz TODO).

Tvrzení 11.9. *Je-li S soustava souřadnic afinního prostoru \mathbf{A} s prostorem vektorů \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} , pak pro libovolné $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, $b, c \in A$, $t \in T$ platí*

$$[\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2]_S = [\mathbf{v}_1]_S + [\mathbf{v}_2]_S, \quad [t\mathbf{v}_1]_S = t[\mathbf{v}_1]_S, \quad [b + \mathbf{v}_1]_S = [b]_S + [\mathbf{v}_1]_S, \quad [b - c]_S = [b]_S - [c]_S .$$

Je-li navíc \mathbf{A} afinní eukleidovský prostor a soustava S je kartézská, pak

$$\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle = [\mathbf{v}_1]_S \cdot [\mathbf{v}_2]_S .$$

Důkaz. cviceni □

Nyní spočítáme, jak se změní souřadnice bodů a vektorů při změně soustavy souřadnic. Uvažujme dvě soustavy $S = (a, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ a $S' = (a', \mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n)$. Označme X matici přechodu od báze $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ k bázi $B' = (\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n)$. Přepočítávat souřadnice vektorů už umíme: pro libovolný vektor $\mathbf{v} \in V$ máme

$$[\mathbf{v}]_{S'} = X[\mathbf{v}]_S .$$

Pro bod $b \in A$ využijeme vztahu $b - a' = (b - a) + (a - a')$ a dostaneme

$$[b]_{S'} = [b - a']_{S'} = [b - a]_{S'} + [a - a']_{S'} = X[b - a]_S + [a - a']_{S'} = X[b]_S + [a]_{S'} .$$

Shrneme výsledek do pozorování.

Pozorování 11.10. *Nechť $S = (a, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ a $S' = (a', \mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n)$ jsou soustavy souřadnic v afinním prostoru \mathbf{A} s prostorem vektorů \mathbf{V} a X je matice přechodu od $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ k $(\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n)$. Pak pro každé $b \in A$, $\mathbf{v} \in V$ platí*

$$[\mathbf{v}]_{S'} = X[\mathbf{v}]_S, \quad [b]_{S'} = X[b]_S + [a]_{S'} .$$

Příklad 11.11. Ilustrujeme přechodové vztahy na soustavách souřadnic S, S' aritmetického vektorového prostoru \mathbb{R}^2 .

$$S = (a, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \left(\left(\begin{array}{c} -4 \\ 5 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -7 \\ 14 \end{array} \right) \right) \quad S' = (a', \mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2) = \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -2 \\ 3 \end{array} \right) \right),$$

Najdeme matici přechodu X od báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ k bázi $B' = (\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2)$.

$$[\text{id}]_{B'}^B = [\text{id}]_{B'}^{K_2} [\text{id}]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Najdeme ještě $[a]_{S'} = [a - a']_{S'}$.

$$[a - a']_{S'} = \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_{S'} = [\text{id}]_{S'}^{K_2} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pro libovolný bod $b \in A$ nyní máme

$$[b]_{S'} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} [b]_S + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Abychom ještě lépe viděli tvar přechodových vztahů, označíme $[b]_S = (x, y)^T$ a $[b]_{S'} = (x', y')^T$ a vztahy přepíšeme.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y - 1 \\ -x + 4y + 2 \end{pmatrix}$$

Nové souřadnice jsou tedy lineární výrazy ve starých souřadnicích (tj. výrazy tvaru lineární forma + konstanta). Pro vektory dostaneme stejné výrazy bez konstantních členů.

11.2. Lineární kombinace bodů. Tvořit „lineární kombinace“ bodů nedává obecně žádný geometrický smysl, i když na některé smysluplné výrazy (např. vektor $b - a$ a bod $a + (b - a) = b$) lze nazírat jako na lineární kombinace.

Abychom nahlédli, že všem výrazům skutečně nelze dát v afinním prostoru geometrický smysl, podívejme se na výraz $a + b$, kde a, b jsou body nějakého afinního prostoru \mathbf{A} s prostorem vektorů \mathbf{V} . Přirozenou myšlenkou je zvolit v \mathbf{A} soustavu souřadnic S a definovat $a + b$ jako ten bod, jehož souřadnice vzhledem k S jsou $[a]_S + [b]_S$. Problém je, že výsledný bod závisí na volbě soustavy souřadnic. Například pro $\mathbf{A} = \mathbb{R}^2$, $a = (0, 0)^T$, $b = (1, 0)^T$ by vzhledem ke kanonické soustavě souřadnic vyšlo $a + b = (1, 0)^T$, ale vzhledem k soustavě souřadnic $S = ((2, 3)^T, (1, 0)^T, (0, -1)^T)$ bychom měli

$$[a]_S = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad [b]_S = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad [a + b]_S = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

takže $a + b = (2, 3)^T + -3(1, 0)^T + 6(0, -1)^T = (-1, -3)^T$. Ještě by nás mohlo napadnout, že $a + b$ je nějaký vektor, ale ani v tom případě bychom neuspěli – našli bychom dvě soustavy souřadnic, ve které se výsledky liší.

11.2.1. Afinní kombinace. Některým lineárním kombinacím ale smysl lze dát. Pokud bychom například počítali $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ stejným postupem vyšel by nám v obou případech stejný bod $(\frac{1}{2}, 0)^T$. Je to proto, že tento bod lze vyjádřit jako $a + \frac{1}{2}(b - a)$ ($= b + \frac{1}{2}(a - b)$) a tento výraz je definován – je to součet bodu a a $\frac{1}{2}$ -násobku vektoru $b - a$. Geometricky, je to střed úsečky a, b . Následující tvrzení zodpovídá přesně na otázku, kdy lze definovat bod jako lineární kombinace bodů.

Tvrzení 11.12. *Nechť \mathbf{A} je afinní prostor nad \mathbf{T} dimenze alespoň 1, $a_1, \dots, a_k \in A$ body a $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{T}$ skaláry. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) *Bod b o souřadnicích $[b]_S = \lambda_1[a_1]_S + \dots + \lambda_k[a_k]_S$ nezávisí na volbě soustavy souřadnic S .*
- (2) $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$.

Důkaz. Snazší je dokázat implikaci (2) \Rightarrow (1). Je-li $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$, stačí si uvědomit, že v libovolné soustavě souřadnic S díky podmínce této podmínce a tvrzení 11.9 o souřadnicích a operacích máme

$$\begin{aligned} \lambda_1[a_1]_S + \dots + \lambda_k[a_k]_S &= [a_1]_S + \lambda_2([a_2]_S - [a_1]_S) + \dots + \lambda_k([a_k]_S - [a_1]_S) \\ &= [a_1 + \lambda_2(a_2 - a_1) + \dots + \lambda_k(a_k - a_1)]_S \end{aligned}$$

Protože body jsou jednoznačně určeny svými souřadnicemi, bod b v (1) je nutně roven (korektně definovanému) bodu $a_1 + \lambda_2(a_2 - a_1) + \dots + \lambda_k(a_k - a_1)$, který samozřejmě na S nezávisí.

Důkaz opačné implikace je také v domácím úkolu, bude někdy doplněn. □

To nám umožňuje zavést afinní kombinaci bodů.

Definice 11.13. *Nechť \mathbf{A} je afinní prostor nad \mathbf{T} , $a_1, \dots, a_k \in A$ body a $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{T}$ skaláry takové, že $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$. Afinní kombinací bodů a_1, \dots, a_k s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ rozumíme bod $b \in A$ takový, že*

$$[b]_S = \lambda_1[a_1]_S + \dots + \lambda_k[a_k]_S$$

kde S je libovolná soustava souřadnic prostoru \mathbf{A} . Značíme $b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$.

Afinní kombinaci jsme zavedli pomocí (libovolně zvolené) soustavy souřadnic, přičemž definice dává smysl díky předchozímu tvrzení. Z důkazu tohoto tvrzení také plyne, že afinní kombinaci lze zavést bez volby soustavy, například vztahem

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = a_1 + \lambda_2(a_2 - a_1) + \cdots + \lambda_k(a_k - a_1) .$$

Tento výraz je ale poněkud nesymetrický.

Alternativní, symetrická definice a geometrický význam asi nejlépe vynikne z fyzikálního pohledu (i když ten můžeme uplatnit pouze pro reálné afinní prostory malých dimenzí a pouze pro afinní kombinace s nezápornými koeficienty). Afinní kombinaci $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ totiž můžeme chápat jako těžiště soustavy hmotných bodů a_1, \dots, a_k s hmotnostmi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. To je lépe vidět z následující charakterizace.

Tvrzení 11.14. *Nechť \mathbf{A} je afinní prostor nad \mathbf{T} , $a_1, \dots, a_k \in A$ body a $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in T$ skaláry takové, že $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$. Pak bod $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ je roven tomu jednoznačně určenému bodu b , pro který*

$$\lambda_1(a_1 - b) + \lambda_2(a_2 - b) + \cdots + \lambda_k(a_k - b) = \mathbf{o} .$$

Důkaz. V \mathbf{A} zvolíme libovolnou soustavu souřadnic S s počátkem $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$. Pak pro libovolný bod b jsou souřadnice vektoru na levé straně vzhledem k S rovny

$$\begin{aligned} [\lambda_1(a_1 - b) + \lambda_2(a_2 - b) + \cdots + \lambda_k(a_k - b)]_S &= [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k]_S \\ &\quad - [\lambda_1 b + \cdots + \lambda_k b]_S = -[b]_S \end{aligned}$$

(Používáme definici afinní kombinace a tvrzení 11.9 o počítání v souřadnicích.)

Vidíme, že vektor na levé straně je nulový právě tehdy, když $b = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$, což jsme měli dokázat. \square

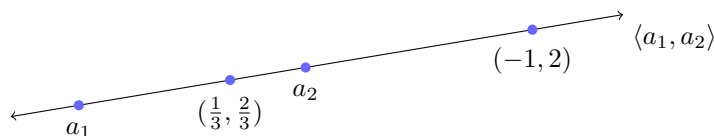
OBRAZEK (ruzné afin. kombinace dvou bodu, trojúhelník, 4.bod v rovnoběžníku)

11.2.2. *Barycentrické souřadnice.* Podíváme se blíže na afinní kombinace dvou bodů na afinní přímce. Mějme tedy afinní prostor \mathbf{A} s prostorem vektorů \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} , kde $\dim \mathbf{A} (= \dim \mathbf{V}) = 1$. Konkrétně například \mathbb{R} nebo podprostor \mathbb{R}^2 nebo \mathbb{R}^3 tvaru $A = c + \langle \mathbf{v} \rangle$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$.

Jsou-li $a, b \in A$ dva různé body, pak každý bod $c \in A$ lze vyjádřit právě jedním způsobem jako jejich afinní kombinace. Existenci takového vyjádření můžeme zdůvodnit například následujícím způsobem. Protože $b - a$ je nenulový vektor a $\dim \mathbf{V} = 1$, je každý vektor ve \mathbf{V} jeho násobkem. Existuje proto $\lambda \in \mathbf{T}$ takové, že $c - a = \lambda(b - a)$. Nyní můžeme psát $c = a + \lambda(b - a) = (1 - \lambda)a + \lambda b$. Jednoznačnost se nahlédne například z jednoznačnosti λ ve vyjádření $c - a = \lambda(b - a)$. Důkaz obecnějšího tvrzení provedeme za okamžik.

(Poslední rovnost jsme zdůvodnili výše. Podobné rovnosti můžeme dokazovat pomocí souřadnic. Například $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b) + (b - a) = a + \frac{3}{2}(b - a)$ platí, protože vyjádření obou stran v libovolně zvolené soustavě souřadnic S je rovno $-\frac{1}{2}[a]_S + \frac{3}{2}[b]_S$ díky tvrzení 11.9 o souřadnicích a operacích.)

Bod $c = \lambda_1 a + \lambda_2 b$ „dělí“ body a, b v poměru $\lambda_2 : \lambda_1$. Přesněji, $\lambda_1(c - a) = \lambda_2(b - c)$. Pokud \mathbf{A} je eukleidovský tak tento vztah znamená, že poměr „orientovaných vzdáleností“ c od a a c od b je $\lambda_2 : \lambda_1$, tj. v případě, že c leží na úsečce ab (ekvivalentně $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$) je poměr vzdáleností $\lambda_2 : \lambda_1$, v opačném případě je poměr vzdáleností $|\lambda_1| : |\lambda_2|$.



OBRÁZEK 20. Souřadnice dvou bodů vzhledem k barycentrické soustavě souřadnic (a_1, a_2) . Afinní obal $\langle a_1, a_2 \rangle$.

Příklad 11.15. Vyjádříme bod $c = (2, 3)^T \in \mathbb{R}^2$ jako afinní kombinaci bodů $a = (1, 2)^T$ a $b = (5, 6)^T$. Úloha dává smysl, protože všechny tři body leží na afinní přímce $(0, 1)^T + \langle (1, 1)^T \rangle$.

Srovnáním prvních složek ve vztahu $c = \lambda_1 a + \lambda_2 b$ získáme $\lambda_1 + 5\lambda_2 = 2$, což spolu s $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ dává $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}$. Tedy $c = \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b$. Skutečně, bod c dělí body a, b v poměru $\frac{1}{4} : \frac{3}{4} = 1 : 3$. Fyzikální interpretace je taková, že má-li bod a hmotnost $\frac{3}{4}$ a bod b hmotnost $\frac{1}{4}$, pak je jejich těžištěm bod c .

Dvojice (λ_1, λ_2) tvoří tzv. *barycentrické souřadnice* bodu c vzhledem k (a, b) . Vyjadřují, jakým způsobem musíme body a, b zatížit, aby jejich těžištěm byl bod c . Podobným způsobem lze definovat barycentrické souřadnice bodu v rovině vzhledem ke třem bodům neležících na jedné přímce, apod.

Tvrzení 11.16. *Nechť \mathbf{A} je afinní prostor dimenze n s prostorem vektorů \mathbf{V} a $a_1, \dots, a_k \in A$ jsou body. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) Každý bod $b \in A$ lze jednoznačným způsobem zapsat jako afinní kombinaci bodů a_1, \dots, a_k .
- (2) Posloupnost vektorů $(a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_k - a_1)$ tvoří bázi prostoru \mathbf{V} (speciálně $k = n + 1$).

Důkaz. K důkazu obou implikací si všimneme, že pro libovolný bod $b \in A$ a skaláry $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ vztah

$$b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k,$$

platí právě tehdy, když platí vztah

$$b - a_1 = \lambda_2(a_2 - a_1) + \lambda_3(a_3 - a_1) + \dots + \lambda_k(a_k - a_1).$$

(1) \Rightarrow (2). Pro libovolný vektor \mathbf{v} najdeme vyjádření bodu $b = a_1 + \mathbf{v}$ jako afinní kombinaci bodů a_1, \dots, a_k a druhá ekvivalentní rovnost nám dává vyjádření vektoru $b - a_1 = \mathbf{v}$ jako lineární kombinaci vektorů $a_2 - a_1, \dots, a_k - a_1$. To dokazuje, že posloupnost generuje \mathbf{V} . Je-li $\mathbf{o} = \lambda_2(a_2 - a_1) + \dots + \lambda_k(a_k - a_1)$ netriviální lineární kombinace a položíme-li $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_k$, $b = a_1$ dostáváme z první rovnosti vyjádření bodu $b = a_1$ jako afinní kombinaci bodů a_1, \dots, a_k rozdílnou od $a_1 = 1a_1 + 0a_2 + \dots + 0a_k$. Tento spor dokazuje, že posloupnost $(a_2 - a_1, \dots, a_k - a_1)$ je lineárně nezávislá, takže je to báze.

(2) \Rightarrow (1). Důkaz je rovněž přímočarý užitím výše uvedené ekvivalence. \square

První podmínka nezávisí na pořadí bodů a_1, \dots, a_k , tedy lineární nezávislost posloupnosti v druhé části rovněž nezávisí na pořadí těchto bodů. Jako cvičení dokažte toto pozorování přímo.

Jsou-li splněny ekvivalentní podmínky v tvrzení, říkáme, že $Z = (a_1, \dots, a_{n+1})$ je *barycentrická soustava souřadnic* prostoru \mathbf{A} a $(n+1)$ -tici koeficientů $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})^T$

ve vyjádření bodu $b \in A$ jako afinní kombinaci $b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n+1} a_{n+1}$ nazýváme *barycentrické souřadnice bodu b* vzhledem k Z . Barycentrické souřadnice můžeme použít například k lineární interpolaci funkcí, viz cvičení.

Podle tvrzení je $Z = (a_1, \dots, a_{n+1})$ barycentrická soustava souřadnic právě tehdy, když je $S = (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_{n+1} - a_1)$ soustava souřadnic prostoru \mathbf{A} . V důkazu jsme si všimli, že pokud známe souřadnice bodu b vzhledem k S , řekněme $[b]_S = (\lambda_2, \dots, \lambda_{n+1})^T$, pak snadno spočítáme barycentrické souřadnice bodu b : $(1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_k, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1})$.

Příklad 11.17. V afinním prostoru \mathbb{R}^2 vyjádříme b v barycentrické soustavě souřadnic (a_1, a_2, a_3) .

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Protože vektory $a_2 - a_1 = (6, -6)^T$ a $a_3 - a_1 = (-8, -12)^T$ jsou lineárně nezávislé, posloupnost (a_1, a_2, a_3) je skutečně barycentrickou soustavou souřadnic. Hledáme $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ takové, že $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$ a $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Přepsáním do složek dostaneme soustavu tří rovnic o třech neznámých. Druhou možností je vypočítat $[b]_S = (\lambda_2, \lambda_3)^T$, kde $S = (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_1)$, a dopočítat λ_1 . Zvolíme druhou alternativu. Dostáváme soustavu

$$(a_2 - a_1 | a_3 - a_1 | b - a_1) = \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -8 & -2 \\ -6 & -12 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -8 & -2 \\ 0 & -20 & -10 \end{array} \right)$$

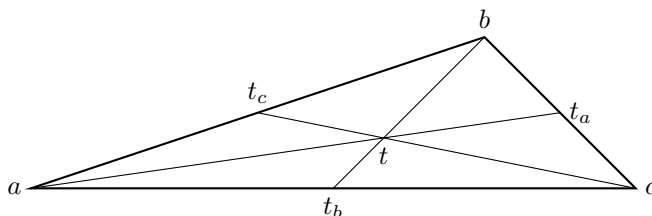
Vychází $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ a $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 = \frac{1}{6}$. Barycentrické souřadnice bodu b vzhledem k (a_1, a_2, a_3) jsou tedy $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})^T$.

11.2.3. Afinní kombinace pomocí dvojic. Afinní kombinaci více bodů v afinním prostoru \mathbf{A} nad \mathbf{T} lze, v případě, že charakteristika \mathbf{T} není 2, získat pomocí afinních kombinací dvojic. Například pro $\mathbf{T} = \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ můžeme psát

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = (\lambda_1 + \lambda_2) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} a + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} b \right) + \lambda_3 c .$$

Výraz v závorce je afinní kombinací bodů a, b a celkově se jedná o afinní kombinaci této kombinace a bodu c , celý výraz tedy dává smysl. Fyzikální interpretace je taková, že těžiště soustavy hmotných bodů a, b, c s hmotnostmi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ můžeme určit tak, že nejprve určíme těžiště hmotných bodů a, b a pak těžiště výsledného bodu (o hmotnosti $\lambda_1 + \lambda_2$) a bodu c .

Uvažujme nyní konkrétní konkrétnější situaci trojice bodů a, b, c v reálné afinní rovině, které neleží na jedné přímce a položíme $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$. Bod $t = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$ je těžištěm trojúhelníka s vrcholy a, b, c . Označíme-li $t_c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, tj. t_c je střed úsečky ab (co je úsečka jde formálně definovat pomocí konvexních kombinací diskutovaných níže). Podle vyjádření v předchozím odstavci máme $t = \frac{2}{3}t_c + \frac{1}{3}c$, tj. t leží na úsečce ct_c (těžnice) a tuto úsečku dělí v poměru 2 : 1. Podobně se ukáže, že t leží na úsečkách at_a a bt_b (kde t_a a t_b jsou středy stran bc a ac) a dělí tyto úsečky ve stejném poměru 2 : 1. Přírozeným způsobem jsme mimochodem nahlédli, že úsečky spojující vrcholy a středy protilehlých stran se protínají v jednom bodě a tento bod je děl v poměru 2 : 1! Podobným způsobem lze dokázat řadu podobných geometrických poznatků (viz cvičení).



11.2.4. *Konvexní kombinace.* Krátkou neformální poznámku věnujeme tzv. konvexním kombinacím v reálných afinních prostorech. Afinní kombinace $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$ se nazývá *konvexní*, pokud jsou všechny koeficienty nezáporné (a tím pádem také menší než 1). Konvexní kombinace souvisí s konvexními útvary. Množinu bodů nazveme *konvexní*, pokud s každými dvěma body obsahuje celou úsečku, která je spojuje. Není těžké ukázat, že každá konvexní množina je uzavřená na konvexní kombinace (cvičení).

Množina všech konvexních kombinací daných bodů a_1, \dots, a_k je proto nejmenším konvexním množinou obsahující tyto body. Této množině říkáme *konvexní obal*. Rozmyslete si, že konvexním obalem dvojice bodů a, b jsou právě body ležící na úsečce ab a že konvexním obalem trojice bodů a, b, c je trojúhelník (i se svým vnitřkem) s vrcholy a, b, c . Naopak, tento geometrický názor můžeme využít k formální definici úsečky ab jako konvexního obalu bodů a, b .

Příklad 11.18. Ukážeme, jak lze barycentrické souřadnice použít při zjišťování zda daný bod leží uvnitř daného trojúhelníka.

V příkladu 11.17 jsme zjistili, že barycentrické souřadnice bodu $b = (0, -1)^T$ vzhledem k $(a_1, a_2, a_3) = ((2, 7)^T, (8, 1)^T, (-6, -5)^T)$ jsou $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Bod b je tedy afinní kombinací bodů (a_1, a_2, a_3) s kladnými koeficienty, proto leží uvnitř trojúhelníka s vrcholy a_1, a_2, a_3 .

Konvexní množiny vznikají například při řešení soustavy lineárních nerovnic. Řešení takových soustav se týká řada důležitých teoretických i praktických problémů. TODO MORE BLAH BLAHS

11.2.5. *Lineární kombinace odpovídající vektorům.* V tvrzení 11.12 jsme ukázali, kdy lineární kombinace bodů určuje **bod** nezávisle na volbě soustavy souřadnic, a to nám umožnilo definovat afinní kombinaci bodů. Výraz $b - a$ napovídá, kdy lze lineární kombinaci bodů smysluplně interpretovat jako **vektor**.

Tvrzení 11.19. *Nechť \mathbf{A} je afinní prostor nad \mathbf{T} , $a_1, \dots, a_k \in A$ body a $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{T}$ skaláry. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) *Vektor \mathbf{v} o souřadnicích $[\mathbf{v}]_S = \lambda_1 [a_1]_S + \dots + \lambda_k [a_k]_S$ nezávisí na volbě soustavy souřadnic S .*
- (2) $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$.

Důkaz. Důkaz je obdobný jako u tvrzení 11.12 a přenecháme jej do cvičení. \square

Podobně jako u afinním kombinací nyní můžeme v případě, že $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$, definovat vektor $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$ předpisem

$$[\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k]_S = \lambda_1 [a_1]_S + \dots + \lambda_k [a_k]_S$$

kde S je libovolná soustava souřadnic prostoru \mathbf{A} , nebo například vztahem

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \lambda_2 (a_2 - a_1) + \dots + \lambda_k (a_k - a_1) .$$

Obecněji, pro libovolný bod $b \in A$ platí

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = \lambda_1(a_1 - b) + \lambda_2(a_2 - b) + \cdots + \lambda_k(a_k - b) .$$

11.3. Podprostory. Podprostory afinních prostorů definujeme analogicky jako podprostory vektorových prostorů.

Definice 11.20. Necht \mathbf{A} je afinní prostor nad tělesem \mathbf{T} s prostorem vektorů \mathbf{V} . Afinní prostor \mathbf{B} nad tělesem \mathbf{T} s prostorem vektorů \mathbf{W} se nazývá (*afinní*) *podprostor prostoru \mathbf{A}* , pokud $B \subseteq A$, $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ a sčítání bodu a vektoru v \mathbf{B} je zúžením sčítání bodu a vektoru v \mathbf{A} .

Je-li \mathbf{A} afinní eukleidovský prostor pak \mathbf{B} nazýváme (*afinním eukleidovským*) *podprostorem \mathbf{A}* , pokud je \mathbf{B} afinním podprostorem \mathbf{A} a navíc je skalární součin v \mathbf{B} zúžením skalárního součinu v \mathbf{A} .

Již jsme se setkali s jedním typem podprostorů: Pro libovolný bod $a \in A$ a (vektorový) podprostor $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ tvoří množina bodů $a + W$ (spolu se sčítáním zděděným z \mathbf{A}) afinní podprostor prostoru \mathbf{A} , jehož prostor vektorů je \mathbf{W} . Následující tvrzení ukazuje, že takto získáme všechny podprostory.

Tvrzení 11.21. *Necht \mathbf{A} je afinní prostor nad tělesem \mathbf{T} s prostorem vektorů \mathbf{V} a \mathbf{B} je jeho podprostor s prostorem vektorů \mathbf{W} . Pak pro libovolný bod $b \in B$ platí $B = b + W$. Navíc platí $W = \{c - b : c \in B\} = \{d - c : c, d \in B\}$.*

Poznámka: Sčítání bodu z b a vektoru z W můžeme provádět v libovolném z prostorů \mathbf{A} nebo \mathbf{B} , protože se podle definice shodují. Tím pádem se rovněž shoduje odčítání: Jsou-li $c, d \in B$ dva body v \mathbf{B} , pak vektor $c - d$ ve \mathbf{W} je definován jako ten jednoznačně určený vektor $\mathbf{w} \in W$, pro který platí $d + \mathbf{w} = c$. Protože sčítání v \mathbf{A} a \mathbf{B} se shodují, vztah $d + \mathbf{w} = c$ platí i v \mathbf{A} , takže $d - c = \mathbf{w}$ v \mathbf{A} podle definice odčítání v \mathbf{A} . Shodují se také jakékoliv další operace, které jsou odvozené z operací afinního prostoru, například afinní kombinace.

Důkaz. Pro libovolný vektor $\mathbf{w} \in W$ platí $b + \mathbf{w} \in B$, protože B je uzavřená na sčítání bodu a vektoru. Proto platí $b + W \subseteq B$. Naopak, pro libovolný bod $c \in B$ máme $c - b \in W$, takže $c = b + (c - b) \in b + W$, což dokazuje opačnou inkluzi.

Dodatek je rovněž snadný, plyne například z korespondence bodů a vektorů diskutované za definicí afinního prostoru. \square

Příklad 11.22. Podprostory afinního prostoru \mathbb{R}^3 jsou čtyř typů:

- body, tj. podprostory tvaru $B = b + W$, $\dim(\mathbf{W}) = 0$, čili $W = \{\mathbf{o}\}$ a $B = \{b\}$;
- přímky, tj. podprostory tvaru $B = b + W$, $\dim(\mathbf{W}) = 1$, čili $W = \langle \mathbf{v} \rangle$, kde $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, a $B = b + \langle \mathbf{v} \rangle$
- roviny, tj. podprostory tvaru $B = b + W$, $\dim(\mathbf{W}) = 2$, čili $W = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, kde (\mathbf{v}, \mathbf{w}) je lineárně nezávislá posloupnost, a $B = b + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
- celý prostor $B = \mathbb{R}^3$

Zavedli jsme názvy pro prostory dimenze 0 (body), 1 (přímky) a 2 (roviny). Ještě se používá pojem *nadrovina*, to je podprostor dimenze $n - 1$ v prostoru dimenze n . Například nadroviny v \mathbb{R}^1 jsou body, nadroviny v \mathbb{R}^2 jsou přímky a nadroviny v \mathbb{R}^3 jsou roviny.

