Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Zadání
Verze ze dne 14. října 2021

14 Permutace a determinanty

Cíle cvičení:

- Procvičit výpočet determinantů.
- Naučit se počítat znaménko permutace.

Řešené příklady:

Úloha 14.1. Nechť $p = (135)(4798)(26)$ a $q = (18)(247693)$ jsou dvě permutace z S_9. Spočítejte permutace $p \circ q$, $q \circ p$, p^{-1} a q^{-1}.

Úloha 14.2. Určete znaménka permutací $p = (17)(36)(2458)$, p^{-1}, $q = (245)(3687)$, $r = (13)(2675)$, $p \circ q \circ r, q^{-1} \circ r \circ p^{-1} \circ q \in S_8$.

Úloha 14.3. Napište permutace $p = (13475)$ a $q = (19)(267)(3548)$ z S_9 jako součin transpozic.

Úloha 14.4. Spočítejte nad tělesy $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ determinanty matic

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{(d)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Úloha 14.5. Rozhodněte, pro která reálná a jsou regulární reálné matice

$$P(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(a) = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(a) \cdot Q(a), \quad P(a)^{257} \cdot Q(a)^{374}.$$

Další základní příklady k počítání:

Úloha 14.6. Spočítejte determinant matice

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

nad tělesem racionálních čísel.

Úloha 14.7. Rozhodněte, pro která $x \in \mathbb{Z}_5$ je matice

$$\begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix}$$

nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ singulární.

Úloha 14.8. (a) Vyřešte nad reálnými čísly soustavu rovnic $A\mathbf{x} = (1,0,0)^T$ s reálným parametrem a, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2a+1 & a & 2a \\ a & 1 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

Použijte Cramerovo pravidlo.

(b) Vyjádřete spočtené $\det A_i$, kde A_i je matice A s i-tým sloupcem nahrazeným pravou stranou soustavy, pomocí algebraických doplňků $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ (viz definice ve skriptech). Už vidíte, že opravdu platí $A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}$? (Nápověda: Determinant A lze spočíst snadno pomocí determinantů A_1 až A_3. Dále $\mathbf{x} = A^{-1}(1,0,0)^T$ je první sloupec A^{-1}.)

Úloha 14.9. Určete determinant matice $n \times n$, která vznikne jako levý horní roh Pascalova trojúhelníku:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \dots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Úloha 14.10. K matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

určete matici adjungovanou a matici inverzní.

Úloha 14.11. Určete objem rovnoběžnostěnu vytyčeného vektory $(1,1,0)$, $(3,5,-2)$ a $(4,0,7)$.

Obtížnější příklady

Úloha 14.12. Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Úloha 14.13. Spočtěte determinant matice A a pomocí něj element na pozici $(1,1)$ matice A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$