Podle tvrzení je prostor vektorů \mathbf{W} podprostoru \mathbf{B} prostoru \mathbf{A} jednoznačně určen množinou bodů B , protože W je množina všech rozdílů bodů v B (jeden z bodů

můžeme libovolně zafixovat). Proto při zadávání podprostoru často uvádíme jenom množinu bodů B a říkáme, že B je podprostor \mathbf{A} .

K tomu, aby neprázdná množina $B \subseteq A$ byla podprostorem afinního prostoru \mathbf{A} je nutné a stačí, aby množina vektorů $W = \{c - b : c \in B\}$ (kde $b \in B$ je libovolný bod) tvořila podprostor vektorového prostoru \mathbf{V} . Podprostory lze také charakterizovat jako množiny bodů uzavřené na afinní kombinace.

Tvrzení 11.23. *Nechť \mathbf{A} je afinní prostor a $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$. Pak B je podprostorem \mathbf{A} právě tehdy, když každá afinní kombinace bodů z B leží v B .*

Důkaz. Je-li \mathbf{B} podprostorem afinního prostoru \mathbf{A} , pak triviálně každá afinní kombinace bodů z B leží v B .

Předpokládejme naopak, že každá afinní kombinace bodů z B leží v B a zvolme libovolný bod $b \in B$. Je potřeba ukázat, že množina $W = \{c - b : c \in B\}$ je podprostorem prostoru vektorů \mathbf{V} afinního prostoru \mathbf{A} . K tomu je potřeba ověřit, že W je uzavřená na sčítání a násobení skalárem. Jsou-li c, c' dva body z B , pak

$$(c - b) + (c' - b) = (c + c' - b) - b ,$$

kde $c + c' - b$ je afinní kombinací bodů z B , která v B podle předpokladu leží, takže $(c - b) + (c' - b) \in W$ a množina W je proto uzavřená na sčítání. Je-li $c \in B$ a $t \in T$, pak

$$t(c - b) = (tc + (1 - t)b) - b .$$

Závorka na pravé straně je opět afinní kombinace bodů z B a dostáváme uzavřenost W na násobení skalárem. \square

Podprostory vektorových prostorů často zadáváme pomocí množiny generátorů. Podobně, podprostory afinního prostoru \mathbf{A} často zadáváme pomocí „generující“ množiny bodů X , říkáme například přímka určená body a, b nebo rovina určená body a, b, c , atd.

Definice 11.24. *Nechť X je neprázdná podmnožina bodů afinního prostoru \mathbf{A} nad tělesem \mathbf{T} . Afinním obalem množiny X rozumíme množinu $\langle X \rangle$ všech afinních kombinací bodů z X , tj.*

$$\langle X \rangle = \{ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k : a_1, \dots, a_k \in X, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in T, \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1 \}$$

Pro afinní obal bodů užíváme stejné značení jako pro lineární obal. Musíme si proto vždy uvědomit, zda prvky X jsou body nebo vektory.

Tvrzení 11.25. *Nechť X je neprázdná podmnožina bodů afinního prostoru \mathbf{A} nad tělesem \mathbf{T} . Pak $\langle X \rangle$ je podprostor afinního prostoru \mathbf{A} a pro jeho prostor vektorů \mathbf{W} platí*

$$\begin{aligned} W &= \{ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k : a_1, \dots, a_k \in X, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in T, \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0 \} \\ &= \langle \{c - b : c \in X\} \rangle , \end{aligned}$$

kde b je libovolný bod v X .

Důkaz. Protože afinní kombinace afinních kombinací je afinní kombinace, je $\langle X \rangle$ je podprostorem \mathbf{A} podle charakterizace podprostorů pomocí afinních kombinací v tvrzení 11.23. Zvolme $b \in X$ libovolně. Prostor vektorů \mathbf{W} podprostoru $\langle X \rangle$ je roven (viz tvrzení 11.21) $W = \{c - b : c \in \langle X \rangle\}$. Každý bod c v $\langle X \rangle$ je tvaru $c = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$, kde $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$, takže každý vektor $c - b$ je tvaru $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k + (-1)b$, kde $\lambda_1 + \dots + \lambda_k + (-1) = 0$. To dokazuje inkluzi \subseteq v

první rovnosti. Naopak, každý vektor tvaru $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$, kde $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$, lze psát ve tvaru $(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k + 1 \cdot b) - b$, kde $\lambda_1 + \dots + \lambda_k + 1 = 1$, což dokazuje druhou inkluzi.

Druhou část přenecháme do cvičení. \square

Každý podprostor je uzavřený na afinní kombinace bodů. Proto každý podprostor afinního prostoru \mathbf{A} obsahující množinu X musí obsahovat také $\langle X \rangle$. V tomto smyslu je $\langle X \rangle$ „nejmenší“ podprostor \mathbf{A} obsahující X .

Příklad 11.26. Afinním obalem dvojice bodů $X = \{a, b\}$, $a \neq b$ je přímka

$$\langle X \rangle = \{\lambda_1 a + \lambda_2 b : \lambda_1 + \lambda_2 = 1\} = a + W = b + W,$$

kde

$$W = \{\lambda_1 a + \lambda_2 b : \lambda_1 + \lambda_2 = 0\} = \langle b - a \rangle$$

Konkrétně, pro body $a = (1, 2)^T$, $b = (4, 6)^T$ v afinním prostoru \mathbb{R}^2 je

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} : \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} : \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

11.3.1. *Bodový, parametrický a rovnicový popis podprostoru.* Podprostor afinního prostoru \mathbf{A} dimenze n můžeme popsat následujícími způsoby:

- *Bodově*, zadáním množiny bodů $X = \{a_1, \dots, a_l\}$. Množina X určuje podprostor $B = \langle X \rangle$ tvořený všemi afinními kombinacemi bodů z X . Prostor vektorů W je roven lineárnímu obalu $\langle a_2 - a_1, \dots, a_l - a_1 \rangle$, takže na zadání prostoru dimenze k potřebujeme alespoň $k+1$ bodů. Naopak, máme-li prostor \mathbf{B} dimenze k a zvolíme $a_1, \dots, a_{k+1} \in B$ tak, aby $(a_2 - a_1, \dots, a_{k+1} - a_1)$ byla lineárně nezávislá posloupnost, pak je (a_1, \dots, a_{k+1}) barycentrická soustava souřadnic prostoru \mathbf{B} , tj. každý bod lze jednoznačným způsobem zapsat jako afinní kombinaci bodů a_1, \dots, a_{k+1} (viz tvrzení 11.16).
- *Parametricky*, zadáním bodu b a množiny vektorů $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l\}$. Daný bod b a dané vektory určují podprostor $B = b + W = b + \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \rangle$. Na zadání prostoru dimenze k potřebujeme bod a alespoň k vektorů. Naopak, máme-li prostor \mathbf{B} dimenze k s prostorem vektorů \mathbf{W} , zvolíme $b \in B$ libovolně a zvolíme k -tici lineárně nezávislých vektorů z W , pak $B = b + W$ a každý bod lze jednoznačným způsobem vyjádřit ve tvaru $b + t_1 \mathbf{v}_1 + \dots + t_k \mathbf{v}_k$.

Máme-li B zadán parametricky jako $B = b + \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \rangle$ a S je soustava souřadnic prostoru \mathbf{A} , pak vyjádření B v soustavě souřadnic S je afinní podprostor $[B]_S = [b]_S + \langle [\mathbf{v}_1]_S, \dots, [\mathbf{v}_l]_S \rangle \leq \mathbf{T}^n$. Takové podprostory aritmetických afinních prostorů vznikají při řešení soustav lineárních rovnic. To nám dává další možný popis podprostorů.

- *Rovnicově*, zadáním soustavy souřadnic S prostoru \mathbf{A} a soustavy lineárních rovnic $Rx = c$ o n neznámých. Řešení soustavy je afinní podprostor $[B]_S = \{x \in \mathbf{T}^n : Rx = c\}$ prostoru \mathbf{T}^n , ten určuje podprostor $B = b + W$. Souřadnice $[b]_S$ bodu b jsou partikulárním řešením soustavy a $[W]_S = \text{Ker } R$. Máme-li l rovnic, pak jádro matice soustavy má dimenzi alespoň $n-l$, takže $\dim(\mathbf{W}) \geq n-l$. Pokud má matice soustavy plnou hodnost

l , pak $\dim(\mathbf{W}) = n - l$. K zadání prostoru dimenze k proto potřebujeme alespoň $n - k$ rovnic.

Přechod od rovnicového popisu k parametrickému spočívá ve vyřešení soustavy lineárních rovnic. Na první pohled ale není jasné, jak z parametrického popisu vytvořit rovnicový, ani není zřejmé, že každý podprostor rovnicový popis má. Přechod od rovnicovému popisu k parametrickému a zpět ukážeme nejprve na příkladu.

Příklad 11.27. Určíme parametricky podprostor \mathbf{B} prostoru \mathbb{R}^5 daný rovnicovým popisem vzhledem ke kanonické bázi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Na tomto místě si rovněž můžeme uvědomit, že každá netriviální rovnice určuje nadrovinu v \mathbf{A} (v našem případě nadrovinu v \mathbb{R}^5), takže rovnicové vyjádření podprostoru můžeme chápat jako vyjádření pomocí průniku nadrovin.

Soustavu vyřešíme Gaussovou eliminační metodou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & -1 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -5 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = b + W = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Vidíme, že \mathbf{B} je podprostor dimenze 3.

Nyní si představme, že B je zadaný parametricky a zapomeňme na původní rovnicové vyjádření. Chceme nalézt soustavu $(R|c)$, aby jejím řešením byl podprostor $B = b + W$. Hlavní myšlenkou je, že vektorový prostor $W = \text{Ker } R$, tj. množina řešení homogenní soustavy $(R|\mathbf{o})$, je roven ortogonálnímu doplňku řádků vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu. Chceme tedy nalézt matici R takovou, aby ortogonální doplněk řádků byl prostor W . K tomu stačí do řádků napsat nějakou množinu generátorů prostoru W^\perp , protože pak $\text{Ker } R = (W^\perp)^\perp = W$!

Najdeme bázi W^\perp :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 10 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$W^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Matici R tedy zvolíme takto:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 10 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zbývá zvolit pravou stranu c tak, aby bod b byl partikulárním řešením. To je jednoduché, prostě dosadíme $c = Ab = (1, 9)^T$. Rovnicový popis B je tedy například

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 10 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Vyšel jiný rovnicový popis než původní. To není překvapivé, podprostor můžeme parametricky i rovnicově zpravidla vyjádřit mnoha způsoby. Z rovnicového popisu vidíme také tzv. normálové vektory – lineární obal řádků matice A tvoří právě vektory kolmé na W (vzhledem ke standardímu skalárnímu součinu).

Z příkladu vidíme jak dokázat obecné tvrzení o rovnicovém popisu podprostorů aritmetických prostorů.

Tvrzení 11.28. *Nechť $b + W$ je podprostor dimenze k aritmetického afinního prostoru \mathbf{T}^n . Pak existuje matice R typu $(n - k) \times n$ nad \mathbf{T} a bod $c \in \mathbf{T}^k$ takový, že množina řešení soustavy rovnic $Rx = c$ je rovná $b + W$.*

Důkaz. Označme $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ nějakou bázi W , takže $W = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$. Uvažujme bilineární formu f na \mathbf{T}^n s maticí $[f]_{K_n} = I_n$, tj. $f((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$.

Z tvrzení 10.16 vyplývá, že $W^{\perp f} = \text{Ker}(\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_k)^T$ takže podle věty o dimenzi jádra a obrazu máme $\dim(W^{\perp f}) = n - k$. Podle části (3) věty 10.21 o ortogonálním doplňku platí $W = (W^{\perp f})^{\perp f}$.

Označme $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-k})$ nějakou bázi $W^{\perp f}$, $R = (\mathbf{w}_1 | \dots | \mathbf{w}_{n-k})^T$ a $c = Rb$. Nyní máme $\text{Ker } R = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-k}\}^{\perp f} = (W^{\perp f})^{\perp f} = W$. Protože b je podle volby c partikulárním řešením soustavy $Rx = c$, je množina všech řešení soustavy $Rx = c$ rovna $b + \text{Ker } R = b + W$. \square

V důkazu máme zároveň návod jak hledat rovnicový popis podprostoru zadaného parametricky (konkrétní příklad byl před tvrzením). Pokud vzhledem k soustavě souřadnic S je $[B]_S = b + W$, napíšeme nějakou bázi W (nebo množinu generátorů W) do řádků matice a vyřešíme homogenní soustavu rovnic s touto maticí. Bázi množiny řešení napíšeme do řádků matice R a určíme pravou stranu $c = Rb$. Tím získáme rovnicový popis $[B]_S = \{x \in T^n : Rx = c\}$.

Navíc, lineární obal řádků matice R je f -ortogonální doplněk W , kde $[f]_{K_n} = I_n$. Je-li \mathbf{A} afinní eukleidovský prostor a S jeho kartézská soustava, pak matice $[f]_{K_n} = I_n$ je rovná matici skalárního součinu v prostoru \mathbf{A} vzhledem k soustavě S . Z toho vyplývá, že řádky matice R generují vyjádření ortogonálního doplňku prostoru W vzhledem k S . Prvkům ortogonálního doplňku W říkáme *normálové vektory*.

Shrňme různé způsoby vyjádření přímk a rovin v afinního eukleidovském prostoru \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem.

- *Přímku* můžeme popsat jako afinní obal dvojice různých bodů, parametricky ve tvaru $b + \langle \mathbf{v} \rangle$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, nebo dvěma rovnicemi $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2$, přičemž normálové vektory této přímky jsou právě vektory $\mathbf{v} \in \langle (a_{11}, a_{12}, a_{13})^T, (a_{21}, a_{22}, a_{23})^T \rangle$.
- *Rovinu* můžeme popsat jako afinní obal trojice bodů neležících na jedné přímce, parametricky ve tvaru $b + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, kde $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je lineárně nezávislá

posloupnost, nebo rovnicí $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1$, přičemž normálové vektory této roviny jsou právě vektory v $\langle (a_{11}, a_{12}, a_{13})^T \rangle$.

OBRAZEK

Stejná diskuze platí pro libovolný afinní eukleidovský prostor dimenze 3, kde rovnicový popis bereme vzhledem k nějaké kartézské soustavě souřadnic. Vynecháme-li poznámky o normálových vektorech, pak diskuze platí v libovolném afinním prostoru dimenze 3, kde rovnicový popis bereme vzhledem k libovolné soustavě souřadnic.

11.3.2. Vzájemná poloha podprostorů.

Definice 11.29. Nechť \mathbf{A} je afinní prostor a $B = b + U$, $C = c + W$ jeho podprostory. Říkáme, že B a C jsou

- *rovnoběžné*, pokud $\mathbf{U} \leq \mathbf{W}$ nebo $\mathbf{W} \leq \mathbf{U}$,
- *různoběžné*, pokud nejsou rovnoběžné a $B \cap C \neq \emptyset$,
- *mimoběžné*, pokud nejsou rovnoběžné ani různoběžné.

Při naší definici totožné prostory jsou rovnoběžné. Rovněž podprostory B, C takové, že $B \subseteq C$, nazýváme rovnoběžné. Rovnoběžnost rozhodneme snadno z parametrického vyjádření:

Pozorování 11.30. Podprostory $B = b + U$ a $C = c + W$ afinního prostoru \mathbf{A} jsou rovnoběžné právě tehdy, když $\dim(U + W) = \max\{\dim(U), \dim(W)\}$

Důkaz. U je podprostor W právě tehdy, když $U + W$ je podprostor W , což nastane, právě když $\dim(W) = \dim(U + W)$ (protože W je vždy podprostor $U + W$, takže $W = U + W$ platí, právě když se rovnají dimenze těchto prostorů podle tvrzení 5.59). Podobně, W je podprostor U právě tehdy, když $\dim(U) = \dim(U + W)$. Z toho vyplývá, že B a C jsou rovnoběžné právě tehdy, když $\dim(U + W) = \max\{\dim(U), \dim(W)\}$. \square

Příklad 11.31. Zjistíme, zda jsou podprostory $B = b + U$ a $C = c + W$ aritmetického afinního prostoru \mathbb{Z}_5^3 rovnoběžné.

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Nejprve určíme dimenze B (= dimenze U) a C . Zřejmě $\dim(U) = 1$, takže B je afinní přímka. Řádkovými úpravami množiny generátorů prostoru W zjistíme $\dim(W)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Takže $\dim C = \dim W = 2$ a C je afinní rovina. K určení dimenze součtu $U + W$ využijeme již provedenou úpravu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dimenze $U + W$ je 2, což je rovno dimenzi W , takže prostory B a C jsou rovnoběžné.

K rozhodnutí, zda jsou dva nerovnoběžné prostory různoběžné můžeme použít následující pozorování.

Pozorování 11.32. Průnik dvou podprostorů $B = b + U$ a $C = c + W$ afinního prostoru \mathbf{A} je neprázdný právě tehdy, když $b - c \in U + W$.

Důkaz. Pokud $d \in B \cap C$, pak ve vyjádření $b - c = (b - d) + (d - c)$ je $b - d \in U$ a $d - c \in W$, takže $b - c \in U + W$.

Naopak, pokud $b - c \in U + W$ pak existují vektory $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{w} \in W$ takové, že $b - c = \mathbf{u} + \mathbf{w}$. Pak bod $b - \mathbf{u} = c - \mathbf{w}$ leží zároveň v B i v C , takže B a C mají neprázdný průnik. \square

Zda platí $b - c \in U + W$ můžeme v parametrickém vyjádření opět rozhodnout pomocí dimenzí, protože $b - c \in U + W$ je ekvivalentní s $\dim(\langle b - c \rangle + U + W) = \dim(U + W)$.

Příklad 11.33. Určíme vzájemnou polohu podprostorů B, C v afinním prostoru \mathbf{A} nad tělesem \mathbb{R} dimenze 4. Roviny B, C jsou dané parametricky vzhledem k nějaké soustavě souřadnic S .

$$[B]_S = [b]_S + [U]_S = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$[C]_S = [c]_S + [W]_S = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Vidíme, že generátory $[U]_S$ a $[W]_S$ jsou lineárně nezávislé, takže dimenze obou prostorů jsou 2, tj. B a C jsou afinní roviny. Spočítáme dimenzi $U + W$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -7 & -3 \\ 0 & -5 & -6 & -5 \\ 0 & -5 & -6 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -20 & -24 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & -5 \end{pmatrix}$$

Dimenze $U + W$ je tedy 3. Prostory proto nejsou rovnoběžné. Přidáním vektoru $[c - b]_S = (1, 1, 2, 0)^T$ dopočítáme dimenzi $\langle c - b \rangle + U + W$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 11 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dimenze $\langle b - a \rangle + U + W$ je 4, což je více než dimenze $U + W$, takže $B \cap C = \emptyset$. Protože navíc B a C nejsou rovnoběžné, jsou mimoběžné.

V rovnicovém vyjádření je rozhodnutí, zda se prostory protínají snadné, zjistíme prostě, zda sjednocení soustav má řešení.

Rozebereme si vzájemné polohy přímk a rovin v afinním prostoru \mathbf{A} dimenze 3. Nad tělesem \mathbb{R} vše vidíme, učiněná pozorování umožňují formální zdůvodnění a rovněž dokazují, že situace nad libovolným jiným tělesem je stejná.

- Vzájemná poloha přímk $B = b + \langle \mathbf{u} \rangle$ a $C = c + \langle \mathbf{w} \rangle$.
 - B a C jsou rovnoběžné právě tehdy, když $\langle \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{w} \rangle$. V případě, že $b \in C$ (ekvivalentně $c \in B$) jsou B a C totožné.

- B a C jsou různoběžné právě tehdy, když nejsou rovnoběžné a $\dim \langle b - c, \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 2$: Pokud B a C nejsou rovnoběžné, pak dimenze $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ je nutně 2 (vektory \mathbf{u}, \mathbf{w} jsou v tomto případě lineárně nezávislé) a vztah $\dim \langle b - c, \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 2$ potom podle pozorování 11.32 platí právě tehdy, když se B a C protínají.
- B a C jsou mimoběžné právě tehdy, když $\dim \langle b - c, \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 3$: Plyne z předchozích dvou bodů, když si uvědomíme, že dimenze $\langle b - c, \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ může být 3 jen tehdy, když B a C nejsou rovnoběžné.
- Vzájemná poloha přímky $B = b + \langle \mathbf{u} \rangle$ a roviny $C = c + \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$.
 - B a C jsou rovnoběžné právě tehdy, když $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$, ekvivalentně, $\dim \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 2$. Plyne z pozorování 11.30. V případě, že $b \in C$ leží přímka B v rovině C (tj. $B \subseteq C$).
 - B a C jsou různoběžné právě tehdy, když $\dim \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 3$: Pokud B a C nejsou rovnoběžné, pak $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$ má nutně dimenzi alespoň 3, takže lineární obal je roven celému prostoru vektorů a má dimenzi 3. Vektor $b - c$ pak v tomto lineárním obalu samozřejmě leží, takže B a C nikdy nemohou být mimoběžné.
- Vzájemná poloha dvou rovin $B = b + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ a $C = c + \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$.
 - B a C jsou rovnoběžné právě tehdy, když $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$, ekvivalentně, $\dim \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 2$.
 - B a C jsou různoběžné právě tehdy, když $\dim \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 3$.

V dimenzi 3 tedy nemohou existovat dvě mimoběžné roviny, dokonce ani přímka mimoběžná s rovinou. V dimenzi 4 již taková situace může nastat, v příkladu 11.33 jsme viděli dvě mimoběžné roviny. Jednodušším příkladem jsou roviny $B = (0, 0, 0, 0)^T + \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ a $C = (0, 0, 0, 1)^T + \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle$ v \mathbf{T}^4 .

11.3.3. Průnik a součet podprostorů. Pokud se dva afinní podprostory *protínají*, tzn. mají neprázdný průnik, pak je jejich průnikem podprostor. Tomuto podprostoru také říkáme *průsečík*, zejména v situaci, kdy je průnikem jediný bod.

Tvrzení 11.34. *Průnikem libovolné množiny podprostorů afinního prostoru \mathbf{A} je buď prázdná množina, nebo podprostor prostoru \mathbf{A} .*

Důkaz. Použijeme charakterizaci podprostorů pomocí afinních kombinací (viz tvrzení 11.23). Pokud je průnik $C = \cap_{i \in I} B_i$ podprostorů B_i neprázdný, pak libovolná afinní kombinace bodů z C leží ve všech podprostorech B_i , takže leží i v C . Průnik je tedy uzavřen na afinní kombinace a je proto podprostorem prostoru \mathbf{A} . \square

Jako cvičení si rozmyslete následující pozorování.

Pozorování 11.35. *Průnik dvou podprostorů $b + W, b' + W'$ afinního prostoru \mathbf{A} je buď prázdný, nebo je roven $c + (W \cap W')$, kde c je libovolný bod v průniku.*

Příklad 11.36. Ukážeme několik možností jak určit průnik D dvou rovin B, C v afinním prostoru \mathbf{A} dimenze 3. Roviny B, C jsou dané parametricky vzhledem k nějaké soustavě souřadnic S :

$$[B]_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, [C]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Nejpřímočařejší je asi následující postup. Bod d leží v průniku $D = B \cap C$ právě tehdy, když $[d]_S$ lze vyjádřit ve tvaru $[d]_S = (0, 1, 1)^T + t_1(-7, 2, 1)^T + t_2(1, 1, -1)^T$

a zároveň ve tvaru $[d]_S = (1, 1, 2)^T + t_3(1, 1, 0)^T + t_4(1, 3, 1)^T$. Pro souřadnice $[d]_S = (d_1, d_2, d_3)^T$ tak dostáváme rovnice

$$\begin{aligned}d_1 &= 0 - 7t_1 + t_2 = 1 + t_3 + t_4 \\d_2 &= 1 + 2t_1 + t_2 = 1 + t_3 + 3t_4 \\d_3 &= 1 + t_1 - t_2 = 2 + t_4\end{aligned}$$

Uvažujeme-li pouze rovnosti mezi t_1, \dots, t_4 , dostaneme po úpravě soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -7 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & -8 & 8 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -10 & 4 \end{array} \right) \sim$$

Řešením je $(1, -5, -18, 5)^T + \langle (2, -7, -30, 9)^T \rangle$. Čtveřice $(t_1, \dots, t_4)^T$, které řeší soustavu, jsou tedy právě čtveřice tvaru $(t_1, t_2, t_3, t_4) = (1, -5, -18, 5) + r(2, -7, -30, 9) = (1 + 2r, -5 - 7r, -18 - 30r, 5 + 9r)^T$. Trojice $(d_1, d_2, d_3)^T$ splňující vztahy výše pak jsou právě

$$\begin{aligned}(d_1, d_2, d_3)^T &= (-7(1 + 2r) + (-5 - 7r), 1 + 2(1 + 2r) + (-5 - 7r), 1 + (1 + 2r) - (-5 - 7r))^T \\ &= (-12 - 21r, -2 - 3r, 7 + 9r) = (-12, -2, 7)^T + r(-21, -3, 9)^T\end{aligned}$$

Průnik je tedy roven $[D]_S = (-12, -2, 7)^T + \langle (-21, -3, 9)^T \rangle = (-12, -2, 7)^T + \langle (7, 1, -3)^T \rangle$.

Uvedený postup je pracný. **Lepší** je vypočítat rovnicové vyjádření prostorů. Pro prostor B je potřeba vyřešit homogenní soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc} -7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 9 & -6 \end{array} \right)$$

Řešením je $\langle (1, 2, 3) \rangle$ a rovnicové vyjádření B vzhledem k S je $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = c$. Dosazením bodu $(0, 1, 1)^T$ získáme $c = 5$, takže rovnicové vyjádření B vzhledem k S je

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 .$$

Rovnicové vyjádření C vzhledem k S vypočteme podobně vyřešením soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

a dopočítáním pravé strany. Vychází

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$

Rovnicové vyjádření průniku je nyní

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

Vyřešením soustavy dostaneme parametrické vyjádření

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) .$$

Dostáváme

$$[D]_S = (2, 0, 1)^T + \langle (7, 1, -3)^T \rangle$$

Možný je také kombinovaný postup, kdy jeden prostor máme vyjádřený rovnicově a druhý parametricky, který může být výhodný, například když jeden z prostorů má malou dimenzi (a tím pádem má krátké parametrické vyjádření) a druhý z prostorů má velkou dimenzi (takže je kratší jej popsat rovnicově).

Sjednocení podprostorů afinního prostoru je zřídka podprostorem, například sjednocení dvou různých přímk není nikdy podprostorem. Proto definujeme součet podprostorů jako nejmenší afinní podprostor obsahující sjednocení, tj. jeho afinní obal.

Definice 11.37. *Součtem podprostorů B_1, \dots, B_k afinního prostoru \mathbf{A} rozumíme afinní obal jejich sjednocení, značíme $B_1 + \dots + B_k$:*

$$B_1 + \dots + B_k = \langle B_1 \cup \dots \cup B_k \rangle .$$

Z parametrického vyjádření podprostorů lze jednoduše získat parametrické vyjádření jejich součtu. Toto pozorování formulujeme pro jednoduchost pouze pro dva podprostory.

Pozorování 11.38. *Součet podprostorů $b+U$ a $c+W$ afinního prostoru \mathbf{A} je roven*

$$(b+U) + (c+W) = b + (\langle c-b \rangle + U + W) .$$

Důkaz. Prostory $b+U$ a $c+W$ jsou zřejmě podprostory pravé strany, takže i jejich afinní obal je podprostorem (viz poznámku za tvrzením 11.25 o afinním obalu). To dokazuje \subseteq . Prostor vektorů součtu $(b+U) + (c+W)$ obsahuje U i W , protože $b+U$ a $c+W$ jsou jeho podprostory, a také vektor $c-b$, protože body c a b součtu leží. To dokazuje \supseteq . \square

Příklad 11.39. *Součtem přímk $B = b + \langle \mathbf{u} \rangle$ a $C = c + \langle \mathbf{w} \rangle$ je buď*

- přímka $b + \langle \mathbf{u} \rangle$ v případě, že $B = C$, nebo
- rovina $b + \langle c-b, \mathbf{u} \rangle$ v případě, že B a C jsou rovnoběžné, ale nikoliv totožné, nebo
- rovina $b + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ v případě, že B a C jsou různoběžné, nebo
- podprostor $b + \langle c-b, \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ dimenze 3 v případě, že B a C jsou mimoběžné.

Pozorného čtenáře asi napadne, zda platí nějaká obdoba věty o dimenzi součtu a průniku. V afinních prostorech je ale situace komplikovanější. Jako ilustraci uvažujme dvě přímky v \mathbb{R}^3 , které se neprotínají. Dimenze obou přímk je 1 a oba prostory mají prázdný průnik. (Prázdnou množinu za afinní prostor nepovažujeme. Někdy se prázdná množina povoluje a dimenze se definuje -1 .) Součet ale může mít dimenzi 2 nebo 3, podle toho, zda jsou přímky rovnoběžné nebo mimoběžné. Projektivní prostory odstraní i tento nedostatek, v nich se rovnoběžné přímky přece jen protnou, a to v „bodě v nekonečnu“.

11.3.4. *Vzdálenost podprostorů.* V afinním eukleidovském prostoru \mathbf{A} máme definovanou vzdálenost bodů $b, c \in A$ jako normu vektoru $b-c$. Vzdálenost libovolných dvou podmnožin $X, Y \subseteq A$ definujeme přirozeně jako infimum vzdáleností bodů z X a bodů z Y .

Definice 11.40. *Vzdáleností dvou množin bodů $X, Y \subseteq A$ v afinním eukleidovském prostoru \mathbf{A} rozumíme číslo*

$$\text{dist}(X, Y) = \inf\{\|x - y\| : x \in X, y \in Y\} .$$

Infimum v definici nemůžeme obecně nahradit minimem, protože to nutně nemusí existovat (podívejte se například na polorovinu v \mathbb{R}^2 bez hraniční přímky a bod, který v ní neleží). Ukážeme, že v případě podprostorů se minima nabývá a naučíme se vzdálenost a „nejkratší příčku“ hledat. *Nejkratší příčkou* rozumíme dva body, jejichž vzdálenost je rovná vzdálenosti podprostorů. Je zřejmé, že pokud se podprostory protínají, je jejich vzdálenost 0. Z odvození vyplyne i opačná implikace – prostory, které se neprotínají, mají kladnou vzdálenost.

Uvažujme tedy dva podprostory $B = b + U$ a $C = c + W$ afinního eukleidovského prostoru \mathbf{A} , $\dim \mathbf{A} = n$. K získání geometrického náhledu si představte dvě mimoběžné přímky v \mathbb{R}^3 a přímku a rovnoběžnou rovinu v \mathbb{R}^3 . Chceme najít body $d \in B$ a $e \in C$ takové, že $\|d - e\|$ je nejmenší možná. Tyto body vyjádříme ve tvaru $d = b + \mathbf{u}$, $e = c + \mathbf{w}$, kde $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{w} \in W$. Výraz $d - e$ lze napsat ve tvaru

$$d - e = (b + \mathbf{u}) - (c + \mathbf{w}) = (b - c) - (\mathbf{w} - \mathbf{u}) .$$

Vektor $\mathbf{x} = \mathbf{w} - \mathbf{u}$ leží v $U + W$. Nyní si vzpomeneme na tvrzení 8.31 o nejlepší aproximaci vektoru v podprostoru: Vektor $(b - c) - \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in U + W$ má nejmenší možnou normu právě tehdy, když je \mathbf{x} rovno ortogonální projekci vektoru $b - c$ na podprostor $U + W$, tj.

$$\mathbf{x} = (b - c)_{U+W}$$

Dokázali jsme, že pro libovolné dva body $d \in B$ a $e \in C$ je $\|d - e\|$ alespoň $\|(b - c) - (b - c)_{U+W}\| = \|(b - c)_{(U+W)^\perp}\|$, což nám dává dolní odhad pro vzdálenost B od C .

Na druhou stranu, vektor $\mathbf{x} = (b - c)_{U+W}$ leží v $U + W$, takže jej lze psát ve tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$. Položíme-li $d = b - \mathbf{u} \in B$ a $e = c + \mathbf{w} \in C$ máme $d - e = (b - c) - (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = (b - c) - \mathbf{x}$. Nalezli jsme dva body, pro které $\|d - e\| = \|(b - c) - (b - c)_{U+W}\|$, to nám dává horní odhad.

Dohromady jsme zjistili, že $\text{dist}(B, C) = \|(b - c)_{(U+W)^\perp}\|$. Ještě si všimneme, že vektor $(b - c)_{(U+W)^\perp}$ je nulový (to nastane právě když je jeho norma nulová) právě tehdy, když $b - c$ leží v $U + W$, tedy právě tehdy, když se prostory $b - c$ protínají (viz pozorování 11.32). Prostory, které se neprotínají tedy mají kladnou vzdálenost. Odvodili jsme:

Tvrzení 11.41. *Vzdálenost podprostorů $B = b + U$ a $C = c + W$ afinního eukleidovského prostoru \mathbf{A} dimenze n je rovná*

$$\text{dist}(B, C) = \|(b - c)_{(U+W)^\perp}\| .$$

Je-li $(b - c)_{U+W} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{w} \in W$ a položíme-li $d = b - \mathbf{u}$, $e = c + \mathbf{w}$, pak

$$\text{dist}(B, C) = \|d - e\| .$$

Vzdálenost B a C je nulová právě tehdy, když $B \cap C \neq \emptyset$.

OBRAZEK (dve mimobezky, rovina a rovnobezna přímka)

K výpočtu ortogonální projekce \mathbf{x} vektoru $b - c$ na podprostor $U + W$ můžeme použít tvrzení 8.34 o výpočtu ortogonální projekce pomocí Gramovy matice: Označme $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ nějakou množinu generátorů vektorového prostoru U a $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l$ nějakou množinu generátorů vektorového prostoru W . Pak $U + W = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l \rangle$ a podle tvrzení je

$$(b - c)_{U+W} = s_1 \mathbf{u}_1 + \dots + s_k \mathbf{u}_k + t_1 \mathbf{w}_1 + \dots + t_l \mathbf{w}_l ,$$

kde $(s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_l)^T$ je libovolné řešení soustavy rovnic, jejíž matice je rovna Gramově matici vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l$ a pravá strana je tvořena skalárními součiny vektoru $b - c$ s vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{w}_l$. Pak body $d = b - s_1 \mathbf{u}_1 - \dots - s_k \mathbf{u}_k \in B$ a $e = c + t_1 \mathbf{w}_1 + \dots + t_l \mathbf{w}_l$ tvoří nejkratší příčku prostorů B a C . Nejkratších příček může být samozřejmě více, třeba v případě dvou rovnoběžných prostorů.

Příklad 11.42. V afinním eukleidovském prostoru \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem spočítáme vzdálenost a nejkratší příčku přímků B a C .

$$B = b + \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad C = c + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Nejkratší příčka je tvořena body $d = b - s\mathbf{u}$ a $e = c + t\mathbf{w}$, kde $(s, t)^T$ je libovolné řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} & \mathbf{u} \cdot (b - c) \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} & \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} & \mathbf{w} \cdot (b - c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & -63 & -35 \\ -63 & 181 & -55 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 7 & -9 & -5 \\ -63 & 181 & -55 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & -9 & -5 \\ 0 & 100 & -100 \end{pmatrix}$$

Řešení je $(s, t)^T = (-2, -1)^T$, takže body $d = b - (-2)\mathbf{u} = (5, -2, -1)^T$ a $e = c + (-1)\mathbf{w} = (2, 4, 1)^T$ tvoří nejkratší příčku. Vzdálenost B a C je $\text{dist}(B, C) = \|d - e\| = \|3, -6, -2\| = \sqrt{49} = 7$.

Dále víme, že ortogonální projekce vektoru $b - c$ na prostor $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ je $s\mathbf{u} + t\mathbf{v} = (-10, -5, 0)$. Pro kontrolu si můžeme spočítat, že vektor $(b - c) - (-10, -5, 0)^T = (-7, -11, -2)^T - (-10, -5, 0)^T = (3, -6, -2)^T$ je rovný $d - e$ a je skutečně kolmý na $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Pro jiný než standardní skalární součin by se výpočet lišil pouze ve výpočtu skalárních součinů při sestavování soustavy.

11.3.5. Úhel podprostorů. Úhel dvou podprostorů $B = b + U$, $C = c + W$ afinního eukleidovského prostoru \mathbf{A} definujeme jako úhel jejich prostorů vektorů U, W . V případě, že je průnik $U \cap W$ triviální (tj. roven $\{\mathbf{o}\}$), pak úhel přirozeně definujeme jako nejmenší úhel mezi vektory, které v prostorech leží

$$\angle(B, C) = \angle(U, W) = \inf\{\angle(\mathbf{u}, \mathbf{w}) : \mathbf{o} \neq \mathbf{u} \in U, \mathbf{o} \neq \mathbf{w} \in W\},$$

kde $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ značí úhel mezi vektory \mathbf{u} a \mathbf{w} , což je podle definice 8.11 reálné číslo $\arccos(\langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle / \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|) \in [0, \pi]$. Pokud vektory \mathbf{u} a \mathbf{w} svírají úhel α , pak vektory $-\mathbf{u}, \mathbf{w}$ svírají úhel $\pi - \alpha$. Z toho vyplývá, že úhel je vždy číslo z intervalu $[0, \pi/2]$.

V případě, že $U \cap W$ je netriviální, není rozumné definovat úhel stejně, protože libovolný nenulový vektor $\mathbf{x} \in U \cap W$ by ukazoval, že $\angle(B, C) = 0$, takže například úhel libovolných dvou rovin v \mathbb{R}^3 by byl 0. Z obrázku je patrné, že úhel dvou různoběžných rovin v \mathbb{R}^3 je rozumné definovat jako úhel přímků $U \cap (U \cap W)^\perp$ a $W \cap (U \cap W)^\perp$.

OBRAZEK

To motivuje obecnou definici úhlu podprostorů.

Definice 11.43. Nechť \mathbf{A} je afinní eukleidovský prostor s prostorem vektorů \mathbf{V} dimenze n . Úhel dvou netriviálních podprostorů U a W vektorového prostoru \mathbf{V} definujeme v případě, že $U \cap W = \{\mathbf{o}\}$, vztahem

$$\angle(U, W) = \inf\{\angle(\mathbf{u}, \mathbf{w}) : \mathbf{o} \neq \mathbf{u} \in U, \mathbf{o} \neq \mathbf{w} \in W\}.$$

Obecně, *Úhlem* (také *odchylkou*) dvou nerovnoběžných podprostorů $b+U$ a $C+W$ (a jejich prostoru vektorů) afinního eukleidovského prostoru \mathbf{A} rozumíme číslo

$$\angle B, C (= \angle(U, W)) = \angle(U \cap (U \cap W)^\perp, W \cap (U \cap W)^\perp) .$$

Úhel dvou rovnoběžných podprostorů definujeme 0.

Druhá část definice dává smysl, protože vektorové prostory $U \cap (U \cap W)^\perp$ a $W \cap (U \cap W)^\perp$ mají triviální průnik (skutečně $(U \cap (U \cap W)^\perp) \cap (W \cap (U \cap W)^\perp) = (U \cap W) \cap (U \cap W)^\perp = \mathbf{o}$) a jsou netriviální, neboť z věty o dimenzi spojení a průniku a užitím $\dim(U \cap W) < \dim(U)$ (to plyne z nerovnoběžnosti) dostáváme

$$\begin{aligned} \dim(U \cap (U \cap W)^\perp) &= \dim(U) + \dim(U \cap W)^\perp - \dim(U + (U \cap W)^\perp) \\ &\geq \dim(U) + (n - \dim(U \cap W)) + n > \dim(U) + (n - \dim(U)) + n > 0 \end{aligned}$$

a podobně se dokáže, že druhý prostor je také netriviální.

Podobně jako pro vzdálenost lze infimum nahradit minimem. Výpočet úhlu nebudeme provádět obecně, probereme pouze některé speciální případy, které pokrývají vše až do dimenze 3.

Nejjednodušší je případ dvou přímk $B = b + \langle \mathbf{u} \rangle$ a $C = c + \langle \mathbf{w} \rangle$. Pro libovolné dva vektory $s\mathbf{u} \in \langle \mathbf{u} \rangle$ a $t\mathbf{w} \in \langle \mathbf{w} \rangle$ máme

$$\frac{\langle s\mathbf{u} | t\mathbf{w} \rangle}{\|s\mathbf{u}\| \|t\mathbf{w}\|} = \frac{st \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle}{|st| \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|} = \pm \frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|} .$$

Úhel vektorů $s\mathbf{u}$ a $t\mathbf{w}$ je tedy buď roven $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ nebo je roven $\pi - \angle(\mathbf{u}, \mathbf{w})$. Úhel B a C je tedy roven menšímu z těchto čísel.

Příklad 11.44. V afinním eukleidovském prostoru \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem vypočítáme úhel přímk

$$B = b + \langle \mathbf{u} \rangle = (33, 157, 1234)^T + \langle (-1, -1, 0)^T \rangle, C = c + \langle \mathbf{w} \rangle = (555, \pi, \pi^\pi)^T + \langle (1, 0, 1)^T \rangle$$

Platí

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \arccos \frac{-1}{2} = \frac{2}{3}\pi ,$$

takže $\angle(B, C) = \pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$

Probereme nyní obecnější případ přímky $B = b + \langle \mathbf{u} \rangle$ a obecného nerovnoběžného podprostoru $C = c + W$. V tomto případě je $U \cap W \neq 0$, takže úhel je definován podle první části definice. Pokud $\langle \mathbf{u} \rangle$ je kolmý na W , tj. $\mathbf{u} \in W^\perp$, pak je úhel B a C roven $\pi/2$. Ve zbývajících případech ukážeme, že $\angle(B, C)$ je roven úhlu vektoru \mathbf{u} a ortogonální projekce vektoru \mathbf{u} na W . Pro libovolný vektor $\mathbf{o} \neq t\mathbf{u} \in \langle \mathbf{u} \rangle$ a $\mathbf{w} \in W$ máme

$$\frac{\langle t\mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle}{\|t\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|} = \pm \frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|} = \pm \frac{\langle \mathbf{u}_W + \mathbf{u}_{W^\perp} | \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|} = \pm \frac{\langle \mathbf{u}_W | \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|} \leq \frac{\|\mathbf{u}_W\| \|\mathbf{w}\|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|} \leq \frac{\|\mathbf{u}_W\|}{\|\mathbf{u}\|} ,$$

kde v předposlední úpravě jsme použili Cauchy-Schwarzovu nerovnost (věta 8.8). Protože kosinus je na intervalu $[0, \pi]$ klesající funkce, z provedené úpravy vyplývá

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \geq \arccos \frac{\|\mathbf{u}_W\|}{\|\mathbf{u}\|}$$

Na pravé straně máme úhel vektorů \mathbf{u} a \mathbf{u}_W :

$$\frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{u}_W \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{u}_W\|} = \frac{\langle \mathbf{u}_W + \mathbf{u}_{W^\perp} | \mathbf{u}_W \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{u}_W\|} = \frac{\langle \mathbf{u}_W | \mathbf{u}_W \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{u}_W\|} = \frac{\|\mathbf{u}_W\|^2}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{u}_W\|} = \frac{\|\mathbf{u}_W\|}{\|\mathbf{u}\|}$$

OBRAZEK

Odvodili jsme:

Tvrzení 11.45. Úhel přímky $B = b + \mathbf{u}$ a podprostoru $C = c + W$ v afinním eukleidovském prostoru \mathbf{A} dimenze n je v případě $\mathbf{u} \in W^\perp$ roven $\pi/2$ a v opačném případě

$$\angle(B, C) = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{u}_W) = \arccos \frac{\|\mathbf{u}_W\|}{\|\mathbf{u}\|} .$$

Důkaz. Pro nerovnoběžné prostory jsme odvodili, pro rovnoběžné je tvrzení zřejmé. \square

Toto tvrzení můžeme použít například na určení úhlu přímky a roviny v prostoru dimenze 3. Výhodnější ale bývá použít následující tvrzení o úhlu podprostoru a nadroviny.

Tvrzení 11.46. Úhel podprostoru $B = b + U$, $\dim U > 0$, a nadroviny $C = c + W$ v afinním eukleidovském prostoru \mathbf{A} dimenze $n \geq 2$ je roven

$$\angle(B, C) = \frac{\pi}{2} - \angle(U, W^\perp)$$

Důkaz. Bude. \square

OBRAZEK

Příklad 11.47. V afinním eukleidovském prostoru \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem vypočítáme úhel přímky B a (nad)roviny C .

$$B = b + \langle \mathbf{u} \rangle = (33, 157, 1234)^T + \langle (-1, -1, 0)^T \rangle ,$$

$$C = c + \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = (555, \pi, \pi^\pi)^T + \langle (1, 1, -1)^T, (-1, 2, 1)^T \rangle$$

Určíme ortogonální doplněk prostoru $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Takže

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle^\perp = \langle \mathbf{r} \rangle = \langle (1, 0, 1)^T \rangle$$

Podle tvrzení je $\angle(B, C)$ roven $\pi/2 - \angle(\langle \mathbf{r} \rangle, \langle \mathbf{u} \rangle)$. Úhel $\angle(\langle \mathbf{r} \rangle, \langle \mathbf{u} \rangle)$ jsme počítali v příkladu 11.44, vyšlo

$$\angle(\langle \mathbf{r} \rangle, \langle \mathbf{u} \rangle) = \pi/3 .$$

Proto

$$\angle(B, C) = \pi/2 - \pi/3 = \pi/6 .$$

Obecně neplatí $\angle(U, W) = \pi/2 - \angle(U, W^\perp)$, například pro podprostory $U = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, $W = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle$ prostoru \mathbb{R}^4 je $\angle(U, W) = \angle(U, W^\perp) = \pi/2$.

Dvojitou aplikací tvrzení 11.46 získáme návod k výpočtu úhlu dvou různoběžných nadrovin, speciálně tak můžeme určit úhel dvou různoběžných rovin v prostoru dimenze 3.

Tvrzení 11.48. Úhel nadrovin $B = b + U$ a $C = c + W$ v afinním eukleidovském prostoru \mathbf{A} dimenze $n \geq 2$ je roven

$$\angle(B, C) = \angle(U^\perp, W^\perp)$$

Důkaz. Podle tvrzení 11.46 máme

$$\angle(B, C) = \pi/2 - \angle(U, W^\perp) = \pi/2 - (\pi/2 - \angle(U^\perp, W^\perp)) .$$

□

Příklad 11.49. Určíme úhel roviny B, C v afinní eukleidovském prostoru dimenze 3, které jsou dány rovnicově vzhledem k nějaké kartézské soustavě souřadnic S .

$$B : -x_1 - x_2 = 12, \quad C : x_1 + x_3 = 123$$

Protože, S je kartézská soustava souřadnic, z rovnicového popisu vidíme normálové vektory podprostorů B a C : $(-1, -1, 0)^T$ a $(1, 0, 1)^T$.

$$\angle(B, C) = \angle(\langle(-1, -1, 0)^T\rangle, \langle(1, 0, 1)^T\rangle) = \pi/3$$

11.4. Orientace, objem, vektorový součin. Pojmy v této části se spíše než afinních eukleidovských prostorů týkají většinou jenom jejich (unitárních) prostorů vektorů. Poznatky se ale hodí při geometrických výpočtech v afinních eukleidovských prostorech, proto je téma zařazeno právě teď. V dalším textu bude \mathbf{V} vždy reálný vektorový prostor konečné dimenze n .

11.4.1. *Orientace.* Při odvození vzorce pro determinant jsme intuitivně používali pojem orientace, který teď přesněji zavedeme.

Definice 11.50. Dvě báze B a B' reálného vektorového prostoru \mathbf{V} dimenze n nazýváme *souhlasně orientované*, pokud je determinant matice přechodu $[\text{id}]_{B'}^B$ kladný. V opačném případě říkáme, že báze jsou *nesouhlasně orientované*.

Relace souhlasné orientovanosti je reflexivní, protože $\det([\text{id}]_B^B) = \det(I_n) = 1$, symetrická, protože $\det([\text{id}]_{B'}^B) = (\det([\text{id}]_B^{B'}))^{-1}$, a tranzitivní, protože $\det([\text{id}]_{B'}^B) \det([\text{id}]_{B''}^{B'}) = \det([\text{id}]_{B''}^B)$. Tato relace je tedy ekvivalencí na množině bází vektorového prostoru \mathbf{V} . Množina matic se tímto rozpadá na dvě disjunktní třídy. Každá z nich sestává se souhlasně orientovaných bází a dvě báze patřící do různých tříd jsou orientované nesouhlasně.

OBRAZEK

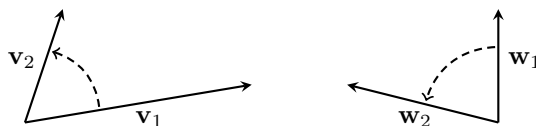
Definice 11.51. *Orientací* vektorového prostoru \mathbf{V} rozumíme výběr jedné ze tříd ekvivalence relace souhlasné orientovanosti. Báze v této třídě nazveme *kladně orientované* a ve druhé třídě *záporně orientované*. Vektorový prostor spolu s volbou orientace nazýváme *orientovaný vektorový prostor*.

Volba orientace umožňuje pro každou nadrovinu $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \rangle$ rozdělit prostor na „dvě strany“. Vektory \mathbf{v}_n , pro něž je báze $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ kladně orientovaná tvoří jednu stranu a vektory, pro něž \mathbf{v}_n je báze $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ tvoří druhou stranu. Vektory \mathbf{v}_n , pro které $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ není báze, jsou právě vektory hraniční nadroviny $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \rangle$.

OBRAZEK

Z definice 11.50 souhlasné orientace vyplývá, že zaměníme-li jeden vektor v bázi za opačný, kladně orientované báze se změni na záporně orientovanou a naopak (protože determinant v definici bude -1). Orientace báze se rovněž změni, pokud prohodíme dva vektory v bázi (determinant bude opět -1).

V prostoru dimenze 2 si také můžeme orientaci představit jako volbu kladného směru otáčení. Dvě báze $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ a $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ jsou souhlasně orientované právě tehdy, když „směr otáčení“ od \mathbf{v}_1 k \mathbf{v}_2 je stejný jako „směr otáčení“ od \mathbf{w}_1 k \mathbf{w}_2 .



OBRÁZEK 21. Souhlasně orientované báze $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ a $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ v \mathbb{R}^2 mají stejný směr otáčení.

V našem fyzikálním trojrozměrném prostoru se orientace často volí tzv. *pravidlem pravé ruky*. Ukazovák, prostředník ohnutý kolmo k dlani a palec (v tomto pořadí) udávají kladnou orientaci.

OBRÁZEK

V aritmetických vektorových prostorech \mathbb{R}^n je přirozené definovat kanonickou bázi jako kladně orientovanou. Báze $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je pak kladně orientovaná právě tehdy, když je determinant $\det([\text{id}]_{K_n}^B) = \det(\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_n)$ kladný.

11.4.2. *Orientovaný objem*. Determinant $\det(\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_n)$ udává intuitivně orientovaný n -rozměrný objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ v aritmetickém vektorovém prostoru \mathbb{R}^n se standardním měřením délek (tj. se standardním skalárním součinem). Rovnoběžnostěnem určeným vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ rozumíme množinu

$$\{t_1 \mathbf{v}_1 + \dots + t_n \mathbf{v}_n : t_1, \dots, t_n \in [0, 1]\} .$$

Obdobný postup jako v kapitole 6 můžeme použít na určení orientovaného objemu v libovolném orientovaném reálném prostoru \mathbf{V} se skalárním součinem $\langle | \rangle$. Orientovaný objem by měl být lineární v každé složce a roli kanonické báze hraje kladně orientovaná ortonormální báze $B = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ – vektory v této bázi jsou jednotkové, navzájem kolmé a kladně orientované, takže chceme aby rovnoběžnostěm jimi určený měl objem 1. Postup v kapitole 6 vede na následující vzorec pro orientovaný objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$:

$$\text{vol}_n(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \det([\mathbf{v}_1]_B | \dots | [\mathbf{v}_n]_B) .$$

Intuitivně se zdá být jasné, že objem nezávisí na konkrétní volbě kladně orientované ortonormální báze B . Je tomu skutečně tak: Označme C jinou kladně orientovanou bázi prostoru \mathbf{V} . Matice přechodu $X = [\text{id}]_C^B$ od B k C je ortogonální, takže její determinant je ± 1 . Navíc B a C jsou souhlasně orientované, takže determinant je 1. Z toho dostáváme

$$\begin{aligned} \det([\mathbf{v}_1]_C | \dots | [\mathbf{v}_n]_C) &= \det(X[\mathbf{v}_1]_B | \dots | X[\mathbf{v}_n]_B) = \det(X([\mathbf{v}_1]_B | \dots | [\mathbf{v}_n]_B)) \\ &= \det(X) \det([\mathbf{v}_1]_B | \dots | [\mathbf{v}_n]_B) = \det([\mathbf{v}_1]_B | \dots | [\mathbf{v}_n]_B) \end{aligned}$$

Nezávislost na volbě kladně orientované báze umožňuje definovat orientovaný objem uvedeným vztahem.

Definice 11.52. Nechť \mathbf{V} je reálný orientovaný vektorový prostor dimenze n se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$. *Orientovaný objem* rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ definujeme vztahem

$$\text{vol}_n(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \det([\mathbf{v}_1]_B | \dots | [\mathbf{v}_n]_B) ,$$

kde B je libovolná kladně orientovaná ortonormální báze prostoru \mathbf{V} . *Objem* stejného rovnoběžnostěnu definujeme jako absolutní hodnotu orientovaného objemu.

Orientovaný objem je nulový právě tehdy, když je posloupnost $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ lineárně závislá. V opačném případě je roven determinantu matice přechodu od $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ k B a má kladné znaménko právě tehdy, když je báze $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ kladně orientovaná. Při změně orientace orientovaný objem změní znaménko a objem se nezmění.

Připomeňme, že souřadnice vektoru \mathbf{v} vzhledem k ortonormální bázi můžeme vypočítat pomocí skalárních součinů s bázovými vektory:

$$[\mathbf{v}]_B = (\langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v} \rangle, \dots, \langle \mathbf{w}_n | \mathbf{v} \rangle)^T$$

To je obsahem tvrzení 8.19, složky vyjádření jsme nazývali Fourierovy koeficienty. Definici tedy můžeme přepsat

$$\text{vol}_n(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \det \begin{pmatrix} \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_n \rangle \\ \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{w}_n | \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_n | \mathbf{v}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_n | \mathbf{v}_n \rangle \end{pmatrix}$$

Příklad 11.53. V prostoru \mathbb{R}^2 se skalárním součinem

$$\langle (x_1, x_2)^T | (y_1, y_2)^T \rangle = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2$$

orientovaném tak, že báze $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ je kladně orientovaná, vypočítáme orientovaný objem rovnoběžnostěnu (lépe řečeno, orientovaný obsah rovnoběžníku) určeného vektory $\mathbf{v}_1 = (-3, 4)^T$, $\mathbf{v}_2 = (0, 2)^T$.

Gram-Schmidtovou ortogonalizací získáme ortonormální bázi

$$B = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Tato báze je kladně orientovaná, protože matice přechodu od B ke kladně orientované bázi K_2 má determinant $1 > 0$.

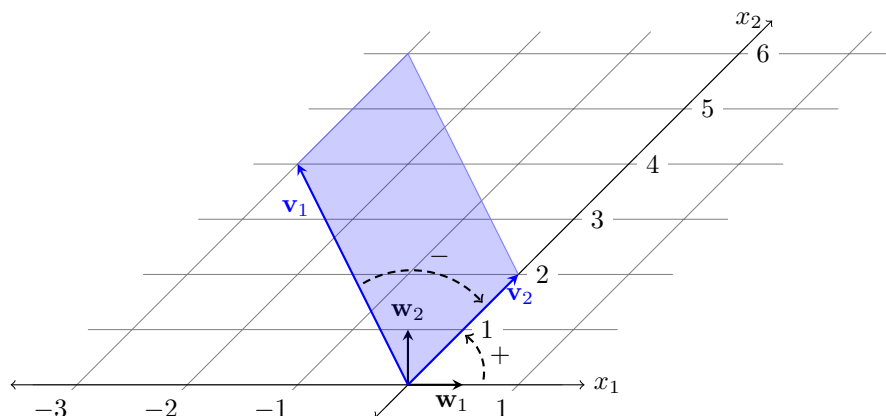
Podle odvozeného vzorce je nyní orientovaný objem roven

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= \det([\mathbf{v}_1]_B | [\mathbf{v}_2]_B) = \det \begin{pmatrix} \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v}_2 \rangle \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = -12 \end{aligned}$$

Ukážeme, jak lze objem počítat bez znalosti ortonormální báze. Označme $A = ([\mathbf{v}_1]_B | \dots | [\mathbf{v}_n]_B)$ maticí, jejíž determinant je orientovaný objem. V matici $A^T A$ je na pozici (i, j) číslo $[\mathbf{v}_i]_B^T [\mathbf{v}_j]_B = [\mathbf{v}_i]_B \cdot [\mathbf{v}_j]_B$. Vzhledem k ortonormální bázi skalární součin přechází ve standardní (viz tvrzení 8.21), takže tento výraz je roven $\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle$. To znamená, že $A^T A$ je Gramova matice vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$! Protože $\det(A^T A) = (\det(A))^2$ dostáváme následující tvrzení.

Tvrzení 11.54. *Nechť V je reálný orientovaný vektorový prostor dimenze n se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$. Pak*

$$(\text{vol}_n(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n))^2 = \det \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{v}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle & \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{v}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_n \rangle & \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_n \rangle & \dots & \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{v}_n \rangle \end{pmatrix}.$$

OBRÁZEK 22. Obsah rovnoběžníku určeného vektory \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 .

Slovy, objem je rovný odmocnině Gramova determinantu.

Příklad 11.55. Uvažujme stejný orientovaný prostor se skalárním součinem jako v předchozím příkladu a stejné vektory $\mathbf{v}_1 = (-3, 4)^T$, $\mathbf{v}_2 = (0, 2)^T$. Bez počítání ortonormální báze nyní můžeme objem vypočítat pomocí předchozího tvrzení.

$$|\text{vol}_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)| = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_2 \rangle \end{pmatrix}} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}} = 12$$

(Svislé závorky zde znamenají absolutní hodnotu, nikoliv determinant.) Chceme-li znát orientovaný objem, všimneme si, že determinant matice přechodu od $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ke K_2 je -6 , takže báze $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je záporně orientovaná, a proto $\text{vol}_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = -12$.

Příklad 11.56. V prostoru \mathbb{R}^3 se standardním součinem určíme obsah rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)^T$ a $\mathbf{v}_2 = (3, 1, -1)^T$. Přesněji řečeno, chceme určit 2-rozměrný objem tohoto rovnoběžníku v prostoru $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ se zúžením standardního skalárního součinu v \mathbb{R}^3 na tento podprostor.

Pokud bychom počítali obsah z definice, museli bychom nejprve nalézt nějakou ortogonální bázi v $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$. Použitím předchozího tvrzení je ale výpočet velmi snadný:

$$|\text{vol}_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)| = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}} = 5\sqrt{6}$$

V prostoru $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ nemáme žádnou přirozenou orientaci zděděnou z \mathbb{R}^3 , takže pro výpočet orientovaného obsahu bychom orientaci nejprve museli zadat.

11.4.3. *Vektorový součin.* Výpočty v afinních eukleidovských prostorech dimenze 3 usnadňuje vektorový součin.

Tento pojem nebudeme probírat do hloubky, pouze informativně. Principy budeme vysvětlovat na aritmetickém vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 s kladně orientovanou kanonickou bází a standardním skalárním součinem. Definice a tvrzení budeme formulovat obecně a rozmyšlení důkazů přenecháme čtenáři.

Zafixujeme si nějak vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, pro konkrétní představu např. $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)^T$ a $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 4)^T$. Orientovaný objem rovnoběžnostěny určeného pevnými vektory

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ a proměnným vektorem $\mathbf{v}_3 = (z_1, z_2, z_3)^T$ je lineární forma f . V našem konkrétním případě je

$$f((z_1, z_2, z_3)^T) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & z_1 \\ 2 & 1 & z_2 \\ 3 & 4 & z_3 \end{pmatrix} = 5z_1 - 7z_2 + 3z_3$$

Hodnotu formy f na vektoru \mathbf{v}_3 můžeme vyjádřit jako skalární součin jistého (jednoznačně určeného) vektoru \mathbf{q} a vektoru (z_1, z_2, z_3) :

$$f(\mathbf{v}_3) = (5, -7, 3)^T \cdot \mathbf{v}_3, \quad \text{tedy } \mathbf{q} = (5, -7, 3)^T$$

Tento vektor \mathbf{q} nazýváme vektorový součin vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ a značíme $\mathbf{q} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Sřhnutí: vektorový součin vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ definujeme jako ten (jednoznačně určený) vektor $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, pro který platí

$$\det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 .$$

To motivuje následující definici.

Definice 11.57. Necht \mathbf{V} je reálný orientovaný vektorový prostor dimenze 3 se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$. *Vektorovým součinem* vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ rozumíme jednoznačně určený vektor $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, pro který platí

$$\text{vol}_3(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \langle \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3 \rangle .$$

Vrátíme se k \mathbb{R}^3 a ukážeme, jak lze obecně spočítat vektorový součin $\mathbf{v}_1 = (x_1, x_2, x_3)^T$ a $\mathbf{v}_2 = (y_1, y_2, y_3)^T$. Pro libovolný vektor $\mathbf{v}_3 = (z_1, z_2, z_3)^T$ dostáváme z rozvoje determinantu $\det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3)$ podle třetího sloupce

$$\det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3) = (x_2 y_3 - x_3 y_2) z_1 - (x_1 y_3 - x_3 y_1) z_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_3 ,$$

takže podle definice je

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (x_2 y_3 - x_3 y_2, -x_1 y_3 + x_3 y_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)^T .$$

To je vzorec, který nejspíše znáte ze střední školy. Alternativně lze vzorec získat postupně dosazením $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ do definice. Pro obecný prostor vyjde stejný vzorec vzhledem k libovolné kladně orientované ortonormální bázi.

Tvrzení 11.58. Necht \mathbf{V} je reálný orientovaný vektorový prostor dimenze 3 se skalárním součinem $\langle | \rangle$, B je kladně orientovaná ortonormální báze \mathbf{V} , $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, $[\mathbf{v}_1]_B = (x_1, x_2, x_3)^T$ a $[\mathbf{v}_2]_B = (y_1, y_2, y_3)^T$. Pak

$$[\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]_B = (x_2 y_3 - x_3 y_2, -x_1 y_3 + x_3 y_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)^T .$$

Nyní nalezneme geometrický význam směru a délky vektorového součinu. Jsou-li vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ lineárně závislé, pak je determinant $\det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3)$ rovný nule a vektorový součin je tudíž nulový vektor. Předpokládejme dále, že vektory jsou lineárně nezávislé. Vektor $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ je kolmý na oba vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, protože $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_1$ je podle definice rovno $\det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_1) = 0$ a podobně pro vektor \mathbf{v}_2 . Vektor $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ tedy leží v ortogonálním doplňku roviny $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, což je podprostor dimenze 1. Tím je určen směr. K určení normy stačí spočítat $\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|^2 = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$. K tomu využijeme tzv. Cauchy-Binetův vzorec, který ve speciálním případě říká

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2) &= \det((\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2)^T (\mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2)) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_2 \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1)(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_2) - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_2)(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1) \end{aligned}$$

Vzorec si můžete ověřit přímým výpočtem. Pro normu vektorového součinu dostáváme

$$\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\| = \sqrt{(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}}.$$

Vyšla odmocnina Gramova determinantu, takže norma vektorového součinu je rovna obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. To také můžeme nahlédnout úpravou

$$\begin{aligned} \sqrt{\det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}} &= \sqrt{\|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2} \\ &= \sqrt{\|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 - \|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 \cos^2(\angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2))} \\ &= \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| \sin(\angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)) \end{aligned}$$

Nakonec si všimneme, že $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$ je kladně orientovaná báze, protože $\det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) > 0$. Z toho také plyne, že vektorový součin změní znaménko, změníme-li orientaci prostoru.

Tvrzení 11.59. *Nechť \mathbf{V} je reálný orientovaný vektorový prostor dimenze 3 se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}$. Pak platí*

- $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{o}$ právě tehdy, když je posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ lineárně závislá,
- $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^\perp$,
- $\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\| = |\text{vol}_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)| = \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| \sin(\angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2))$,
- je-li $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ lineárně nezávislá posloupnost, pak je $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$ kladně orientovaná báze prostoru \mathbf{V} .

Příklad 11.60. Vektorový součin vektorů $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)^T$ a $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 4)^T$ v \mathbb{R}^3 (se standardním skalárním součinem a orientací) je $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (5, -7, 3)^T$. Tento vektor je skutečně kolmý na oba vektory \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 , jeho délka udává obsah rovnoběžníku určeného vektory \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$ tvoří kladně orientovanou bázi.

Někdy se vektorový součin užívá k nalezení nějakého vektoru, který je kolmý na dané dva vektory. Početně jednodušší ale v takovém případě bývá vypočítat ortogonální doplněk eliminací.

Ve cvičení je řada užitečných formulek pro vektorový součin.

TODO - použití na výpočet obsahu plochy

Na závěr poznamenejme, že v obecné dimenzi n se může definovat vektorový součin $(n-1)$ -tice vektorů vztahem

$$\text{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \langle \mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1} | \mathbf{v}_n \rangle$$

Některé vlastnosti jsou ve cvičení.

11.5. Afinní zobrazení. Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory je zobrazení zachovávající součet a násobení skalárem, ekvivalentně, zobrazení zachovávající lineární kombinace. Obdobně zavedeme afinní zobrazení mezi afinními prostory jako zobrazení zachovávající afinní kombinace bodů.

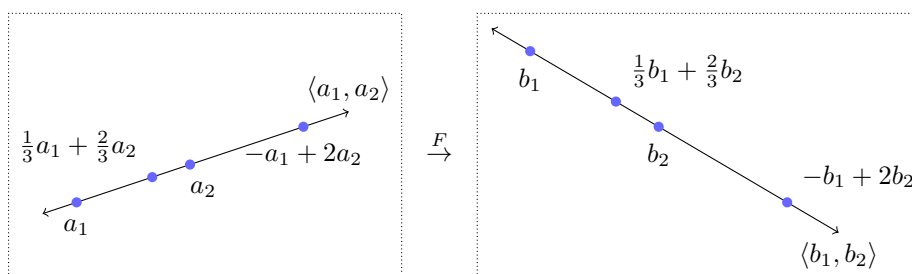
Definice 11.61. Nechť \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou afinní prostory nad stejným tělesem \mathbf{T} . Zobrazení $F : A \rightarrow B$ nazýváme *afinní zobrazení z \mathbf{A} do \mathbf{B}* , značíme $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, pokud

zachovává afinní kombinace, tj. pro libovolné $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_k \in A$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in T$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ platí

$$F(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) = \lambda_1 F(a_1) + \dots + \lambda_k F(a_k) .$$

Slovy, obraz afinní kombinace je afinní kombinace obrazů se stejnými koeficienty. Fyzikální interpretace: těžiště soustavy hmotných bodů se musí zobrazit na těžiště obrazů se stejnými hmotnostmi.

Podíváme se podrobněji na případ $k = 2$ v definici. Zvolíme pevně dva různé body $a_1, a_2 \in A$ a označíme $b_1 = F(a_1)$, $b_2 = F(a_2)$. Každý bod c na přímce $\langle a_1, a_2 \rangle$ lze zapsat jako afinní kombinaci $c = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$. Jeho obrazem musí být bod $F(c) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$. Obrazem je tedy bod v $\langle b_1, b_2 \rangle$, který má stejné poměry „orientovaných vzdáleností“ od bodů b_1, b_2 jako má bod c od bodů a_1, a_2 . V degenerovaném případě kdy $b_1 = b_2$ se všechny body přímky $\langle a_1, a_2 \rangle$ zobrazí do b_1 . V části 11.2.3 (viz cvičení ??) jsme diskutovali, že v případě, že těleso má charakteristiku různou od dva, lze každou afinní kombinaci napsat pomocí afinní kombinace dvojic. Rozmyslete si (cvičení), že tím pádem by pro taková tělesa stačilo v definici požadovat zachovávání afinních kombinací dvojic. Jinými slovy, afinní zobrazení je takové zobrazení, které zobrazuje přímky na přímky nebo body a zachovává poměry „orientovaných vzdáleností“ bodů na přímce (opět předpokládáme charakteristiku různou od dva).



OBRÁZEK 23. Afinní zobrazení F , kde $b_i = F(a_i)$.

Dobrou představu o afinních zobrazeních z prostoru \mathbf{A} dimenze n do \mathbf{B} (libovolné dimenze) si vytvoříme, uvážíme-li nějakou barycentrickou soustavu souřadnic (a_1, \dots, a_{n+1}) v \mathbf{A} a obrazy $b_i = F(a_i)$. Každý bod $a \in A$ lze zapsat jednoznačně jako afinní kombinaci $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n+1} a_{n+1}$ a obraz je pak nutně $F(a) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n+1} b_{n+1}$. Naopak, na barycentrické soustavě souřadnic si můžeme obrazy předepsat libovolně a to jednoznačně určuje afinní zobrazení. Tyto skutečnosti jsou obdobou tvrzení 7.4 o určení lineárního zobrazení na bázi.

OBRÁZEK (v R2)

Tvrzení 11.62. *Nechť \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou vektorové prostory nad tělesem \mathbf{T} , $\dim \mathbf{A} = n$, (a_1, \dots, a_{n+1}) je barycentrická soustava souřadnic prostoru \mathbf{A} a $b_1, \dots, b_{n+1} \in B$. Pak existuje právě jedno afinní zobrazení $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ splňující $f(a_i) = b_i$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$.*

Důkaz. Jednoznačnost plyne z definice. Abychom dokázali existenci, definujeme F jak si vynucuje definice, tj. pro bod $a \in A$ položíme $F(a) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n+1} b_{n+1}$,

kde $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})^T$ jsou barycentrické souřadnice bodu a vzhledem k dané barycentrické soustavě. Je potřeba ověřit, že vzniklé zobrazení je afinní, tj. podmínka z definice platí pro libovolné k a libovolné body. To přenecháme do cvičení. \square

Konkrétní příklady afinních zobrazení:

- Konstantní zobrazení $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, které každému bodu v v \mathbf{A} přiřazuje pevně zvolený bod $b \in B$.
- Posunutí o vektor \mathbf{v} (který leží v prostoru směrů prostoru \mathbf{A}) je afinní zobrazení $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$. Posunutím o vektor \mathbf{v} přirozeně myslíme zobrazení definované $F(c) = c + \mathbf{v}$.
- Rotace o nějaký úhel, zrcadlení podle přímky, zkosení, projekce na přímku v nějakém směru, posunutí a každé složení těchto zobrazení je afinním zobrazením $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- Zobrazení přiřazující bodu \mathbf{A} jeho souřadnice vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic je afinní zobrazení $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{T}^n$.

11.5.1. *Afinní a lineární zobrazení.* Afinní zobrazení mezi afinními prostory určuje přirozeným způsobem lineární zobrazení mezi prostory vektorů. Naopak, lineární zobrazení mezi jejich prostory vektorů a obraz jednoho bodu určují jednoznačně afinní zobrazení.

Podrobněji. Uvažujme afinní prostor \mathbf{A} s prostorem vektorů \mathbf{V} , afinní prostor \mathbf{B} s prostorem vektorů \mathbf{W} (oboje nad tělesem \mathbf{T}) a afinní zobrazení $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$. Zvolíme libovolný bod $a \in A$ a definujeme zobrazení $f : V \rightarrow W$ vztahem

$$f(\mathbf{v}) = F(a + \mathbf{v}) - F(a) \quad \text{pro každý vektor } \mathbf{v} \in V .$$

Alternativně můžeme stejnou definici psát

$$f(c - a) = F(c) - F(a) \quad \text{pro každý bod } c \in A .$$

Ukážeme, že takto definované zobrazení f nezávisí na volbě bodu a . Z definice afinního zobrazení dostaneme, že pro libovolný bod $a' \in A$ a vektor $\mathbf{v} \in V$ platí

$$F(a' + \mathbf{v}) = F((a + \mathbf{v}) - a + a') = F(a + \mathbf{v}) - F(a) + F(a') ,$$

což po úpravě dává

$$F(a' + \mathbf{v}) - F(a') = F(a + \mathbf{v}) - F(a) ,$$

takže f skutečně nezávisí na volbě bodu a . Jednoduchou úpravou definice f zjistíme, že zobrazení F je určeno f a obrazem libovolného bodu $a \in A$ vztahem

$$F(c) = F(a) + f(c - a) \quad \text{pro libovolný bod } c \in A$$

nebo

$$F(a + \mathbf{v}) = F(a) + f(\mathbf{v}) \quad \text{pro libovolný vektor } \mathbf{v} \in V .$$

Jsou-li $a_1, \dots, a_k \in A$ libovolné body a $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in T$ skaláry takové, že $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$, pak „lineární kombinace“ $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$ odpovídá nějakému vektoru ve \mathbf{V} . Podíváme se na jeho obraz při zobrazení f . Podle definice f a definice afinního zobrazení je

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) &= F(a + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) - F(a) \\ &= F(a) + \lambda_1 F(a_1) + \dots + \lambda_k F(a_k) - F(a) \\ &= \lambda_1 F(a_1) + \dots + \lambda_k F(a_k) . \end{aligned}$$

Ještě nahlédneme, že f je skutečně lineární zobrazení: Pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a skalár $\lambda \in T$ označíme $b = a + \mathbf{u}$, $c = a + \mathbf{u} + \mathbf{v}$ a spočítáme

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= f(c - a) = F(c) - F(a) = (F(c) - F(b)) + (F(b) - F(a)) \\ &= f(c - b) + f(b - a) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

$$f(\lambda \mathbf{u}) = f(\lambda b - \lambda a) = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda(F(b) - F(a)) = \lambda f(b - a) = \lambda f(\mathbf{u})$$

Naopak, je-li $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ lineární zobrazení a $a \in A$, $b \in B$, pak zobrazení $F : A \rightarrow B$ definované vztahem

$$F(c) = b + f(c - a) \quad \text{pro každé } c \in A$$

ekvivalentně

$$F(a + \mathbf{v}) = b + f(\mathbf{v}) \quad \text{pro každé } \mathbf{v} \in V$$

je afinní zobrazení $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ (pro které $F(a) = b$), protože pro libovolnou afinní kombinaci $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$ ($\sum_1^k \lambda_i = 1$) máme

$$\begin{aligned} F(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) &= b + f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k - a) \\ &= b + f(\lambda_1(a_1 - a) + \dots + \lambda_k(a_k - a)) \\ &= b + \lambda_1 f(a_1 - a) + \dots + \lambda_k f(a_k - a) \\ &= \lambda_1(b + f(a_1 - a)) + \dots + \lambda_k(b + f(a_k - a)) \\ &= \lambda_1 F(a_1) + \dots + \lambda_k F(a_k) \end{aligned}$$

Shrneme učiněná pozorování.

Tvrzení 11.63. *Nechť \mathbf{A}, \mathbf{B} jsou afinní prostory nad stejným tělesem \mathbf{T} a \mathbf{V}, \mathbf{W} jsou jejich prostory vektorů. Pak platí:*

- (1) *Pro libovolné afinní zobrazení $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ zobrazení $f : V \rightarrow W$ definované pro $\mathbf{v} \in V$ vztahem $f(\mathbf{v}) = F(a + \mathbf{v}) - F(a)$ nezávisí na volbě bodu a a je lineárním zobrazením $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$. Pro libovolné $a, c \in A$ platí $F(c) = F(a) + f(c - a)$ a pro libovolnou kombinaci $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$ platí*

$$f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) = \lambda_1 f(a_1 - a) + \dots + \lambda_k f(a_k - a) .$$

- (2) *pro libovolné lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ a body $a \in A$, $b \in B$ je zobrazení $F : A \rightarrow B$ definované vztahem $F(c) = b + f(c - a)$ afinní zobrazení $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$.*

V situaci předchozího tvrzení říkáme, že afinní zobrazení F vytváří lineární zobrazení f nebo, že f je lineární zobrazení příslušné F , apod. Například afinní zobrazení $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ vytvořená identitou jsou právě posunutí, zobrazení vytvořená rotací jsou rotace složené s posunutím.

Následující pozorování shrnuje některé jednoduché, ale důležité vlastnosti afinních zobrazení a příslušných lineárních.

Pozorování 11.64. *Nechť $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ je afinní zobrazení a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ příslušné lineární zobrazení. Pak platí:*

- (1) *F je prosté právě tehdy, když f je prosté,*
- (2) *F je na právě tehdy, když f je na.*
- (3) *Obrazem podprostoru $B = b + U$ prostoru \mathbf{A} při zobrazení F je podprostor $F(B) = F(b) + f(U)$ prostoru \mathbf{B} . Speciálně, rovnoběžné podprostory se zobrazí na rovnoběžné podprostory.*

- (4) Je-li $G : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ afinní zobrazení a g příslušné lineární zobrazení, pak složené zobrazení $G \circ F$ je afinním zobrazením $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ a jemu příslušné lineární zobrazení je $g \circ f$.

Důkaz. Cvičení. □

11.5.2. *Afinní zobrazení v souřadnicích.* Na příkladu ukážeme jak popsat afinní zobrazení mezi konečně dimenzionálními prostory v souřadnicích.

Příklad 11.65. Popíšeme zobrazení, které zobrazuje trojici bodů $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$ na trojici bodů $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}^3$ (v tomto pořadí).

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Protože $D = (a_2 - a_1, a_3 - a_1) = ((-2, 0)^T, (1, -2)^T)$ je báze \mathbb{R}^2 , tvoří trojice (a_1, a_2, a_3) barycentrickou soustavu souřadnic, takže afinní zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je podmínkami jednoznačně určené (viz tvrzení 11.62). Určíme příslušné lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Obrazem vektoru $a_2 - a_1$ je vektor $f(a_2 - a_1) = F(a_2) - F(a_1) = b_2 - b_1 = (-2, -4, 2)^T$ a obrazem $a_3 - a_1$ je $f(a_3 - a_1) = b_3 - b_1 = (-5, 0, -3)^T$. Matice f vzhledem k D a K_3 je proto

$$[f]_{K_3}^D = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -4 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

takže vzhledem ke kanonickým bázím je

$$\begin{aligned} [f]_{K_3}^{K_2} &= [f]_{K_3}^D [\text{id}]_D^{K_2} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -4 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -4 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nyní pro libovolný bod $c \in \mathbb{R}^2$ a vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ je $F(c + \mathbf{v}) = F(c) + f(\mathbf{v})$. Použijeme tento vztah pro $c = (0, 0)^T$ a $\mathbf{v} = (x_1, x_2)^T$ a dostáváme obraz bodu $(x_1, x_2)^T$:

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Místo určování $F((0, 0)^T)$ přímo, můžeme do vztahu dosadit například bod a_1 a dopočítat.

$$\begin{aligned} F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} &= F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Celkově dostáváme

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ 2 - x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Jako zkoušku ověříme, že skutečně $F(a_i) = b_i$, $i = 1, 2, 3$.

Obecněji, máme-li afinní zobrazení $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, soustavu souřadnic $S = (a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ v prostoru \mathbf{A} a soustavu souřadnic $Q = (b, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ v prostoru \mathbf{B} , pak souřadnice obrazu bodu c , který máme zadaný v soustavě S , vzhledem k Q spočítáme

$$[F(c)]_Q = [F(a)]_Q + [f(c - a)]_Q = [F(a)]_Q + X[c]_S,$$

kde X je matice f vzhledem k bázím $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ a $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$. Heslovitě, obraz je tvaru „bod plus matice krát vektor“. Když na okamžik přestaneme rozlišovat body a vektory (zvolíme počátek a bod ztotožníme z jeho polohovým vektorem), pak lineární zobrazení jsou „rovná zobrazení“, která zachovávají počátky, a afinní zobrazení jsou všechna rovná zobrazení. Vzniknou z lineárních složením s posunutím.

11.5.3. Izometrie. Izometrie mezi afinními eukleidovskými prostory je zobrazení, které zachovává vzdálenosti. Používá se také název *shodnost*, zejména v případě zobrazení mezi stejnými prostory.

Definice 11.66. Necht \mathbf{A}, \mathbf{B} jsou afinní eukleidovské prostory. Zobrazení $F : A \rightarrow B$ nazýváme *izometrie*, pokud zachovává vzdálenosti, tzn. pro libovolné $a, c \in A$ platí

$$\|a - c\| = \|F(a) - F(c)\|.$$

Intuice napovídá, že izometrie je „rovné“, tj. afinní zobrazení, a příslušné lineární zobrazení mezi prostory vektorů je ortogonální. Intuice se nemýlí, jak ukazuje následující věta.

Věta 11.67. Necht \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou afinní eukleidovské prostory konečné dimenze a $F : A \rightarrow B$ je zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

- (1) F je izometrie.
- (2) F je afinní zobrazení $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ a příslušné lineární zobrazení mezi prostory vektorů je ortogonální.

Důkaz. Označme \mathbf{V}, \mathbf{W} prostory vektorů afinních prostorů \mathbf{A}, \mathbf{B} .

Implikace (2) \Rightarrow (1) je jednoduchá: Jsou-li $a, c \in A$ libovolné body, pak

$$\|F(a) - F(c)\| = \|f(a - c)\| = \|a - c\|.$$

Zajímavá je opačná implikace (1) \Rightarrow (2). Ukážeme myšlenku důkazu a některé technické detaily přenecháme do cvičení.

- Pro libovolné dva body $a_1, a_2 \in A$ a jejich afinní kombinaci $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ platí $F(a) = \lambda_1 F(a_1) + \lambda_2 F(a_2)$. K důkazu si všimneme, že vztah „bod je afinní kombinací dvojice bodů s koeficienty λ_1, λ_2 “ můžeme charakterizovat pomocí jejich vzájemných vzdáleností (cvičení).
- Protože F zachovává afinní kombinace dvojic, je F afinní zobrazení podle cvičení ???. Označme f příslušné lineární zobrazení mezi prostory vektorů.
- Zobrazení f zachovává normy: Pro libovolný vektor $\mathbf{v} \in V$ a bod $a \in A$ platí

$$\|f(\mathbf{v})\| = \|f((a + \mathbf{v}) - a)\| = \|F(a + \mathbf{v}) - F(a)\| = \|a + \mathbf{v} - a\| = \|\mathbf{v}\|$$

- Protože f zachovává normu, je podle tvrzení ?? ortogonální.

□

V příkladech ?? z kapitoly o vlastních číslech jsme popsali všechny ortogonální zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Z dokázané věty tak získáme v těchto případech popis všech izometrií. Izometrie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jsou rotace složené s posunutím a ortogonální reflexe složené z posunutím. Izometrie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jsou rotace kolem osy složené z posunutím a rotace kolem osy složené s ortogonální reflexí vzhledem k rovině a posunutím. Obdobné výsledky samozřejmě platí pro izometrie mezi dvěma libovolnými eukleidovskými prostory dimenze 2 nebo 3, stačí vše převést do \mathbb{R}^2 nebo \mathbb{R}^3 pomocí kartézských soustav souřadnic.

11.6. Kvadriky. V této části bude \mathbf{A} reálný afinní nebo afinní eukleidovský prostor dimenze n .

Kvadrikou v \mathbf{A} rozumíme množinu bodů, kterou lze popsat vzhledem k nějaké soustavě souřadnic jako množinu kořenů polynomu v n proměnných stupně 2. Polynom stupně 2 v proměnných x_1, \dots, x_n je součtem výrazů tvaru tx_ix_j , kde $t \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$ (to jsou kvadratické členy), kde alespoň jeden koeficient je nenulový, výrazů tvaru tx_i , kde $t \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ (lineární členy), a konstanty $t \in \mathbb{R}$. V dimenzi $n = 1$ je tedy kvadrika množina bodů $U \subseteq A$ popsána vzhledem k soustavě S vztahem

$$[U]_S = \{x_1 \in \mathbb{R} : a_{11}x_1^2 + b_1x_1 + c = 0\}$$

v dimenzi $n = 2$

$$[U]_S = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0\}$$

a v dimenzi $n = 3$

$$[U]_S = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0\} .$$

Výraz na levé straně je součtem kvadratické formy f_2 na \mathbb{R}^n , lineární formy h na \mathbb{R}^n a konstanty. Z toho důvodu jsme také přidali ke smíšeným členům koeficient 2, aby symetrická bilineární forma f příslušná f_2 měla matici (a_{ij}) .

V kapitole o bilineárních formách jsme si ukázali, jak analyzovat kvadriky. V části 10.4.3 nás zajímal jen „přibližný tvar“ a v části 10.4.5 jsme určili „přesný tvar“ útvaru v rovině. Určení přibližného tvaru nazýváme *afinní klasifikací*. Přesněji, útvary nazýváme *afinně ekvivalentní*, pokud se dají na sebe převést bijektivním afinním zobrazením. Například všechny elipsy v \mathbb{R}^2 jsou afinně ekvivalentní, všechny hyperboly jsou afinně ekvivalentní, ale elipsa není afinně ekvivalentní s hyperbolou. Při afinní klasifikaci určujeme tvar útvarů až na afinní podobnost. Určení přesného tvaru v afinním eukleidovském prostoru nazýváme *metrickou klasifikací*, určujeme útvary až na shodnost.

K afinní klasifikaci se hodí následující pozorování: Pokud se vyjádření útvaru U vzhledem k soustavě souřadnic S rovná vyjádření útvaru U' vzhledem k soustavě souřadnic S' , pak je U afinně ekvivalentní U' . Afinním zobrazením, které převádí U na U' , je to afinní zobrazení, které převádí soustavu S na soustavu S' (cvičení). Pro metrickou klasifikaci platí podobné pozorování pro kartézské soustavy souřadnic. Klasifikace tedy bude probíhat stejně jako ve zmíněných příkladech z kapitoly o

bilineárních formách – najdeme soustavu souřadnic (pro metrickou klasifikaci kartézskou), vzhledem k níž má útvar jednoduchou rovnici. Při metrické klasifikaci nám tento postup dá nejen přesný tvar, ale též přesné umístění.

Připomeňme příklad na metrickou klasifikaci kvadriky v \mathbb{R}^2 z části 10.4.5. Analyzovali jsme následující útvar v \mathbb{R}^2 zadaný vzhledem ke kanonické soustavě souřadnic:

$$U = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 10x_1 - 14x_2 + 7 = 0\}$$

Smíšeného členu jsme se zbavili volbou ortonormální báze, která je zároveň f -ortogonální, kde f je symetrická bilineární forma příslušná kvadratické formě $f_2((x_1, x_2)^T) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$. Tím najdeme soustavu souřadnic S' (se stejným počátkem jako původní), vzhledem ke které máme

$$[U]_{S'} = \{(x'_1, x'_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 2(x'_1)^2 + 4(x'_2)^2 + 2\sqrt{2}x'_1 - 12\sqrt{2}x'_2 + 7 = 0\} .$$

Doplněním na čtverce jsme získali

$$[U]_{S'} = \left\{ (x'_1, x'_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 2 \left(x'_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 4 \left(x'_2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 12 \right\}$$

To můžeme interpretovat tak, že vzhledem k soustavě souřadnic S'' , která se od S' liší jen volbou počátku $[a]_{S'} = (-\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2)^T$, máme

$$\begin{aligned} [U]_{S''} &= \{(x''_1, x''_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 2(x''_1)^2 + 4(x''_2)^2 = 12\} \\ &= \{(x''_1, x''_2)^T \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{6}(x''_1)^2 + \frac{1}{3}(x''_2)^2 = 1\} \end{aligned}$$

Z toho již poznáme přesný tvar útvaru.

Obecně postupujeme při metrické klasifikaci podobně, s tím, že mohou přibýt lineární členy (například ve výrazu $x_1^2 + x_2 = 0$ se lineárního členu nelze zbavit doplněním na čtverec). Uvažujme tedy kvadriku U , jejíž vyjádření v kartézské soustavě souřadnic $S = (a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je

$$\begin{aligned} [U]_S &= \{(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\ &\quad + b_1x_1 + \dots + b_nx_n + c = 0\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : f_2((x_1, \dots, x_n)^T) + h((x_1, \dots, x_n)^T) + c = 0\} \end{aligned}$$

Můžeme postupovat následujícím způsobem.

- (1) Pomocí ortonormální f -ortogonální bázi prostoru \mathbb{R}^n změníme soustavu souřadnic na S' a dostaneme vyjádření tvaru

$$[U]_{S'} = \{(x'_1, \dots, x'_n)^T : a'_{11}(x'_1)^2 + \dots + a'_{nn}(x'_n)^2 + b'_1x'_1 + \dots + b'_nx'_n + c = 0\}$$

- (2) Přerovnáme vektory v soustavě souřadnic tak, aby nenulové koeficienty mezi a'_{11}, \dots, a'_{nn} byly na začátku. Doplníme na čtverce a změnou počátku soustavy S' získáme novou kartézskou soustavu S'' , že

$$[U]_{S''} = \{(x''_1, \dots, x''_n)^T : a''_{11}(x''_1)^2 + \dots + a''_{kk}(x''_k)^2 + b''_{k+1}x''_{k+1} + \dots + b''_nx''_n + c'' = 0\}$$

Nyní rozlišíme dva případy.

- (3S) Pokud jsou všechny lineární členy nulové, pak pouze převedeme konstantu na pravou stranu a v případě, že je nenulová celý výraz konstantou vydělíme. Dostaneme buď

$$[U]_{S''} = \{(x''_1, \dots, x''_n)^T : a'''_{11}(x''_1)^2 + \dots + a'''_{kk}(x''_k)^2 = 0\}$$

nebo

$$[U]_{S''} = \{(x''_1, \dots, x''_n)^T : a''_{11}(x''_1)^2 + \dots + a''_{kk}(x''_k)^2 = 1\},$$

kde koeficienty $a''_{11}, \dots, a''_{kk}$ jsou nenulové.

Takovým kvadrikám říkáme *středové*, protože mají alespoň jeden střed souměrnosti, kterým je počátek soustavy S'' .

(3N) Pokud je alespoň jeden lineární člen nenulový, pak lze nalézt kartézskou soustavu souřadnic S''' , vzhledem ke které je

$$[U]_{S'''} = \{(x'''_1, \dots, x'''_n)^T : a'''_{11}(x'''_1)^2 + \dots + a'''_{kk}(x'''_k)^2 = x'''_{k+1}\},$$

kde koeficienty $a'''_{11}, \dots, a'''_{kk}$ jsou nenulové.

Konstantního členu se zbavíme posunutím počátku a eliminací všech lineárních členů až na jeden docílíme vhodnou volbou vektorů $\mathbf{w}'''_{k+1}, \dots, \mathbf{w}'''_n$. Detaily budou vidět na příkladu níže.

Takovým kvadrikám se říká *nestředové*, protože žádný střed souměrnosti pro ně neexistuje (cvičení).

Čárky nad písmeny a proměnnými jsme používali ke zdůraznění změny soustavy souřadnic a koeficientů. Z postupu vyplývá, že každá kvadrika v afinním eukleidovském prostoru má vzhledem k nějaké kartézské soustavě souřadnic $S = (a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jeden z následujících tvarů.

$$[U]_S = \{(x_1, \dots, x_n)^T : d_1 x_1^2 + \dots + d_k x_k^2 = 0\}$$

$$[U]_S = \{(x_1, \dots, x_n)^T : d_1 x_1^2 + \dots + d_k x_k^2 = 1\}$$

$$[U]_S = \{(x_1, \dots, x_n)^T : d_1 x_1^2 + \dots + d_k x_k^2 = x_{k+1}\}$$

Členy můžeme samozřejmě přeskupit tím, že přeskupíme vektory v soustavě souřadnic.

Zajímá-li nás pouze afinní klasifikace, stačí nám v bodě (1) libovolná f -ortogonální báze a volbou vhodných násobků vektorů v souřadnicové soustavě můžeme docílit jeden z následujících tvarů:

$$[U]_S = \{(x_1, \dots, x_n)^T : \pm x_1^2 + \dots \pm x_k^2 = 0\}$$

$$[U]_S = \{(x_1, \dots, x_n)^T : \pm x_1^2 + \dots \pm x_k^2 = 1\}$$

$$[U]_S = \{(x_1, \dots, x_n)^T : \pm x_1^2 + \dots \pm x_k^2 = x_{k+1}\}$$

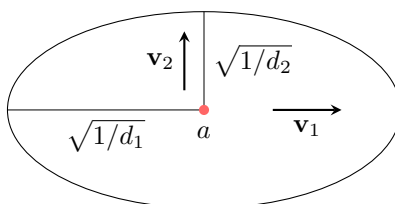
Rozebereme si jednotlivé případy v dimenzi $n = 2$ a $n = 3$. V rozboru případů předpokládáme, že d_1, \dots jsou kladná čísla. U kvadrik prvního a třetího typu budeme rozebírat jen případy, kdy máme alespoň tolik kladných koeficientů jako záporných. Toho můžeme docílit u prvního typu přenásobením rovnice -1 a u třetího typu přenásobením rovnice a $(k+1)$ -tého vektoru v soustavě souřadnic číslem -1 .

Dimenze $n = 2$, středové kvadriky:

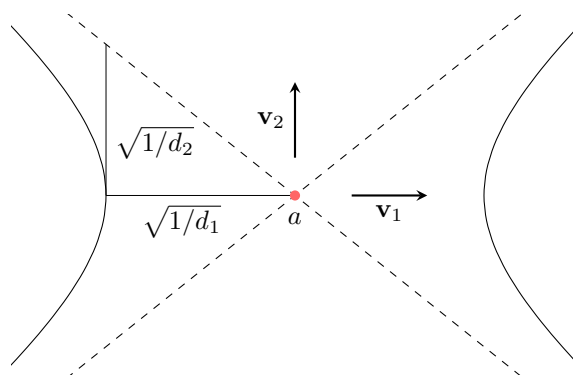
- $d_1 x_1^2 = 0$: přímka $U = a + \langle \mathbf{v}_2 \rangle$
- $d_1 x_1^2 = 1$: dvojice rovnoběžných přímk $U = (a \pm 1/\sqrt{d_1} \mathbf{v}_1) + \langle \mathbf{v}_2 \rangle$.
- $-d_1 x_1^2 = 1$: prázdná množina.
- $d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 = 0$: bod $U = \{a\}$
- $d_1 x_1^2 - d_2 x_2^2 = 0$: dvojice různoběžných přímk o rovnicích $\sqrt{d_1} x_1 + \sqrt{d_2} x_2 = 0$, $\sqrt{d_1} x_1 - \sqrt{d_2} x_2 = 0$. To je vidět ze vztahu

$$d_1 x_1^2 - d_2 x_2^2 = (\sqrt{d_1} x_1 + \sqrt{d_2} x_2)(\sqrt{d_1} x_1 - \sqrt{d_2} x_2)$$

- $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 = 1$: elipsa se středem a a poloosami velikostí $\sqrt{1/d_1}$, $\sqrt{1/d_2}$ a směrů vektorů \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 .



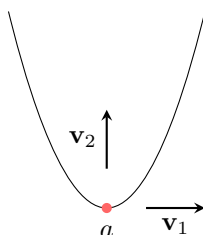
- $d_1x_1^2 - d_2x_2^2 = 1$: hyperbola se středem a a poloosami velikostí $\sqrt{1/d_1}$, $\sqrt{1/d_2}$ a směrů vektorů \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 .



- $-d_1x_1^2 - d_2x_2^2 = 1$: prázdná množina.

Dimenze $n = 2$, nestředová kvadrika:

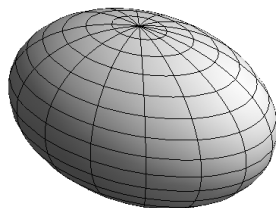
- $d_1x_1^2 = x_2$: parabola s vrcholem a .



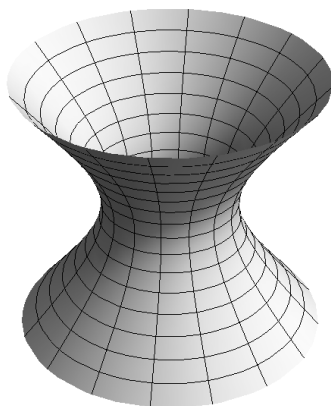
Dimenze $n = 3$, středové kvadriky:

- $\pm d_1x_1^2 = 0$: rovina.
- $d_1x_1^2 = 1$: dvojice rovnoběžných rovin.
- $-d_1x_1^2 = 1$: prázdná množina.
- $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 = 0$: přímka.
- $d_1x_1^2 - d_2x_2^2 = 0$: dvojice různoběžných rovin.
- $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 = 1$: eliptická válcová plocha.
- $d_1x_1^2 - d_2x_2^2 = 1$: hyperbolická válcová plocha.
- $-d_1x_1^2 - d_2x_2^2 = 1$: prázdná množina.
- $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2 = 0$: bod.

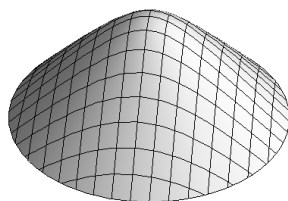
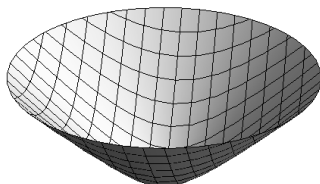
- $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 - d_3x_3^2 = 0$: kuželová plocha.
- $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2 = 1$: elipsoid.



- $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 - d_3x_3^2 = 1$: jednodílný (přímkový) hyperboloid.



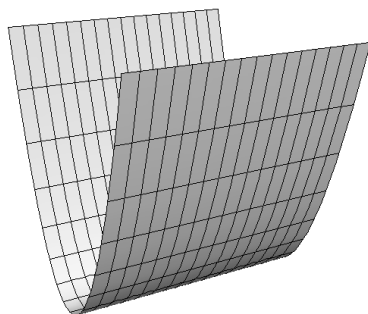
- $d_1x_1^2 - d_2x_2^2 - d_3x_3^2 = 1$: dvojdílný hyperboloid.



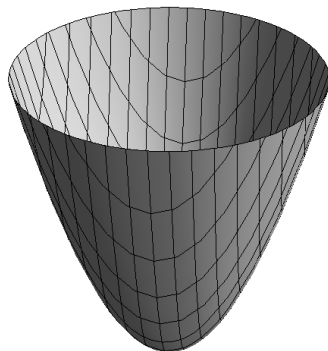
- $-d_1x_1^2 - d_2x_2^2 - d_3x_3^2 = 1$: prázdná množina.

Dimenze $n = 3$, nestředové kvadriky:

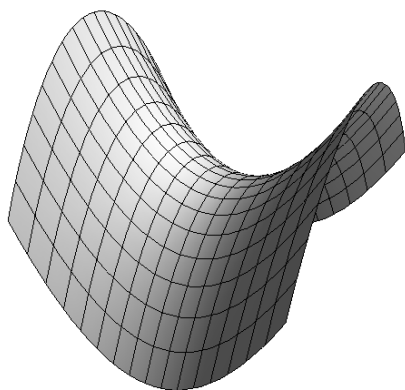
- $d_1x_1^2 = x_2$: parabolická válcová plocha.



- $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 = x_3$: eliptický paraboloid.

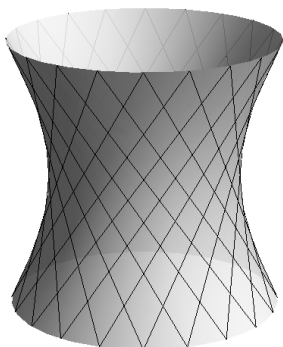


- $d_1x_1^2 - d_2x_2^2 = x_3$: hyperbolický (přímkový) paraboloid.



Pro představu jednodílného a dvojdílného hyperboloidu uvažujte hyperbolu a rotujte jí podle její hlavní osy (vznikne dvojdílný hyperboloid) a podle vedlejší osy (vznikne jednodílný hyperboloid). Jednodílný hyperboloid si také můžete namodelovat tak, že spojíte dvě nad sebou ležící kružnice přímkami a jednou z kružnic

pootočíte (viz cvičení). Z toho je také dobře vidět, proč se tomuto hyperboloidu také říká přímkový – leží na něm totiž přímky. Ve tvaru přímkového paraboloidu se staví například chladičí věže.



Eliptický paraboloid vznikne například rotací paraboly kolem osy. Hyperbolický paraboloid vypadá jako sedlo, lze namodelovat tak, že spojíte dvě rovnoběžné přímky přímkami a jednou z přímek pootočíte do třetího směru. Na hyperbolickém paraboloidu tedy rovněž leží přímky.

OBRAZEK

Příklad 11.68. Provedeme metrickou klasifikaci kvadriky U v \mathbb{R}^2 se standardním skalárním součinem.

$$U = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 - 6x_1x_2 - 5x_2^2 + 18x_1 - 2x_2 + 17 = 0\}$$

Výraz na levé straně je součtem kvadratické formy $f_2((x_1, x_2)^T) = 3x_1^2 - 6x_1x_2 - 5x_2^2$, lineární formy $h((x_1, x_2)^T) = 18x_1 - 2x_2$ a konstanty 17. Symetrická bilineární forma f příslušná kvadratické formě f_2 má vzhledem ke kanonické bázi matici

$$[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice $[f]_{K_2}$ jsou 4 a -6 a příslušné znormované vlastní vektory jsou $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1)$ a $\frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$. Vzhledem k ortonormální bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ máme

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$[h]_{K_1}^B = [h]_{K_1}^{K_2} [\text{id}]_{K_2}^B = (18 \ -2) \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}(56 \ 12),$$

Vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic $S' = ((0, 0)^T, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je tedy

$$[U]_{S'} = \{(x'_1, x'_2) : 4(x'_1)^2 - 6(x'_2)^2 + \frac{1}{\sqrt{10}}56x'_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}12x'_2 + 17 = 0\}.$$

Doplněním na čtverec a vydělením dvěma získáme

$$[U]_{S'} = \{(x'_1, x'_2) : 2(x'_1 + 7/\sqrt{10})^2 - 3(x'_2 - 1/\sqrt{10})^2 = 1\}.$$

Střed a soustavy souřadnic $S'' = (a, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ zvolíme tak, aby $[a]_{S'} = (-7/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})^T$, neboli

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-7}{\sqrt{10}} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{10}} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

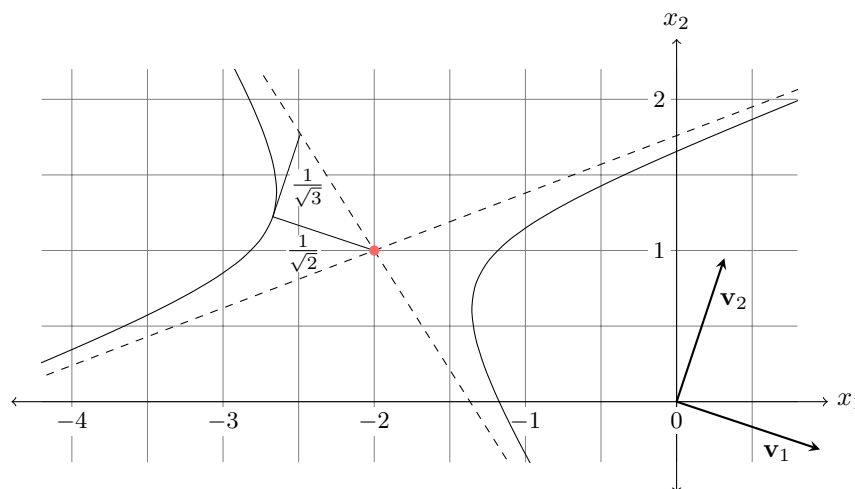
Vzhledem k této kartézské soustavě

$$S'' = (a, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

má kvadrika vyjádření

$$[U]_{S''} = \{(x_1'', x_2'')^T : 2(x_1'')^2 - 3(x_2'')^2 = 1\} .$$

Kvadrika U je tedy hyperbola se středem a a poloosami velikostí $1/\sqrt{2}$ a $1/\sqrt{3}$ a směry $\langle \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{v}_2 \rangle$.



Kdybychom pro kvadriku v předchozím příkladu chtěli provést pouze afinní klasifikaci, mohli bychom zkusit pouze určit signaturu jako v příkladech ???. Ze subdeterminantů vyjde $(0, 1, 1)$. Nyní ale nevíme, zda nakonec vyjde $x_1^2 - x_2^2 = 1$ (hyperbola) nebo $x_1^2 - x_2^2 = 0$ (dvojice přímek). To záleží na tom, jestli při doplnění na čtverec „zmizí“ konstanta nebo ne. Tedy stejně bychom museli při takovém postupu alespoň určit vyjádření U vzhledem k nějaké soustavě s f -ortonormální bází (ne nutně ortonormální) a doplnit na čtverec.

Příklad 11.69. Provedeme metrickou klasifikaci kvadriky U v \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem.

$$U = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 6x_3 = 0\}$$

Výraz na levé straně je součtem kvadratické formy f_2 , lineární formy h a konstanty. Symetrická bilineární forma f příslušná kvadratické formě f_2 má vzhledem ke kanonické bázi matici

$$[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Vlastní čísla matice $[f]_{K_2}$ jsou 3 a 0, $M_3 = \langle (-1, 1, 1)^T \rangle$, $M_0 = \langle (1, 0, 1)^T, (1, 1, 0)^T \rangle$. Přidáme k vektoru $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)^T$ nějakou ortonormální bázi $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ prostoru M_0 , například $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T$, $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)^T$. Vzhledem k $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ máme

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[h]_{K_1}^B = [h]_{K_1}^{K_2} [\text{id}]_{K_2}^B = (0, 0, 6) \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = (2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}, -\sqrt{6}) ,$$

Vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic $S' = ((0, 0, 0)^T, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ je tedy

$$[U]_{S'} = \{(x'_1, x'_2, x'_3) : 3(x'_1)^2 + 2\sqrt{3}x'_1 + 3\sqrt{2}x'_2 - \sqrt{6}x'_3 = 0\} .$$

Doplněním na čtverec a drobnou úpravou získáme

$$[U]_{S'} = \{(x'_1, x'_2, x'_3)^T : 3(x'_1 + \sqrt{3}/3)^2 + 3\sqrt{2}x'_2 - \sqrt{6}x'_3 - 1 = 0\} .$$

Střed a soustavy souřadnic $S'' = (a, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ zvolíme tak, aby $[a]_{S'} = (-\sqrt{3}/3, 0, 0)^T$, neboli $a = -\sqrt{3}/3\mathbf{v}_1 = 1/3(1, -1, -1)^T$. Vzhledem k této kartézské soustavě má kvadrika vyjádření

$$[U]_{S''} = \{(x''_1, x''_2, x''_3)^T : 3(x''_1)^2 + 3\sqrt{2}x''_2 - \sqrt{6}x''_3 - 1 = 0\} .$$

Teď ještě vhodně změňme bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, aby zbyl jen jeden lineární člen, a posuneme počátek, aby jsme vynulovali konstantní člen. Začneme změnou počátku. Z úpravy

$$[U]_{S''} = \{(x''_1, x''_2, x''_3)^T : 3(x''_1)^2 + 3\sqrt{2}(x''_2 - \sqrt{2}/6) - \sqrt{6}x''_3 = 0\} .$$

je vidět, že je třeba zvolit střed $[b]_{S''} = (0, \sqrt{2}/6, 0)^T$, čili

$$b = a + \sqrt{2}/6\mathbf{v}_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Ortonormální bázi $C = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ zvolíme (jednotkové) tak, že $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$, $[\mathbf{w}_2]_B \in \langle (0, 3\sqrt{2}, -\sqrt{6})^T \rangle$ (podle koeficientů lineárních členů) a $\mathbf{w}_3 \in \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle^\perp$. Při takové volbě leží vektory $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ stále v $M_0 = \mathbf{w}_1^\perp$, takže $[f]_C = [f]_B$. Navíc

$$[h]_{K_1}^C = (0, 3\sqrt{2}, -\sqrt{6})([\mathbf{w}_1]_B[\mathbf{w}_2]_B[\mathbf{w}_3]_B) = (0 \ t \ 0)^T ,$$

pro nějaké $t \in \mathbb{R}$, takže docílíme toho, že zbude jen jeden lineární člen. Vyjde $[\mathbf{w}_2]_B = (0, \sqrt{3}/2, -1/2)$, $[\mathbf{w}_3]_B = (0, 1/2, \sqrt{3}/2)^T$, $t = 2\sqrt{6}$. Tedy

$$\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Vzhledem k $S''' = (b, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ máme

$$[U]_{S'''} = \{(x'''_1, x'''_2, x'''_3)^T : 3(x'''_1)^2 + 2\sqrt{6}x'''_2 = 0\}$$

$$[U]_{S'''} = \{(x'''_1, x'''_2, x'''_3)^T : -\sqrt{6}/4(x'''_1)^2 = x'''_2\}$$

Kvadrika U je tedy parabolická válcová plocha na obrázku:

OBRÁZEK

Postup není příliš efektivní, jako cvičení si rozmyslete, jak jej zlepšit. Ještě jednodušší postup umožňuje projektivní pohled na kvadriky.

Příklad 11.70. jednodilny hyperboloid nerotacni

Příklad 11.71. rotační paraboloid (jak se projeví v dimenzích prostoru vlastních čísel)

Cvičení

1. Korespondence bodu a vektoru
2. Jednoznačnost vyjádření bodu jako afinní kombinace dvou
3. Trojpoměr, vztahy mezi trojpomery $(a,b,c), (b,a,c)$, atd.
4. lineární nezávislost rozdílů nezávisí na pořadí
5. Vyjádření všech afinních kombinací pomocí kombinací 2 (char ne2) a 3 (char 2)
6. Vysky jako těžiště
7. Střed kružnice vepsané jako těžiště
8. Cevova věta
9. Konvexní obal
10. Důkazy tvrzení o "vektorové kombinaci"
11. Kdy je sjednocení podprostor
12. Rovnoběžnost pomocí rovnicového vyjádření
13. Kdy existuje přímka rovnoběžek ve směru
14. Kdy existuje přímka rovnoběžek procházející daným bodem
15. Obdobá věty o dimenzi součtu a průniku (pro nerovnoběžné prostory)
16. Výpočet vzdálenosti mimoběžek pomocí přímky v kolmém směru
17. Výpočet vzdálenosti rovnoběžných prostorů
18.
 - $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = -(\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1)$
 - $(t\mathbf{v}_1) \times \mathbf{v}_2 = t(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$
 - $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'_1) \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}'_1 \times \mathbf{v}_2$
 - $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_3$
 - $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3 = \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_3$
 - $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) + \mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_3 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$
19. TODO - vlastnosti obecného vektorového součinu
20. Pro afinní zobrazení stačí v charakteristice různé od 2 požadovat zachování afinních kombinací dvojic bodů.
21. Dokončení důkazu tvrzení o určení afinního zobrazení na barycentrické soustavě (návod: každý bod v definici vyjádřit pomocí dané soustavy a spočítat).
22. Detaily v důkazu charakterizace izometrie
23. Kvadriky v dimenzi 1
24. Nestředové kvadriky nemají střed
25. Asymptoty hyperboly
26. Model primkového hyperboloidu a hyperbolickeho paraboloidu.
27. Rotace hyperboly (paraboly) kolem přímky - kdy vznikne kvadrika?
28. Lepší postup na parabolickou plochu

12. PROJEKTIVNÍ PROSTORY

Cíl. .

Projektivní prostory jsou velmi symetrické objekty, které se vyskytují v různých partiích matematiky. V této kapitole si ukážeme, že projektivní prostory umožňují lépe nahlížet na afinní prostory a usnadňují v nich i počítání, například klasifikaci kvadrik.

12.1. Definice projektivního prostoru. Projektivní prostor definujeme jako množinu směrů ve vektorovém prostoru, kde směrem zde rozumíme jednodimenzionální podprostor.

Definice 12.1. Nechť \mathbf{Z} je vektorový prostor dimenze n . *Projektivním prostorem* příslušným \mathbf{Z} (také *projektivizací* \mathbf{Z}) rozumíme množinu všech jednodimenzionálních podprostorů \mathbf{Z} , značíme $P(\mathbf{Z})$:

$$P(\mathbf{Z}) = \{\langle \mathbf{z} \rangle : \mathbf{o} \neq \mathbf{z} \in \mathbf{Z}\}$$

Prvky $P(\mathbf{Z})$ nazýváme *projektivní body*.

Dimenzi projektivního prostoru definujeme

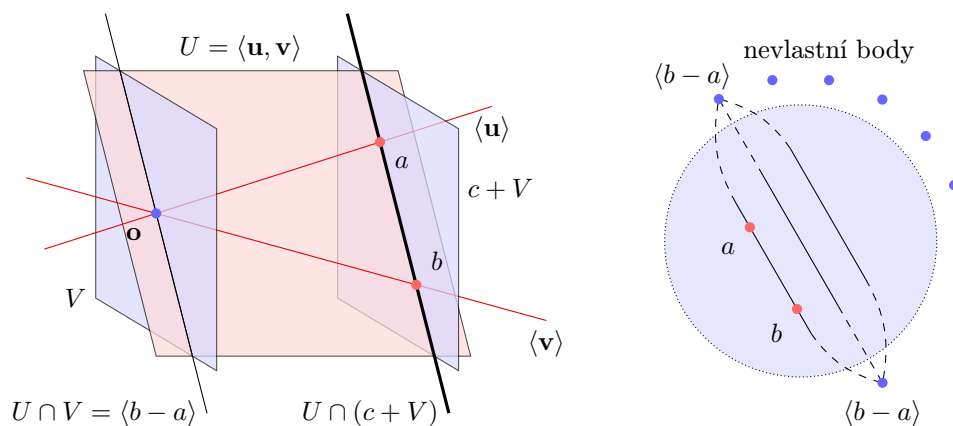
$$\dim(P(\mathbf{Z})) = n - 1 .$$

Pojmy podprostoru, součtu a průniku podprostorů se přenáší přirozeně z vektorových prostorů, např. podprostorem projektivního prostoru $P(\mathbf{Z})$ rozumíme projektivní prostor $P(\mathbf{Y})$, kde \mathbf{Y} je (vektorovým) podprostorem \mathbf{Z} , apod.

Na projektivní prostor dimenze $n - 1$ se také můžeme dívat tak, že vezmeme nenulové vektory ve vektorovém prostoru dimenze n a ztotožníme vektor s jeho libovolným nenulovým násobkem.

Projektivní prostor dimenze -1 je množina směrů ve vektorovém prostoru $\{\mathbf{o}\}$, tj. prázdná množina. Projektivní prostor dimenze 0 je množina směrů ve vektorovém prostoru dimenze 1 , ten je jeden, takže takový prostor tvoří jediný projektivní bod. Projektivní prostor dimenze 1 se nazývá *projektivní přímka*, projektivní prostor dimenze 2 je *projektivní rovina*.

12.1.1. Na plátně. Jednu z možností, jak si lze představit projektivní prostor, ilustrujeme na případě projektivního prostoru dimenze 2 , tedy množině směrů ve vektorovém prostoru \mathbf{Z} dimenze 3 . Nejlépe si vše představíme v případě reálného vektorového prostoru, např. $\mathbf{Z} = \mathbb{R}^3$. V \mathbf{Z} si zvolíme počátek a budeme ztotožňovat bod a jeho polohový vektor, takže se na \mathbf{Z} budeme též dívat jako na prostor afinní. Zvolíme libovolnou rovinu $A = c + \mathbf{V}$ neprocházející počátkem, řekněme jí projekční plátno. Projektivní prostor $P(\mathbf{Z})$ je množina směrů v \mathbf{Z} , tedy množina přímk procházející počátkem. Každému bodu a na plátně (tj. v A) odpovídá projektivní bod v $P(\mathbf{Z})$ – ta přímka, která prochází bodem a . Na obrázku bodu a odpovídá projektivní bod $\langle \mathbf{u} \rangle$ a bodu b odpovídá projektivní bod $\langle \mathbf{v} \rangle$. Naopak, „téměř“ každému projektivnímu bodu odpovídá bod na plátně – jeho průnik s A . „Téměř“ zde znamená: kromě směrů ve \mathbf{V} , tedy směrů rovnoběžných s plátnem. Projektivním bodům v $P(\mathbf{V})$ (=směrům ve $\mathbf{W} =$ přímkám procházejícím počátkem rovnoběžných s A) říkáme *nevlastní body*, množinu $P(\mathbf{V})$ všech nevlastních bodů nazýváme *nevlastní nadrovina*. To, které body jsou nevlastní samozřejmě závisí na poloze plátna.



OBRÁZEK 24. Představa projektivního prostoru. Projektivní přímky, které jsou paralelní s přímkou procházející body a a b , se protínají v nevlastním bodě $\langle b - a \rangle$.

Uvažujme teď projektivní přímku $P(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)$, což je projektivní podprostor $P(\mathbf{Z})$ dimenze 1. Tato přímka na plátně vypadá (rozuměj: průnik s plátnem je) jako přímka procházející body a, b . Navíc na ní leží projektivní bod $\langle b - a \rangle$.

Někdy je výhodné si projektivní prostor představovat jen na plátně, v našem případě bez třetího rozměru. K afinní rovině A přidáme nevlastní body, jeden projektivní bod ke každému směru $\langle \mathbf{w} \rangle$ ve \mathbf{V} . Představujeme si jej jako „bod ležící v nekonečnu“ ve směru $\langle \mathbf{w} \rangle$. Projektivní přímky jsou pak afinní přímky, ke kterým přidáme bod v nekonečnu odpovídající směru této přímky. Máme ještě jednu projektivní přímku, a to nevlastní přímku, která je tvořena všemi nevlastními body. Všimněte si, že i dvě rovnoběžné přímky se protínají, a to v nevlastním bodě odpovídajícím jejich společnému směru (koleje se sbíhají v nekonečnu, i když vlak, který jede po stejných kolejkách v opačném směru nakonec dorazí do stejného nekonečna.)

Dohromady tedy máme dvě představy projektivního prostoru dimenze 2:

- množina směrů ve vektorovém prostoru dimenze 3 (to je definice),
- množina bodů v afinním prostoru dimenze 2 + body v nekonečnu, pro každý směr jeden.

Pozorování 12.2. *Dvě projektivní přímky v projektivní rovině (nad libovolným tělesem) jsou buď totožné, nebo se protínají v právě jednom bodě.*

Důkaz. Nechť $P(\mathbf{Z})$ je projektivní rovina, čili \mathbf{Z} je vektorový prostor dimenze 3, $P(\mathbf{X}), P(\mathbf{Y})$ jsou projektivní podprostory dimenze 1, čili $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \leq \mathbf{Z}$, $\dim(\mathbf{X}) = \dim(\mathbf{Y}) = 2$. Pokud nejsou podprostory totožné, pak $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ má dimenzi větší než 2, čili $\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{Z}$. Z věty o dimenzi součtu a průniku dostáváme

$$\dim(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) = \dim(\mathbf{X}) + \dim(\mathbf{Y}) - \dim(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = 2 + 2 - 3 = 1,$$

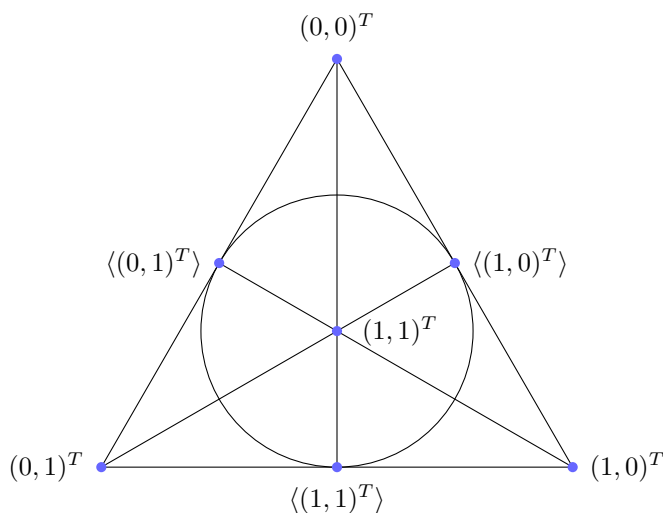
průnikem $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ má jako vektorový prostor dimenzi 1 a průnik $P(\mathbf{X}) \cap P(\mathbf{Y})$ je projektivní prostor dimenze 0, který obsahuje jediný projektivní bod. \square

Příklad 12.3. Rozmyslíme si, jak vypadá projektivní prostor $P(\mathbb{Z}_2^3)$ dimenze 2 nad tělesem \mathbb{Z}_2 , tzv. *Fanova rovina*. Obsahuje 7 bodů – každý nenulový vektor \mathbf{v} v \mathbb{Z}_2^3 určuje směr $\langle \mathbf{v} \rangle$ a pro různé vektory je tento směr různý, protože

nad \mathbb{Z}_2 je $\langle \mathbf{v} \rangle = \{ \mathbf{o}, \mathbf{v} \}$. Při představě projektivní roviny jako afinní roviny plus body v nekonečnu máme 4 afinní body a 3 nevlastní body odpovídající směrům $\langle (1, 0)^T \rangle, \langle (0, 1)^T \rangle, \langle (1, 1)^T \rangle$.

Počet podprostorů $P(\mathbb{Z}_2^3)$ dimenze 1 (=projektivní přímky v $P(\mathbb{Z}_2^3)$) je rovněž 7: Každý podprostor je tvaru $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, kde \mathbf{u}, \mathbf{v} jsou dva lineárně nezávislé vektory. V \mathbb{Z}_2 je lineární nezávislost vektorů \mathbf{u}, \mathbf{v} ekvivalentní tomu, že \mathbf{u}, \mathbf{v} jsou nenulové a různé. Takových neuspořádaných dvojic vektorů je $7 \cdot 6/2 = 21$. Navíc $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \{ \mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \}$, z čehož vyplývá, že každou dvojici takto počítáme třikrát. Při afinní představě máme 6 přímek, které vzniknou z přímek na plátně přidáním bodu v nekonečnu, a jednu nevlastní přímku.

Dohromady máme 7 bodů a 7 přímek, každá přímka obsahuje 3 body, každá dvojice různých přímek se protne v jednom bodě a každé dva různé body leží právě na jedné přímce.



OBRÁZEK 25. Fanova rovina.

Jako ukázkou aplikace uvažujme 7 telefonů, které jsou propojeny pomocí přepínačů. Každý přepínač může spojit nejvýše 3 telefony. Kolik potřebujeme přepínačů, abychom mohli volat z každého telefonu do každého?

Méně než 7 přepínačů nestačí, protože máme $7 \cdot 6/2 = 21$ dvojic telefonů a každý přepínač se může postarat o nejvýše 3 dvojice. Na druhou stranu, Fanova rovina ukazuje, že 7 přepínačů stačí – telefony si představíme jako projektivní body ve Fanově rovině a telefony na každé projektivní přímce propojíme.

OBRÁZEK

Řešte podobný příklad s 13 telefony a přepínači, které mohou spojit nejvýše 4 telefony.

Projektivní prostor dimenze 3 je těžké si vizuálně představit z definice i v případě tělesa reálných čísel. Špatně se totiž představuje vektorový prostor dimenze 4 a plátno neprocházející počátkem dimenze 3. Stále však můžeme použít druhou představu, tj. afinní prostor dimenze 3, ke kterému přidáme body v nekonečnu, pro každý směr jeden. Projektivní přímky jsou pak afinní přímky s přidáním bodem v

nekonečnu a přímky ležící celé v nevlastní nadrovině (těch je již v tomto případě více, nad reálnými čísly nekonečně mnoho). Projektivní roviny jsou afinní roviny s přidanými body v nekonečnu, které odpovídají směrům v rovině (ty tvoří projektivní přímku), a nevlastní rovina. Průnikem dvou různých projektivních rovin je vždy projektivní přímka (v případě rovnoběžných rovin leží celá v nevlastní rovině). Průnikem dvou projektivních přímek je buď prázdná množina (v případě, že je jejich součet celý prostor) nebo projektivní bod.

Obecněji, pro projektivní prostory platí věta obdoba věty o dimenzi součtu a průniku: Pro libovolné dva podprostory $P(\mathbf{X})$ a $P(\mathbf{Y})$ prostoru $P(\mathbf{Z})$ platí

$$\dim(P(\mathbf{X}) \cap P(\mathbf{Y})) + \dim(P(\mathbf{X}) + P(\mathbf{Y})) = \dim(P(\mathbf{X})) + \dim(P(\mathbf{Y})) .$$

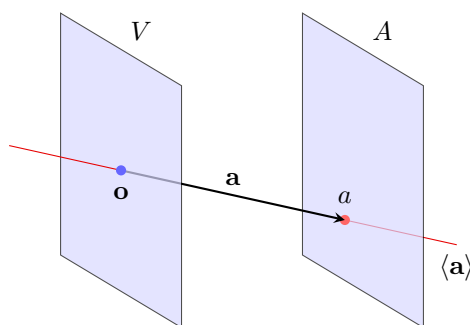
Dimenze projektivních prostorů jsou totiž podle definice o jedna menší než dimenze příslušných vektorových. Protože jsou na obou stranách dva sčítanci, rozdíl se vyruší.

12.1.2. Homogenní souřadnice. Uvažujme projektivní prostor $P(\mathbf{Z})$ dimenze $n - 1$ a nějakou bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{Z} . Každý projektivní bod $\langle \mathbf{u} \rangle \in P(\mathbf{Z})$ můžeme zadat souřadnicemi vektoru \mathbf{u} vzhledem k bázi B , řekněme $[\mathbf{u}]_B = (t_1, \dots, t_n)^T$. Vyjádření $\langle \mathbf{u} \rangle$ vzhledem k bázi B je potom $[\langle \mathbf{u} \rangle]_B = \langle (t_1, \dots, t_n)^T \rangle$. Dvě n -tice tedy určují stejný projektivní bod právě tehdy, když je jedna násobkem druhé. Pro zvýraznění této skutečnosti se někdy píše

$$[\langle \mathbf{u} \rangle]_B = (t_1 : t_2 : \dots : t_n)$$

a říkáme, že $(t_1 : t_2 : \dots : t_n)$ jsou *homogenní souřadnice* bodu $\langle \mathbf{u} \rangle$ vzhledem k B . Například v $P(\mathbb{R}^3)$ jsou $(2 : 4 : 6)$ i $(3 : 6 : 9)$ homogenní souřadnice téhož projektivního bodu $\langle (1, 2, 3)^T \rangle$ vzhledem ke kanonické bázi. Homogenní souřadnice tvoří vždy nenulovou n -tici, protože $\langle \mathbf{o} \rangle$ v projektivním prostoru neleží.

12.2. Projektivní rozšíření afinního prostoru. Projektivní prostor jsme si v předchozí části představovali na projekčním plátně. Teď naopak k danému afinnímu prostoru \mathbf{A} vytvoříme projektivní prostor $P(\mathbf{Z})$ tak, že \mathbf{A} bude jeho plátnem. Myšlenka je podívat se na \mathbf{A} z bodu „v jiné dimenzi“.



OBRÁZEK 26. Projektivní rozšíření afinního prostoru.

Nechť tedy \mathbf{A} je afinní prostor s prostorem vektorů \mathbf{V} dimenze $n - 1$ nad tělesem \mathbf{T} . Představujte si reálnou afinní rovinu. Vektorový prostor \mathbf{Z} (dimenze n) vytvoříme podle obrázku, kde vektory v \mathbf{Z} jsou umístěny do zvoleného počátku „z jiné dimenze“. Vektor spojující počátek s bodem $a \in A$ označíme \mathbf{a} a jeho násobky

ta , $0 \neq t \in T$ (vektor $1a$ ztotožňujeme s a). Do \mathbf{Z} ještě musíme přidat vektory, které nejsou tvaru ta , to jsou vlastně přesně vektory ve \mathbf{V} .

Formálně, položíme

$$Z = \{ta : 0 \neq t \in \mathbf{T}, a \in A\} \cup V .$$

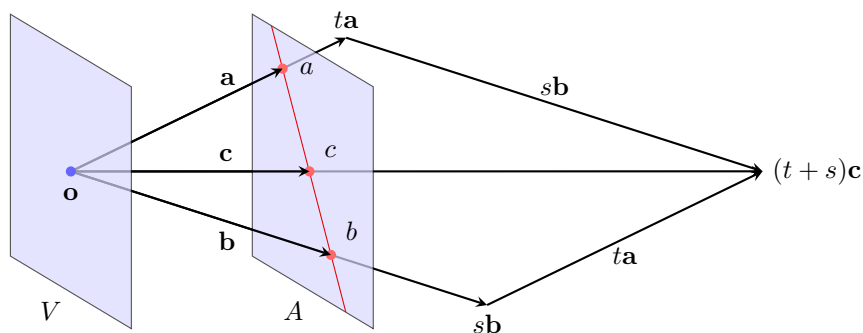
Operace v \mathbf{Z} definujeme opět podle obrázku. Násobení nenulovým skalárem $s \in T$ bude pro prvky V definováno stejně jako ve \mathbf{V} a pro $ta \in Z$ položíme $s(ta) = (st)a$. Sčítání dvou vektorů ve V definujeme stejně jako ve \mathbf{V} , v ostatních případech

$$ta - tb = tv, \text{ kde } v = a - b$$

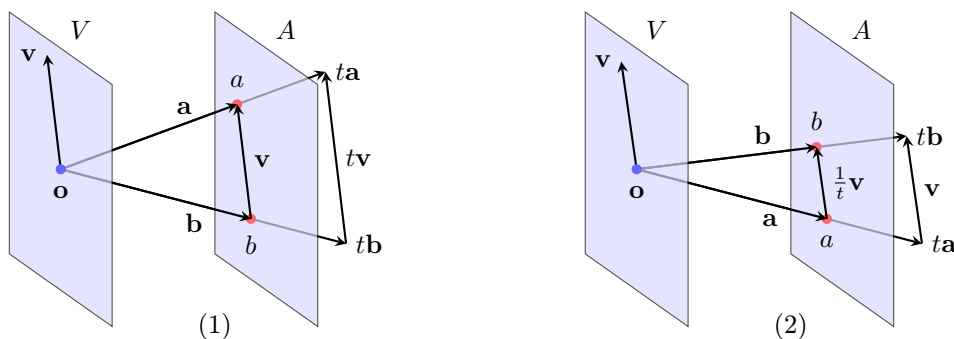
$$ta + sb = (t+s)c, \text{ kde } c = \frac{t}{t+s}a + \frac{s}{t+s}b, \text{ pokud } t+s \neq 0$$

$$ta + v = tb, \text{ kde } b = a + \frac{1}{t}v$$

Ověření axiomů vektorového prostoru přenecháme do cvičení.



OBRÁZEK 27. Operace v \mathbf{Z} . Definujeme $ta + sb := (t+s)c$, kde $c = \frac{t}{t+s}a + \frac{s}{t+s}b$.



OBRÁZEK 28. Operace v \mathbf{Z} . Definujeme (1) $ta - tb := tv$, kde $v = b - a$ a (2) $ta + v := tb$, kde $b = a + \frac{1}{t}v$.

Projektivizaci \mathbf{Z} , neboli projektivní prostor $P(\mathbf{Z})$, nazýváme *projektivní rozšíření* afinního prostoru A . Afinní bod $a \in A$ ztotožňujeme s projektivním bodem $\langle a \rangle \in$

$P(\mathbf{Z})$. Při této úmluvě je $P(\mathbf{Z})$ sjednocením A a $P(\mathbf{V})$. Stejně jako v úvodu, nadrovině $P(\mathbf{V})$ říkáme *nevlastní nadrovina* a projektivním bodům ležící v této nadrovině *nevlastní body*. Ostatním projektivním bodům (ztotožněným s body v A) říkáme *vlastní*.

Celkově máme čtyři druhy objektů:

- *prvky* A jsou afinní body v \mathbf{A} ,
- *prvky* V jsou vektory v prostoru vektorů afinního prostoru \mathbf{A} ,
- *prvky* Z jsou vektory ve V a formální skalární násobky bodů z \mathbf{A} ,
- *prvky* $P(\mathbf{Z})$ jsou projektivní body, tj. směry v \mathbf{Z} . Jsou dvojího druhu: vlastní body $\langle \mathbf{a} \rangle$ ztotožňujeme z body v A , nevlastní body jsou směry ve V .

12.2.1. *Lineární kombinace vektorů v \mathbf{Z}* . Body i vektory afinního prostoru \mathbf{A} jsou nyní vektory v \mathbf{Z} , jak bylo slíbeno v kapitole o afinních prostorech. Můžeme s nimi provádět libovolné lineární kombinace, přičemž smysluplné lineární kombinace v \mathbf{A} odpovídají stejným lineárním kombinacím příslušných vektorů v \mathbf{Z} : Pokud $b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$ je afinní kombinace bodů v \mathbf{A} , tj. $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$, pak v \mathbf{Z} platí $\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k$ (cvičení).

Posloupnost bodů (a_1, \dots, a_n) tvoří barycentrickou soustavu souřadnic v \mathbf{A} právě tehdy, když $B = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ je báze \mathbf{Z} . Barycentrická soustava souřadnic v \mathbf{A} tedy není nic jiného než speciální typ báze v \mathbf{Z} ! Navíc, barycentrické souřadnice bodu b jsou podle výše uvedeného rovny homogenním souřadnicím $(\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_n)$ projektivního bodu $b = \langle \mathbf{b} \rangle$ vzhledem k bázi B takovým, že $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

Pro lineární kombinace v \mathbf{A} odpovídající vektorům je situace podobná. Pokud $\mathbf{v} = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$, kde $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$, pak v \mathbf{Z} platí $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k$.

12.2.2. *Fyzikální interpretace*. Na vektory v \mathbf{Z} také můžeme (zejména v reálném případě) nahlížet jako hmotné body a „nehmotné body“, které chápeme jako posunutí. Vektor $t\mathbf{a} \in Z$ interpretujeme jako bod $a \in A$ s hmotností t (může být i záporná) a vektor $\mathbf{v} \in Z \cap V$ interpretujeme jako posunutí v \mathbf{A} o \mathbf{v} . Obecná lineární kombinace

$$\lambda_1(t_1 \mathbf{a}_1) + \dots + \lambda_k(t_k \mathbf{a}_k) + \kappa_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \kappa_l \mathbf{v}_l$$

je v případě $\lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_k t_k \neq 0$ těžištěm hmotných bodů a_1, \dots, a_k s hmotnostmi $\lambda_1 t_1, \dots, \lambda_k t_k$ posunutém o vektor $\kappa_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \kappa_l \mathbf{v}_l$. Například $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b})$ je střed úsečky ab s hmotností 2.

Při projektivizaci \mathbf{Z} pak zapomínáme hmotnosti a u posunutí si pamatujeme jenom směry.

12.2.3. *Podprostory*. V reálných projektivních prostorech dimenze 2 a 3 jsme si na začátku kapitoly promysleli, jak vypadají projektivní podprostory „na plátně“. Teď ukážeme, že obecně je situace podobná.

Uvažujme tedy afinní prostor \mathbf{A} s prostorem vektorů \mathbf{V} a jeho projektivní rozšíření $P(\mathbf{Z})$. Projektivní rozšíření afinního podprostoru $B = b + \mathbf{U}$ prostoru \mathbf{A} je projektivní podprostor $P(\mathbf{Y}) = B \cup P(\mathbf{U})$ projektivního prostoru $P(\mathbf{Z})$ (zde opět ztotožňujeme vlastní body v \mathbf{Z} a body v \mathbf{A}). Takto získáme všechny podprostory $P(\mathbf{Z})$, kromě těch obsažených v nevlastní nadrovině $P(\mathbf{V})$:

Tvrzení 12.4. *Nechť $P(\mathbf{Z})$ je projektivní rozšíření afinního prostoru \mathbf{A} . Je-li \mathbf{B} podprostorem \mathbf{A} , pak projektivní rozšíření prostoru \mathbf{B} je podprostorem prostoru $P(\mathbf{Z})$. Naopak, každý podprostor projektivního prostoru $P(\mathbf{Z})$, který není celý obsažen v nevlastní nadrovině, je tohoto tvaru.*

Důkaz. První část tvrzení plyne z definice projektivního rozšíření.

Uvažujme naopak libovolný (vektorový) podprostor $\mathbf{Y} \leq \mathbf{Z}$, který není celý obsažen v nevlastní nadrovině, tj. obsahuje nějaký vektor tvaru $t\mathbf{a}$, $0 \neq t \in T$, $\mathbf{a} \in A$. Pak také $\mathbf{a} \in A$, protože množina Y je uzavřená na násobení skalárem a $t^{-1}(t\mathbf{a}) = \mathbf{a}$. Označme $U = Y \cap V$. U je průnikem podprostorů \mathbf{Z} , takže je to podprostor \mathbf{Z} . Množina afinních bodů $B = a + U$ je proto podprostorem afinního prostoru \mathbf{A} . Tvrdíme, že $P(\mathbf{Y})$ je projektivním rozšířením afinního prostoru \mathbf{B} . K tomu stačí dokázat

$$Y = \{q\mathbf{b} : 0 \neq q \in T, b \in B\} \cup U .$$

Je-li $\mathbf{y} \in Y$, pak buď $\mathbf{y} \in V$ nebo \mathbf{y} je tvaru $s\mathbf{c}$ pro nějaké skalár $0 \neq s \in T$ a bod $c \in A$. V prvním případě je $\mathbf{y} \in U$, v druhém případě je $\mathbf{y} = s\mathbf{c} = s(\mathbf{a} + (\mathbf{c} - \mathbf{a}))$, kde vektor $\mathbf{c} - \mathbf{a} = s^{-1}(s\mathbf{c}) - \mathbf{a}$ leží v Y i ve V (protože $\mathbf{c} - \mathbf{a} = c - a \in V$).

Naopak, leží-li \mathbf{y} v množině na pravé straně, pak buď $\mathbf{y} \in U$ nebo $\mathbf{y} = q\mathbf{b}$, $0 \neq q \in T, b \in B$. V prvním případě je $\mathbf{y} \in Y$, v druhém případě $\mathbf{y} = q\mathbf{b} = q(a + r\mathbf{u})$ pro nějaký vektor $\mathbf{u} \in U$, takže $\mathbf{y} = q\mathbf{a} + qru \in Y$, protože oba vektory $q\mathbf{a}$ i qru leží v Y . \square

Projektivní rozšíření stírá rozdíly mezi bodovým a parametrickým vyjádřením afinních podprostorů. Například projektivní rozšíření přímky $\langle a, b \rangle$ v \mathbf{A} je podprostor $P(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle)$ prostoru $P(\mathbf{Z})$ obsahující projektivní body $\langle \mathbf{a} \rangle$ a $\langle \mathbf{b} \rangle$ a projektivní rozšíření přímky $a + \mathbf{u}$ je podprostor $P(\langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle)$ obsahující projektivní body $\langle \mathbf{a} \rangle$ a $\langle \mathbf{u} \rangle$. Rozdíl je jen v tom, zadáme-li podprostor $P(\mathbf{Z})$ pouze pomocí vlastních bodů nebo pomocí jednoho vlastního bodu a nevlastních bodů.

12.2.4. Indukovaná báze. Uvažujme opět afinní prostor \mathbf{A} dimenze $n - 1$ s prostorem vektorů \mathbf{V} a jeho projektivní rozšíření $P(\mathbf{Z})$. Posloupnost $S = (a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ tvoří soustavu souřadnic v \mathbf{A} právě tehdy, když $\bar{S} = (\mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ tvoří bázi prostoru \mathbf{Z} . Této bázi \bar{S} říkáme *báze indukovaná* soustavou S . Indukovaná báze tedy sestává z vektoru v \mathbf{Z} odpovídajícímu bodu \mathbf{A} a $(n - 1)$ -tice lineárně nezávislých nevlastních vektorů v \mathbf{Z} . Naopak, každá taková n -tice je indukovaná nějakou soustavou souřadnic v \mathbf{A} . Mezi souřadnicemi bodu $c \in A$ a souřadnicemi projektivního bodu $c = \langle \mathbf{c} \rangle$ je jednoduchý vztah: Je-li

$$[c]_S = (t_1, \dots, t_{n-1}) ,$$

pak $c = a + t_1\mathbf{v}_1 + \dots + t_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}$ (v afinním prostoru \mathbf{A}), tedy $\mathbf{c} = \mathbf{a} + t_1\mathbf{v}_1 + \dots + t_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}$ (ve vektorovém prostoru \mathbf{Z}), takže $[c]_{\bar{S}} = (1, t_1, \dots, t_{n-1})^T$ a homogenní souřadnice projektivního bodu $c = \langle \mathbf{c} \rangle$ vzhledem k \bar{S} (v projektivním prostoru $P(\mathbf{Z})$) jsou

$$[c]_{\bar{S}} = (1 : t_1 : t_2 : \dots : t_{n-1}) .$$

K souřadnicím bodu tedy zkrátka přidáme jedničku.

Podobně odvodíme, že k souřadnicím vektorů afinního prostoru \mathbf{A} stačí přidat nulu: Je-li $\mathbf{v} \in V$ vektor o souřadnicích

$$[\mathbf{v}]_S = (t_1, \dots, t_{n-1}) ,$$

pak $\mathbf{v} = t_1\mathbf{v}_1 + \dots + t_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}$ (ve \mathbf{V}), tedy $\mathbf{v} = 0\mathbf{a} + t_1\mathbf{v}_1 + \dots + t_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}$ (v \mathbf{Z}), takže $[\mathbf{v}]_{\bar{S}} = (0, t_1, \dots, t_{n-1})^T$ a

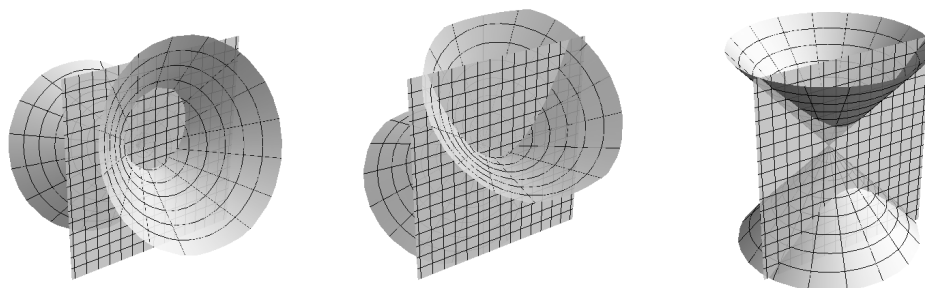
$$[\langle \mathbf{v} \rangle]_{\bar{S}} = (0 : t_1 : t_2 : \dots : t_{n-1}) .$$

Příklad 12.5. Uvažujme afinní prostor $\mathbf{A} = \mathbb{R}^2$ s kanonickou soustavou souřadnic S a jeho projektivní rozšíření $P(\mathbf{Z})$. Bod $(3, 4)^T$ v \mathbf{A} má v $P(\mathbf{Z})$ vzhledem k bázi indukované soustavou S souřadnice $(1 : 3 : 4) = (t : 3t : 4t), 0 \neq t \in \mathbb{R}$. Směr $\langle (3, 4)^T \rangle$ v \mathbf{A} má v $P(\mathbf{Z})$ vzhledem k \bar{S} souřadnice $(0 : 3 : 4) = (0 : 3t : 4t), 0 \neq t \in \mathbb{R}$.

Naopak, projektivní bod o souřadnicích $(5 : 6 : 7)$ vzhledem k \bar{S} je roven afinnímu bodu $(6/5, 7/5)^T$, protože $(5 : 6 : 7) = (1 : 6/5 : 7/5)$. Projektivní bod o souřadnicích $(0 : 2 : 4)$ je v \mathbb{R}^2 směr $\langle (1, 2)^T \rangle$.

12.3. Kvadriky. Výhody projektivních prostorů dobře vyniknou při studiu kvadrik.

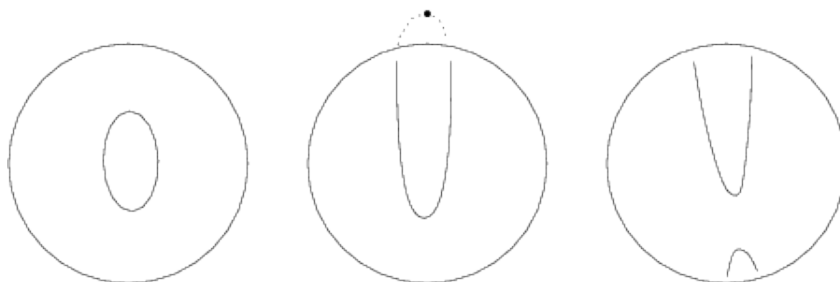
Podíváme se nejprve na dimenzi $n - 1 = 2$. Zajímavé kvadriky v reálném afinním prostoru \mathbf{A} dimenze 2 jsou elipsa, hyperbola a parabola (Ostatní kvadriky jsou prázdná množina, bod, přímka a dvojice přímek. Ty jsou nezajímavé.) Když se podíváme na tyto kvadriky z „bodu v jiné dimenzi“, tj. v projektivním rozšíření $P(\mathbf{Z})$ prostoru \mathbf{A} , všechny tři typy kvadrik vypadají stejně – tvoří kužel! To, o kterou kvadriku se jedná, záleží jen na poloze kužele.



Striktně vzato, v případě paraboly a hyperboly tomuto kuželu chybí nevlastní body, které doplníme. Vzniklý kužel budeme nazývat projektivní rozšíření kvadriky. Tyto doplněné body mají přirozený geometrický význam: V případě elipsy náš kužel nevlastní nadrovinu neprotíná, žádné body tedy nemusíme doplňovat. V případě paraboly se kužel dotýká nevlastní nadroviny v nevlastním bodě, který je směrem její osy. To si můžeme představit tak, že když jdeme po parabole „do nekonečna“ (po libovolném ze dvou ramen), dojdeme do nevlastního bodu odpovídajícímu směru osy. V případě hyperboly kužel protíná nevlastní nadrovinu ve dvou projektivních bodech, které jsou směry asymptot. Představa je podobná jako u hyperboly.

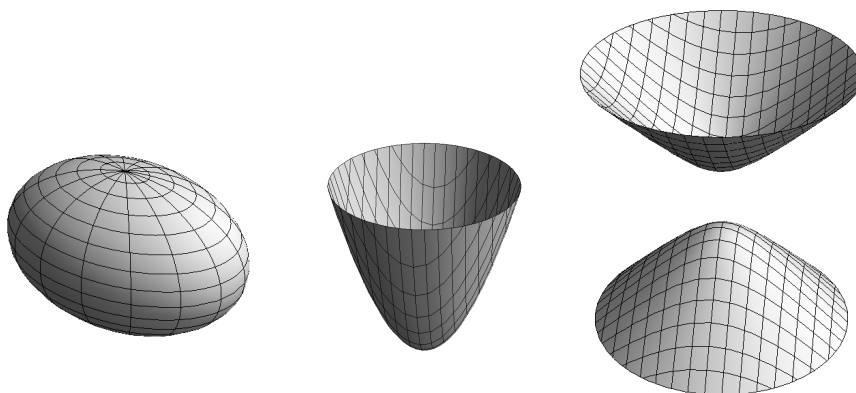
Jak se z elipsy stane parabola a posléze hyperbola si představíme tak, že umístíme kužel do vodorovné polohy a otáčíme jej do svislé polohy (svítíme „oboustranou“ baterkou na plátno a baterkou otáčíme). Na plátně (tj. v \mathbf{A}) máme na začátku elipsu, která se v jednom směru postupně zvětšuje až se dotkne nevlastní přímky a vznikne parabola. Bod dotyku je stejný nevlastní bod, jako bod v nekonečnu „na druhé straně“ \mathbf{A} . Když teď pokračujeme v otáčení, elipsa „vyleze“ z druhé strany a vznikne hyperbola.

Podobně si můžeme v reálném afinním prostoru dimenze 3 představit jak se z elipsoidu stane eliptický paraboloid a posléze dvojdílný hyperboloid. Čtyřrozměrný



OBRÁZEK 29. Kvadriky

kužel si nejspíše nepředstavíme, ale můžeme uvažovat zvětšující se elipsoid, ze kterého se při dotyku nevlastní roviny stane eliptický paraboloid, a ten následně vyleze z druhé strany a máme dvojdílný hyperboloid. Těžší je si představit jak se z přímkového hyperboloidu při dotyku nevlastní nadroviny stane přímkový paraboloid, z něhož se dalším pohybem stane opět přímkový hyperboloid. Zkuste to!



OBRAZEK

12.3.1. *Projektivní rozšíření kvadriky v souřadnicích.* Rozmyslíme si, jak vypadá projektivní rozšíření v souřadnicích na konkrétním případě kvadriky v \mathbb{R}^2 z příkladu 11.68.

$$U = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 - 6x_1x_2 - 5x_2^2 + 18x_1 - 2x_2 + 188 = 0\}$$

Kvadrice U je tedy zadaná vzhledem ke kanonické soustavě souřadnic. V projektivním rozšíření $P(\mathbf{Z})$ prostoru \mathbb{R}^2 budeme vyjadřovat body pomocí homogenních souřadnic vzhledem k bázi \mathbf{Z} indukované kanonickou soustavou souřadnic v \mathbb{R}^2 .

Vlastní projektivní bod $(x_0 : x_1 : x_2)$ je roven afinnímu bodu $(x_1/x_0, x_2/x_0)^T$, takže na kvadrice leží právě tehdy, když

$$3(x_1/x_0)^2 - 6(x_1/x_0)(x_2/x_0) - 5(x_2/x_0)^2 + 18(x_1/x_0) - 2x_2/x_0 + 17 = 0$$

Vynásobením x_0^2 získáme

$$3x_1^2 - 6x_1x_2 - 5x_2^2 + 18x_0x_1 - 2x_0x_2 + 17x_0^2 = 0 .$$

Ke kvadrice U přidáme přesně ty nevlastní body $(0 : x_1 : x_2)$, které splňují stejnou rovnici. To dává smysl, protože trojice (x_0, x_1, x_2) rovnici splňuje, právě když

(tx_0, tx_1, tx_2) rovnici splňuje (kde $0 \neq t \in \mathbb{R}$ je libovolné). Velkou výhodou je, že výraz na levé straně je kvadratická forma (bez lineárních členů a konstanty). Vznikne tak, že k lineárním členům rovnice kvadriky přidáme x_0 a ke konstantnímu x_0^2 . Naopak, z rovnice v projektivním rozšíření dostaneme původní rovnici dosazením $x_0 = 1$.

Definice 12.6. Nechť \mathbf{A} je reálný afinní prostor dimenze $n - 1$, S jeho soustava souřadnic, $P(\mathbf{Z})$ projektivní rozšíření \mathbf{A} a \bar{S} báze \mathbf{Z} indukovaná soustavou S . *Projektivním rozšířením* kvadriky U

$$[U]_S = \{(x_1, \dots, x_{n-1})^T : \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n-1} b_i x_i + c = 0\}$$

rozumíme množinu projektivních bodů \bar{U}

$$[\bar{U}]_{\bar{S}} = \{(x_0 : \dots : x_{n-1}) : \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n-1} b_i x_0 x_i + c x_0^2 = 0\}$$

Projektivní rozšíření jsme definovali pomocí rovnice zadávající kvadriku vzhledem k nějaké soustavě souřadnic. Přidané nevlastní body ale v případě „zajímavých“ kvadrik nezávisí na volbě rovnice ani soustavy. Jedno z možných zdůvodnění je, že přidáváme přesně limity bodů na kvadrice. Důkaz nebudeme formálně provádět, museli bychom předně vysvětlit, co přesně v této situaci myslíme limitou a co myslíme zajímavou kvadrikou.

Označme g_2 kvadratickou formu na \mathbf{Z} z definice projektivního rozšíření kvadriky, tj.

$$g_2(\mathbf{z}) = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n-1} b_i x_0 x_i + c x_0^2, \text{ kde } [\mathbf{z}]_{\bar{S}} = (x_0, \dots, x_{n-1})^T$$

a g příslušnou symetrickou bilineární. Máme

$$\bar{U} = \{\langle \mathbf{z} \rangle \in P(\mathbf{Z}) : g_2(\mathbf{z}) = 0\} .$$

Množinám projektivních bodů v $P(\mathbf{Z})$ definovaným tímto způsobem pomocí kvadratické formy na \mathbf{Z} říkáme *kvadriky* v $P(\mathbf{Z})$. Projektivní rozšíření kvadriky v \mathbf{A} je tedy kvadrika v projektivním rozšíření prostoru \mathbf{A} .

Z kapitoly o bilineárních formách (část 10.4 o signatuře) víme, že vzhledem k nějaké bázi B prostoru \mathbf{Z} má g_2 vyjádření

$$g_2(\mathbf{z}) = \pm(x'_0)^2 + \dots + \pm(x'_k)^2, \text{ kde } [\mathbf{z}]_B = (x'_0, \dots, x'_{n-1})^T ,$$

kde počet pořadě nulových, kladných a záporných členů udává signatura $(n_0(g), n_+(g), n_-(g))$. Množina M vektorů \mathbf{v} takových, že $g_2(\mathbf{z}) = 0$ má vzhledem k B vyjádření

$$\pm(x'_0)^2 + \dots + \pm(x'_k)^2 = 0 .$$

Projdeme si možnosti pro dimenze $n - 1 = 1, 2$ a 3 . Vektory báze můžeme proházet tak, že kladné členy jsou na začátku, následované zápornými. Navíc vynásobením rovnice -1 lze případně docílit otočení znamének, takže můžeme procházet jen případy $n_+(g) \geq n_-(g)$.

V dimenzi $n - 1 = 1$ máme následující možnosti.

- Signatura $(2, 0, 0)$, tj. g je nulová bilineární forma. Pak g neodpovídá projektivnímu rozšíření žádné kvadriky v \mathbf{A} .

- Signatura $(1, 1, 0)$, tj. rovnice M vzhledem k B je $(x'_0)^2 = 0$. Pak M je přímka procházející počátkem, \bar{U} je projektivní bod a U je bod (jako cvičení si rozmyslete, že \bar{U} nemůže být v tomto případě nevlastní bod).
- Signatura $(0, 2, 0)$, tj. rovnice M je $(x'_0)^2 + (x'_1)^2 = 0$. Pak $M = \{\mathbf{o}\}$ a \bar{U} i U jsou prázdné množiny.
- Signatura $(0, 1, 1)$, tj. rovnice M je $(x'_0)^2 - (x'_1)^2 = 0$. Pak M je dvojice přímek, \bar{U} je dvojice projektivních bodů a U je dvojice bodů (ani jeden z projektivních bodů nemůže být nevlastní, opět si rozmyslete jako cvičení).

V této dimenzi má U vzhledem k S rovnici $a_{11}x_1^2 + b_1x_1 + c = 0$, \bar{U} má vzhledem k \bar{S} rovnici $a_{11}x_1^2 + b_1x_0x_1 + cx_0^2 = 0$ a g má vzhledem k \bar{U} matici

$$\begin{pmatrix} c & b_1/2 \\ b_1/2 & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Prohozením vektorů v bázi \bar{U} a vynásobením $\sqrt{2}/2$ získáme bázi, vzhledem ke které má g matici

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & b_1 \\ b_1 & 2c \end{pmatrix}.$$

Signaturu g můžeme určit pomocí subdeterminantů. První subdeterminant je $a_{11} \neq 0$ a druhý je $D = 4a_{11}c - b_1^2$. Pokud je $D = 0$, pak je g singulární a má signaturu $(1, 1, 0)$ nebo $(1, 0, 1)$, takže U je jediný bod. Pokud je D kladné, pak je signatura $(0, 2, 0)$ nebo $(0, 0, 2)$ a U je prázdná množina. Ve zbylém případě, kdy je D záporné, pak je signatura $(0, 1, 1)$, takže U tvoří dva body. To je v souladu s tím, co víme o řešení kvadratických rovnic.

Pro dimenzi $n - 1 = 2$ máme:

- Signatura $(3, 0, 0)$, tj. g je nulová bilineární forma. Pak g neodpovídá projektivnímu rozšíření žádné kvadriky v \mathbf{A} .
- Signatura $(2, 1, 0)$, tj. rovnice M vzhledem k B je $(x'_0)^2 = 0$. Pak M je rovina procházející počátkem, \bar{U} je projektivní přímka a U je přímka.
- Signatura $(1, 2, 0)$, tj. rovnice M je $(x'_0)^2 + (x'_1)^2 = 0$. Pak M je přímka, \bar{U} je projektivní bod a U je buď prázdná množina (pokud \bar{U} je nevlastní bod), nebo bod.
- Signatura $(1, 1, 1)$, tj. rovnice M je $(x'_0)^2 - (x'_1)^2 = 0$. Pak M je dvojice rovin, \bar{U} je dvojice projektivních přímek a U je dvojice přímek (případ, že je jedna z projektivních přímek nevlastní opět neodpovídá projektivnímu rozšíření žádné kvadriky, viz cvičení).
- Signatura $(0, 3, 0)$, tj. rovnice M je $(x_0)^2 + (x'_1)^2 + (x'_2)^2 = 0$. Pak $M = \{\mathbf{o}\}$ a \bar{U} i U jsou prázdné množiny.
- Signatura $(0, 2, 1)$, tj. rovnice M je $(x_0)^2 + (x'_1)^2 - (x'_2)^2 = 0$. Pak M je kužel a U je elipsa, parabola nebo hyperbola.

Nejzajímavější je poslední případ, který nám dokazuje, že elipsa, parabola i hyperbola jsou skutečně kuželosečky (tj. průniky kuželové plochy s rovinou).

V dimenzi $n - 1 = 3$ probereme jen případy, kdy h je regulární.

- Signatura $(0, 4, 0)$. Pak $M = \{\mathbf{o}\}$.
- Signatura $(0, 3, 1)$, tj. rovnice M je $(x_0)^2 + (x'_1)^2 + (x'_2)^2 - (x'_3)^2 = 0$. Pak U je elipsoid, eliptický paraboloid nebo eliptický hyperboloid.
- Signatura $(0, 2, 2)$, tj. rovnice M je $(x_0)^2 + (x'_1)^2 - (x'_2)^2 - (x'_3)^2 = 0$. Pak U je přímkový hyperboloid nebo přímkový paraboloid.

Na rozdíl od dimenze $n - 1 = 2$ máme dva útvary v M (nikoliv jeden útvar – kužel), jejichž „sečky“ jsou zajímavé kvadriky.

12.3.2. *Podprostory na kvadrice.* Signatura má pěkný geometrický význam, určuje maximální dimenze podprostorů na kvadrice.

To uvidíme z následujícího tvrzení.

Tvrzení 12.7. *Nechť g je symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru \mathbf{Z} signatury $(n_0(g), n_+(g), n_-(g))$ a označme $d = n_0(g) + \min\{n_+(g), n_-(g)\}$ a $Q = \{\langle \mathbf{z} \rangle \in Z; g_2(\mathbf{z}) = 0\}$. Pak každý projektivní bod $\langle \mathbf{z} \rangle \in Q$ je obsažen v projektivním podprostoru $P(\mathbf{W})$ (prostoru $P(\mathbf{Z})$) dimenze $d - 1$, pro který $P(\mathbf{W}) \subseteq Q$. Navíc, žádný projektivní podprostor dimenze d kvadrika Q neobsahuje.*

Důkaz.

□

Například pro signaturu $(0, 3, 1)$ (kdy U je elipsoid, eliptický paraboloid, eliptický hyperboloid) leží na kvadrice body, ale ne přímky, pro signaturu $(0, 2, 2)$ (přímkový hyperboloid, přímkový paraboloid) leží na kvadrice přímky (dokonce každým bodem prochází přímka ležící na kvadrice), ale ne roviny.

12.3.3. *Změna soustavy souřadnic.* Máme kvadriku U v afinním prostoru \mathbf{A} zadanou vzhledem k soustavě souřadnic S a chceme přepočítat vyjádření do nové soustavy S' . V afinním prostoru bychom výpočet mohli provést tak, že nejprve přepočítáme rovnici vzhledem k novému počátku, pak vyjádříme kvadratickou část v nové bázi a nakonec vyjádříme lineární část v nové bázi. Na příkladu ukážeme, že místo těchto třech úkonů lze v projektivním rozšíření provést jenom jeden – vyjádříme kvadratickou formu g_2 v jiné bázi prostoru \mathbf{Z} .

Příklad 12.8. Vezmeme opět kvadriku v \mathbb{R}^2 z příkladu 11.68.

$$U = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 - 6x_1x_2 - 5x_2^2 + 18x_1 - 2x_2 + 17 = 0\}$$

Je zadaná vzhledem ke kanonické soustavě souřadnic S . Najdeme vyjádření U vzhledem k soustavě souřadnic

$$S' = (a', \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Projektivní rozšíření kvadriky U má vzhledem k bázi $\bar{S} = (\mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ prostoru \mathbf{Z} vyjádření

$$[\bar{U}]_{\bar{S}} = \{(x_0 : x_1 : x_2) : 3x_1^2 - 6x_1x_2 - 5x_2^2 + 18x_0x_1 - 2x_0x_2 + 17x_0^2 = 0\}$$

Symetrická bilineární forma g příslušná kvadratické formě na levé straně má vzhledem k \bar{S} matici

$$[g]_{\bar{S}} = \begin{pmatrix} 17 & 9 & -1 \\ 9 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

K určení $[g]_{\bar{S}'}$ potřebujeme matici přechodu od \bar{S}' k \bar{S} . Protože $[a']_S = (1, 1)^T$, $[\mathbf{v}'_1]_S = (1, -1)^T$ a $[\mathbf{v}'_2]_S = (-2, 3)^T$, v \mathbf{Z} je $[\mathbf{a}']_{\bar{S}} = (1, 1, 1)^T$, $[\mathbf{v}'_1]_{\bar{S}} = (0, 1, -1)^T$ a $[\mathbf{v}'_2]_{\bar{S}} = (0, -2, 3)^T$, takže

$$C = [\text{id}]_{\bar{S}'}^{\bar{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Matice g vzhledem k $\overline{S'}$ je proto

$$\begin{aligned} [g]_{\overline{S'}} &= C^T [g]_{\overline{S}} C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 9 & -1 \\ 9 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 25 & 9 & -9 \\ 10 & 6 & 2 \\ -21 & -15 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 18 & -45 \\ 18 & 4 & -6 \\ -45 & -6 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nyní

$$[\overline{U}]_{\overline{S'}} = \{(x'_0 : x'_1 : x'_2) : 25(x'_0)^2 + 4(x'_1)^2 + 3(x'_2)^2 + 36x'_0x'_1 - 90x'_0x'_2 - 12x'_1x'_2 = 0\}$$

Vyjádření U vzhledem k S' získáme dosazením $x'_0 = 1$.

$$\begin{aligned} [U]_{S'} &= \{(x'_1, x'_2)^T : 25 + 4(x'_1)^2 + 3(x'_2)^2 + 36x'_1 - 90x'_2 - 12x'_1x'_2 = 0\} \\ &= \{(x'_1, x'_2)^T : 4(x'_1)^2 - 12x'_1x'_2 + 3(x'_2)^2 + 36x'_1 - 90x'_2 + 25 = 0\} \end{aligned}$$

12.3.4. *Tečny a poláry.* Uvažujme kvadratickou formu g_2 na reálném vektorovém prostoru \mathbf{Z} dimenze n , příslušnou symetrickou bilineární formu g a kvadriku

$$Q = \{\langle \mathbf{z} \rangle : g_2(\mathbf{z}) = 0\}$$

v $P(\mathbf{Z})$. (Zajímá nás zejména situace, kdy $P(\mathbf{Z})$ je projektivním rozšířením afinního prostoru \mathbf{A} dimenze $n - 1$ a $Q = \overline{U}$ je projektivním rozšířením kvadriky U v \mathbf{A} .)

Odhalíme nyní geometrický význam g -ortogonálních doplňků projektivních bodů. Uvažujme nejprve projektivní bod $\langle \mathbf{z} \rangle$ na kvadrice Q , tj. $g_2(\mathbf{z}) = 0$. Podprostor $Y = \langle \mathbf{z} \rangle^{\perp g}$ obsahuje vektor \mathbf{z} , protože $g(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = 0$, a má buď dimenzi $n - 1$ nebo n v případě, že \mathbf{z} leží v radikálu g . Vektory v radikálu budeme stručně diskutovat později, předpokládejme tedy $\mathbf{z} \notin \text{rad } g$, neboli \mathbf{Y} je nadrovina v \mathbf{Z} a $P(\mathbf{Y})$ je nadrovina v $P(\mathbf{Z})$ obsahující projektivní bod $\langle \mathbf{z} \rangle$. Podíváme se na vzájemnou polohu kvadriky Q a projektivní přímky $P(\langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle)$ procházející bodem $\langle \mathbf{z} \rangle$. Pro libovolnou lineární kombinaci $s\mathbf{z} + t\mathbf{x}$ máme

$$g_2(s\mathbf{z} + t\mathbf{x}) = s^2g_2(\mathbf{z}) + 2stg(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + t^2g_2(\mathbf{x}) = t(2sg(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + tg_2(\mathbf{x})) .$$

Jsou tři možnosti:

- Bod $\langle \mathbf{x} \rangle$ leží v $P(\mathbf{Y})$ a na Q , čili $g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$ a $g_2(\mathbf{x}) = 0$. Pak celá projektivní přímka $P(\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle)$ leží na kvadrice Q , protože výraz nahoře je vždy nulový.
- Bod $\langle \mathbf{x} \rangle$ leží v $P(\mathbf{Y})$ a neleží na Q , čili $g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$ a $g_2(\mathbf{x}) \neq 0$. Pak přímka $P(\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle)$ protne Q pouze v bodě $\langle \mathbf{z} \rangle$, protože je výraz roven $t^2g_2(\mathbf{x})$, což vyjde 0 právě tehdy, když $t = 0$.
- Bod $\langle \mathbf{x} \rangle$ neleží v $P(\mathbf{Y})$, čili $g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \neq 0$. Pak přímka $P(\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle)$ protne Q právě ve dvou bodech, protože výraz je nulový právě tehdy, když $t = 0$ nebo $s = -tg_2(\mathbf{x})/2g(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, takže Q protíná přímku v bodech $\langle \mathbf{z} \rangle$ a $\langle (-tg_2(\mathbf{x})/2g(\mathbf{x}, \mathbf{z}))\mathbf{z} + t\mathbf{x} \rangle = \langle (g_2(\mathbf{x})/2g(\mathbf{x}, \mathbf{z}))\mathbf{z} + \mathbf{x} \rangle$.

Vidíme, že nadrovina $P(\mathbf{Y})$ sestává právě z těch bodů \mathbf{x} , pro které přímka $P(\langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle)$ buď leží celá na kvadrice, nebo tuto kvadriku protíná právě v jednom bodě. Z toho vidíme, že $P(\mathbf{Y})$ je *tečná nadrovina* ke Q , aniž bychom se museli uchýlovat k výpočtu derivací, apod. V dimenzi $n - 1 = 2$ mluvíme o *tečně*, v dimenzi $n - 1 = 3$ mluvíme o *tečné rovině*.

Příklad 12.9. Vezmeme kvadriku U v \mathbb{R}^2 analyzovanou v části 10.4.5

$$U = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 10x_1 - 14x_2 + 7 = 0\}$$

zadanou vzhledem ke kanonické soustavě souřadnic S . Určíme tečnu v bodě $c = (3, 2)^T$. (Dosazením se přesvědčíme, že tento bod na U leží, takže úloha dává smysl.)

Projektivní rozšíření je

$$\bar{U} = \{\langle \mathbf{z} \rangle : g_2(\mathbf{z}) = 0\},$$

kde

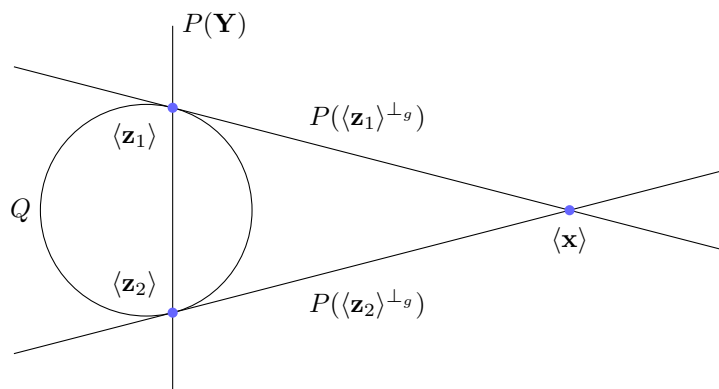
$$[g]_{\bar{S}} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -7 \\ -5 & 3 & 1 \\ -7 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vyjádření vektoru c vzhledem k bázi \bar{S} je $(1, 3, 2)^T$ a jeho g -ortogonální doplněk je podle pozorování 10.16 roven

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{c} \rangle^{\perp_g} &= \text{Ker}([\mathbf{c}]_{\bar{S}}[g]_{\bar{S}}) = \text{Ker} \left((1, 3, 2) \begin{pmatrix} 7 & -5 & -7 \\ -5 & 3 & 1 \\ -7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Ker}(-22, 6, 2) = \langle (3, 11, 0)^T, (1, 0, 11)^T \rangle \end{aligned}$$

Tečna \bar{U} procházející bodem c je tedy projektivní přímka procházející projektivními body $(3 : 11 : 0)$, $(1 : 0 : 11)$ (souřadnice jsou vzhledem k \bar{S}). Takže tečna U procházející bodem c je přímka procházející body $(11/3, 0)^T$ a $(0, 11)^T$.

Pro libovolný projektivní bod $\langle \mathbf{x} \rangle \in P(\mathbf{Z})$, který neleží v $P(\text{rad}(g))$, je $P(\mathbf{Y}) = P(\langle \mathbf{x} \rangle^{\perp_g})$ projektivní nadrovina v $P(\mathbf{Z})$, nazýváme jí *polární nadrovina* bodu $\langle \mathbf{x} \rangle$. Zjistili jsme, že pro bod na kvadrice je její polární nadrovina tečnou nadrovinou. Ze symetrie bilineární formy g plyne, že bod $\langle \mathbf{z} \rangle$ leží v polární nadrovině bodu $\langle \mathbf{x} \rangle$ právě tehdy, když bod $\langle \mathbf{x} \rangle$ leží v polární nadrovině bodu $\langle \mathbf{z} \rangle$. Z toho vidíme geometrický význam bodů v průniku $Q \cap P(\mathbf{Y})$ – jsou jimi právě body $\langle \mathbf{z} \rangle \in Q$, jejichž tečná nadrovina obsahuje $\langle \mathbf{x} \rangle$ a body v radikálu g .



OBRÁZEK 30. Polární nadrovina $P(\mathbf{Y}) = P(\langle \mathbf{x} \rangle^{\perp_g})$ projektivního bodu $\langle \mathbf{x} \rangle$ a tečné nadroviny $P(\langle \mathbf{z}_1 \rangle^{\perp_g})$, $P(\langle \mathbf{z}_2 \rangle^{\perp_g})$ procházející bodem $\langle \mathbf{x} \rangle$.

Příklad 12.10. Najdeme tečny ke kvadrice

$$U = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 10x_1 - 14x_2 + 7 = 0\}$$

procházející bodem $c = (0, 11)^T$.

Budeme používat značení z předchozího příkladu. Najdeme poláru bodu $[c]_{\overline{S}} = (1 : 0 : 11)$.

$$\begin{aligned} \langle [c]^{\perp g} \rangle_{\overline{S}} &= \text{Ker} \left((1, 0, 11) \begin{pmatrix} 7 & -5 & -7 \\ -5 & 3 & 1 \\ -7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Ker}(-70, 6, 26) = \langle (3, 35, 0)^T, (13, 0, 35)^T \rangle \end{aligned}$$

Polára bodu c je tedy přímka procházející body $(35/3, 0)^T$ a $(0, 35/13)^T$. Určíme průsečíky s kvadrikou U . Rovnice této přímky je

$$3x_1 + 13x_2 = 35 .$$

Dosazením do rovnice U dostáváme

$$\begin{aligned} 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 10x_1 - 14x_2 + 7 &= 0 \\ 9x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 - 30x_1 - 42x_2 + 21 &= 0 \\ (35 - 13x_2)^2 + 2(35 - 13x_2)x_2 + 9x_2^2 - 10(35 - 13x_2) - 42x_2 + 21 &= 0 \\ 1225 - 910x_2 + 169x_2^2 + 70x_2 - 26x_2^2 + 9x_2^2 - 350 + 130x_2 - 42x_2 + 21 &= 0 \\ 152x_2^2 - 752x_2 + 896 &= 0 \\ 19x_2^2 - 94x_2 + 112 &= 0 \end{aligned}$$

Tato kvadratická rovnice má řešení $x_2 = 2$ a $x_2 = 56/19$, dosazením do rovnice přímky získáme průsečíky $(3, 2)^T$ a $(-21/19, 56/19)^T$. Celkem jsme získali dvě tečny procházející bodem $(0, 11)^T$ – jedna z nich prochází bodem $(3, 2)^T$, druhá z nich bodem $(-21/19, 56/19)^T$.

(Hledali jsme pouze vlastní průsečíky. Protože z části 10.4.5 víme, že jde o elipsu, takže projektivní rozšíření kvadriky žádné nevlastní body neobsahuje.)

V případě, že je g regulární, podle věty 10.21 o ortogonálním doplňku platí $(\langle [z]^{\perp g} \rangle)^{\perp g} = \langle z \rangle$. Z toho vyplývá, že polární nadrovina projektivního bodu $\langle z \rangle$ je tímto bodem jednoznačně určena. Naopak, libovolná nadrovina $P(\mathbf{Y})$ je polární nadrovinou jediného projektivního bodu, a to $P(\mathbf{Y}^{\perp g})$. Tomuto bodu říkáme *pól* nadroviny $P(\mathbf{Y})$. Pól tečné nadroviny je její *bod dotyku*.

Příklad 12.11. Pro stejnou kvadriku

$$U = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 10x_1 - 14x_2 + 7 = 0\}$$

najdeme průsečík tečen v bodech $(3, 2)^T$ a $(-21/19, 56/19)^T$. (Z předchozího příkladu víme, že vyjde $(0, 11)^T$.)

Pracujeme opět v projektivním rozšíření. Průsečík tečen je pólem přímky procházející projektivními body $[c]_{\overline{S}} = (1 : 3 : 2)$, $[d]_{\overline{S}} = (1 : -21/19 : 56/19) = (19 :$

$-21 : 56$).

$$\begin{aligned} [\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle^{\perp_g}]_{\overline{S}} &= \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 19 & -21 & 56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -5 & -7 \\ -5 & 3 & 1 \\ -7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} -22 & 6 & 2 \\ -154 & -102 & 14 \end{pmatrix} = \langle (1, 0, 11)^T \rangle \end{aligned}$$

Průsečík tečen je projektivní bod o homogenních souřadnicích $(1 : 0 : 11)$ (vzhledem k \overline{S}), což je afinní bod $(0, 11)^T$.

Ještě se podíváme na projektivní body $\langle \mathbf{z} \rangle$ v radikálu $\text{rad}(g)$. Diskuze o vzájemné poloze projektivní přímky $P(\langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle)$ a kvadriky $Q = \overline{U}$ se zjednoduší: buď $\langle \mathbf{x} \rangle \in Q$ a pak leží přímka celá na kvadrice, nebo $\langle \mathbf{x} \rangle \notin Q$ a přímka protne kvadriku jenom v bodě $\langle \mathbf{z} \rangle$.

Uvažujme nějaký doplněk \mathbf{Y} radikálu, tj. $\text{rad}(g) \oplus \mathbf{Y} = \mathbf{Z}$. Kvadrika Q je sjednocením všech přímek spojující body v $P(\text{rad}(g))$ a body v $Q \cap P(\mathbf{Y})$ (cvičení). Například, je-li signatura g rovna $(2, 1, 1)$, je $P(\text{rad}(g))$ projektivní přímka. Ať \mathbf{Y} je doplněk $\text{rad}(g)$, tj. $P(\mathbf{Y})$ je přímka neprotínající $P(\text{rad}(g))$. Signatura zúžení g na Y je $(0, 1, 1)$, takže kvadriku $Q \cap P(\mathbf{Y})$ tvoří dva projektivní body, řekněme $\langle \mathbf{a} \rangle, \langle \mathbf{b} \rangle$. Celá kvadrika Q je tvořena sjednocením přímek spojující body z $P(\text{rad}(g))$ s jedním z bodů $\langle \mathbf{a} \rangle, \langle \mathbf{b} \rangle$. Původní kvadrika U v afinním prostoru \mathbf{A} je tedy dvojice rovin, ty jsou rovnoběžné nebo různoběžné, podle toho, zda je přímka $P(\text{rad}(g))$ nevlastní nebo vlastní.

OBRAZEK

12.3.5. *Afinní a metrická klasifikace.* Nyní si ukážeme, jak projektivní prostory usnadňují afinní a metrickou klasifikaci kvadrik. Provedeme nejprve metrickou klasifikaci a potom si všimneme, že situace se značně zjednoduší, pokud nám stačí klasifikace afinní (na rozdíl od postupu v kapitole o afinních prostorech).

Uvažujme tedy afinní eukleidovský prostor \mathbf{A} dimenze $n - 1$ se skalárním součinem $\langle | \rangle$, kvadriku U v \mathbf{A} , projektivní rozšíření $P(\mathbf{Z})$ prostoru \mathbf{A} a projektivní rozšíření \overline{U} kvadriky U dané kvadratickou formou g_2 (a příslušnou symetrickou bilineární formou g):

$$\overline{U} = \{ \langle \mathbf{z} \rangle : g_2(\mathbf{z}) = 0 \} .$$

Chceme najít kartézskou soustavu souřadnic $S' = (a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$, vzhledem ke které má kvadrika U co nejjednodušší rovnici. Podíváme se na problém v projektivním rozšíření – chceme, aby matice bilineární formy g vzhledem k indukované bázi $S' = (\mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ byla co nejjednodušší.

Podaří se nám docílit jednoho z následujících tvarů $[g]_{\overline{S'}}$:

$$\begin{pmatrix} g_2(\mathbf{a}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_2(\mathbf{v}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & g_2(\mathbf{v}_2) & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_2(\mathbf{v}_{n-1}) \end{pmatrix}$$

nebo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & g(\mathbf{a}, \mathbf{v}_{n-1}) \\ 0 & g_2(\mathbf{v}_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2(\mathbf{v}_2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_2(\mathbf{v}_{n-2}) & 0 \\ g(\mathbf{a}, \mathbf{v}_{n-1}) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $g(\mathbf{a}, \mathbf{v}_{n-1}) \neq 0$. V prvním případě bude

$$[\bar{U}]_{\bar{S}} = \{(x_0 : \dots : x_{n-1}) : g_2(\mathbf{a})x_0^2 + g_2(\mathbf{v}_1)x_1^2 + \dots + g_2(\mathbf{v}_{n-1})x_{n-1}^2 = 0\},$$

čili

$$[U]_{S'} = \{(x_1, \dots, x_{n-1})^T : g_2(\mathbf{a}) + g_2(\mathbf{v}_1)x_1^2 + \dots + g_2(\mathbf{v}_{n-1})x_{n-1}^2 = 0\},$$

to jsou středové kvadriky. V druhém případě

$$[\bar{U}]_{\bar{S}} = \{(x_0 : \dots : x_{n-1}) : 2g(\mathbf{a}, \mathbf{v}_{n-1})x_0x_{n-1} + g_2(\mathbf{v}_1)x_1^2 + \dots + g_2(\mathbf{v}_{n-2})x_{n-2}^2 = 0\},$$

čili

$$[U]_{S'} = \{(x_1, \dots, x_{n-1})^T : 2g(\mathbf{a}, \mathbf{v}_{n-1})x_{n-1} + g_2(\mathbf{v}_1)x_1^2 + \dots + g_2(\mathbf{v}_{n-2})x_{n-2}^2 = 0\}$$

a to jsou kvadriky nestředové.

12.3.6. Středové kvadriky. Chceme-li získat první tvar, uvědomíme si, že abychom dostali v prvním řádku nuly (až na pozici $(1, 1)$) musí být vektor \mathbf{a} g -ortogonální ke všem vektorům $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$. Protože $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ tvoří bázi \mathbf{V} , musí \mathbf{a} ležet ve V^{\perp_g} . Jinými slovy, v $P(V^{\perp_g})$ musí ležet vlastní bod. Tato podmínka je také postačující: zvolíme libovolně vlastní bod $a \in P(V^{\perp_g})$, označíme $f = g|_V$ a najdeme f -ortogonální ortonormální bázi \mathbf{V} . Nyní skutečně máme slíbený tvar: $g(\mathbf{a}, \mathbf{v}_i) = 0$ pro libovolné i , protože $\mathbf{a} \in V^{\perp_g}$; $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ je ortonormální báze \mathbf{V} , takže $(a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ je kartézská soustava; a $g(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$ pro libovolné $i \neq j$, protože $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ je g -ortogonální posloupnost.

Z rovnice kvadriky je vidět, že kvadrika je středově souměrná podle bodu a . Pokud g je regulární, pak nemáme žádnou libovůli ve volbě a , neboť $P(V^{\perp_g})$ je projektivní bod – pól nevlastní nadroviny. Nazýváme jej *středem*.

Příklad 12.12. Provedeme znovu metrickou klasifikaci kvadriky U v \mathbb{R}^2 (se standardním skalárním součinem) z příkladu 11.68:

$$U = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 - 6x_1x_2 - 5x_2^2 + 18x_1 - 2x_2 + 17 = 0\}$$

Při užívání značení máme

$$[g]_{\bar{S}} = \begin{pmatrix} 17 & 9 & -1 \\ 9 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Vypočítáme ortogonální doplněk $V = \mathbb{R}^2 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$.

$$\begin{aligned} [V^{\perp_g}]_{\bar{S}} &= \text{Ker} \left(([\mathbf{e}_1]_{\bar{S}} | [\mathbf{e}_2]_{\bar{S}})^T [g]_{\bar{S}} \right) = \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 9 & -1 \\ 9 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} = \langle (1, -2, 1)^T \rangle \end{aligned}$$

Kvadrík je středová a její střed je $[a]_{\overline{S}} = (1 : -2 : 1)$, neboli $a = (-2, 1)^T$. Všimněte si, že obecně stačí vlastně škrtnout první řádek matice formy g a vyřešit příslušnou homogenní soustavu rovnic!

Budeme ještě potřebovat hodnotu $g(\mathbf{a}, \mathbf{a})$. Protože $[a]_{\overline{S}} = (1, -2, 1)^T$, máme

$$g_2(\mathbf{a}) = (1, -2, 1) \begin{pmatrix} 17 & 9 & -1 \\ 9 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 .$$

Zbývá určit f -ortogonální ortonormální bázi \mathbb{R}^2 , kde $f = g|_{\mathbb{R}^2}$. Matice h vzhledem ke kanonické bázi je

$$[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Je to vlastně přesně matice kvadratické části $[U]_S$ z příkladu 11.68. Vlastní čísla matice $[f]_{K_2}$ jsou 4 a -6 a příslušné znormované vlastní vektory jsou $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1)$ a $\frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$.

Vzhledem k bázi $\overline{S}' = (\mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ prostoru \mathbf{Z} máme

$$\begin{aligned} [\overline{U}]_{\overline{S}'} &= \{(x_0 : x_1 : x_2) : f_2(\mathbf{a})x_0^2 + f_2(\mathbf{v}_1)x_1^2 + f_2(\mathbf{v}_2)x_2^2 = 0\} \\ &= \{(x_0 : x_1 : x_2) : -2x_0^2 + 4x_1^2 - 6x_2^2 = 0\} \end{aligned}$$

a vzhledem k soustavě souřadnic $S' = (a, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je

$$\begin{aligned} [U]_{S'} &= \{(x_1, x_2)^T : -2 + 4x_1^2 - 6x_2^2 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2)^T : 2x_1^2 - 3x_2^2 = 1\} \end{aligned}$$

Ze získaného tvaru pro středové kvadriky nahlédneme, že k afinní klasifikaci stačí znát signaturu g a signaturu $f = g|_V$. Uvažujme například kvadrík, pro kterou je signatura g rovná $(1, 2, 1)$ a signatura f rovná $(1, 1, 1)$. Vzhledem k nalezené soustavě \overline{S}' musí mít \overline{U} rovnici $d_0x_0^2 + d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2 = 0$, kde mezi čísla d_0, d_1, d_2, d_3 je jedno nulové, dvě kladná a jedno záporné (kvůli signatuře f) a mezi čísla d_1, d_2, d_3 je jedno nulové, jedno kladné a jedno záporné (kvůli signatuře g). Z toho vyplývá, že $d_0 > 0$ a rovnice \overline{U} (po případném proházení vektorů v soustavě S') je tvaru $e_0x_0^2 + e_1x_1^2 + e_2x_2^2 = 0$, kde $e_0, e_1, e_2 > 0$. Vzhledem k S je proto rovnice U tvaru $e_0 + e_1x_1^2 - e_2x_2^2 = 0$, takže jde o hyperbolickou válcovou plochu.

Pro středové kvadriky vidíme z tvaru matice, že v signatuře f je právě jedno z čísel o jedna menší než v signatuře g . Pro nestředové kvadriky z tvaru (který odvodíme v příští části) vidíme, že vrchol f má o jedna větší dimenzi než vrchol g , takže i to, zda je kvadrík středová či nestředová poznáme ze signatur f a g .

V tabulce 1 je výčet všech středových kvadrik a příslušných signatur. Uvádíme vždy jen možnosti $n_+(g) \geq n_-(g)$, zbylé dostaneme vynásobením g (a tím f) -1 , tj. prohozením druhé a třetí složky obou signatur.

Příklad 12.13. Ještě jednou se podíváme na kvadrík

$$U = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 - 6x_1x_2 - 5x_2^2 + 18x_1 - 2x_2 + 17 = 0\} .$$

Tentokrát nás bude zajímat pouze afinní klasifikace. K tomu stačí určit signaturu g a f .

Dimenze	Signatura g	Signatura $f = g _V$	Kvadrika
$n - 1 = 1$	(1, 1, 0) (0, 2, 0) (0, 1, 1)	(0, 1, 0) (0, 1, 0) (0, 1, 0)	bod prázdná množina dva body
$n - 1 = 2$	(2, 1, 0) (1, 2, 0) (1, 2, 0) (1, 1, 1) (1, 1, 1) (0, 2, 1) (0, 2, 1) (0, 3, 0)	(1, 1, 0) (1, 1, 0) (0, 2, 0) (1, 1, 0) (0, 1, 1) (0, 2, 0) (0, 1, 1) (0, 2, 0)	přímka prázdná množina bod dvě rovnoběžné přímky dvě různoběžné přímky elipsa hyperbola prázdná množina
$n - 1 = 3$	(3, 1, 0) (2, 2, 0) (2, 2, 0) (2, 1, 1) (2, 1, 1) (1, 3, 0) (1, 3, 0) (1, 2, 1) (1, 2, 1) (1, 2, 1) (0, 4, 0) (0, 3, 1) (0, 3, 1) (0, 2, 2)	(2, 1, 0) (2, 1, 0) (1, 2, 0) (2, 1, 0) (1, 1, 1) (1, 2, 0) (0, 3, 0) (1, 2, 0) (1, 1, 1) (0, 2, 1) (0, 3, 0) (0, 3, 0) (0, 2, 1) (0, 2, 1)	rovina prázdná množina přímka dvě rovnoběžné roviny dvě různoběžné roviny prázdná množina bod eliptická válcová plocha hyperbolická válcová plocha kuželová plocha prázdná množina elipsoid dvojdílný hyperboloid přímkový hyperboloid

TABULKA 1. Afinní klasifikace středových kvadrik

Uřídíme signaturu g pomocí subdeterminantů.

$$C = [g]_{\overline{S}} = \begin{pmatrix} 17 & 9 & -1 \\ 9 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Subdeterminanty jsou $|C^{(1)}| = 17 > 0$, $|C^{(2)}| = -30 < 0$, $|C^{(3)}| = 48 > 0$. Znaménka $|C^{(1)}|$, $|C^{(1)}||C^{(2)}|$, $|C^{(2)}||C^{(3)}|$ jsou proto +, -, - a signatura (0, 1, 2).

Signaturu f určíme z matice

$$[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Ze subdeterminantů 3, -24 dostáváme, že signatura f je (0, 1, 1). Kvadrika je tedy hyperbola.

12.3.7. *Nestředové kvadriky.* Ještě je potřeba vyřešit druhý případ, nestředové kvadriky, kdy $P(V^{\perp_g})$ neobsahuje žádný vlastní bod. TODO

12.3.8. *Vztah kvadriky a její rovnice.*

Cvičení

1. Prepinace

Dimenze	Signatura g	Signatura $f = g _V$	Kvadrík
$n - 1 = 2$	(0, 2, 1)	(1, 1, 0)	parabola
$n - 1 = 3$	(1, 2, 1)	(2, 1, 0)	parabolická válcová plocha
	(0, 3, 1)	(1, 2, 0)	eliptický paraboloid
	(0, 2, 2)	(1, 1, 1)	přímkový paraboloid

TABULKA 2. Afinní klasifikace nestředových kvadrik

2. Projektivní rovina nad \mathbb{Z}_p
3. Overit axiomy vektorového prostoru pro projektivní rozšíření
4. Afinní kombinace a kombinace odpovídající vektorům
5. Situace "signatura (1,1,1) a jedna přímka nevlastní" vzniká z přímek procházejících počátkem

OBSAH

1. Předpoklady	1
1.1. Komplexní čísla	1
1.2. Komplexní rovina	5
1.3. Teorie čísel	8
1.4. Zobrazení	8
2. Řešení soustav lineárních rovnic	8
2.1. Aplikace	8
2.2. Geometrická interpretace, řádkový pohled	11
2.3. Příklady	13
2.4. Řešení obecné soustavy rovnic Gaussovou eliminací	19
2.5. Sloupcový geometrický pohled.	23
2.6. Praktické problémy při numerickém řešení velkých soustav rovnic	24
3. Tělesa	27
3.1. Motivace	27
3.2. Definice tělesa	29
3.3. Tělesa \mathbb{Z}_p	31
3.4. Charakteristika	34
3.5. Další příklady těles	35
4. Matice	39
4.1. Matice a jednoduché operace	39
4.2. Násobení matic	40
4.3. Maticový zápis soustavy lineárních rovnic	45
4.4. Vlastnosti maticových operací	46
4.5. Další aplikace	48
4.6. Blokové matice	50
4.7. Regulární matice	51
5. Vektorové prostory	61
5.1. Definice, příklady a základní vlastnosti	61
5.2. Podprostory	64
5.3. Lineární závislost a nezávislost	70
5.4. Báze	75
5.5. Dimenze podprostorů určených maticí, soustavy rovnic podruhé	84
5.6. Průnik a součet podprostorů	89
5.7. Prostory nekonečné dimenze	93
5.8. Samoopravné kódy	94
6. Determinant	106
6.1. Motivace	106
6.2. Permutace	108
6.3. Definice determinantu a základní vlastnosti	114
6.4. Rozvoj, adjungovaná matice	123
6.5. Vandermondův determinant	127
7. Lineární zobrazení	130
7.1. Definice a příklady	130
7.2. Matice lineárního zobrazení	132
7.3. Operace s lineárními zobrazeními	137
7.4. Jádro, obraz	139
8. Skalární součin	143

8.1. Standardní skalární součin v \mathbb{R}^n a \mathbb{C}^n	143
8.2. Obecný skalární součin	145
8.3. Kolmost	151
8.4. Ortogonální projekce	160
8.5. Gram-Schmidtova ortogonalizace, QR-rozklad	167
8.6. Unitární a ortogonální matice	172
9. Vlastní čísla a vlastní vektory	175
9.1. Několik úloh	175
9.2. Vlastní čísla a vlastní vektory	177
9.3. Charakteristický polynom.	181
9.4. Diagonalizovatelné operátory	186
9.5. Shrnutí - řešení diferenční rovnice v případě, že matice přechodu je diagonalizovatelná.	194
9.6. Řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic s diagonalizovatelnou maticí.	195
9.7. Invariantní podprostory	198
9.8. Jordanovo	199
9.9. Google	215
9.10. Unitární podobnost	220
10. Bilineární formy	229
10.1. Matice	230
10.2. Symetrické a antisymetrické formy	233
10.3. Ortogonální báze	235
10.4. Ortogonální báze nad \mathbb{R}	244
11. Afinity prostory	255
11.1. Definice afinního prostoru	255
11.2. Lineární kombinace bodů	260
11.3. Podprostory	265
11.4. Orientace, objem, vektorový součin	279
11.5. Afinní zobrazení	284
11.6. Kvadriky	290
12. Projektivní prostory	300
12.1. Definice projektivního prostoru	300
12.2. Projektivní rozšíření afinního prostoru	303
12.3. Kvadriky	307
Obsah	320