Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Řešení
Verze ze dne 14. října 2021

14 Permutace a determinanty

Cíle cvičení:

- Procvičit výpočet determinantů.
- Naučit se počítat znaménko permutace.

Řešené příklady:

Úloha 14.1. Nechť $p = (135)(4798)(26)$ a $q = (18)(247693)$ jsou dvě permutace z S_9. Spočítejte permutace $p \circ q$, $q \circ p$, p^{-1} a q^{-1}.

Řešení. Nejprve přímo použitím definice snadno zjistíme hodnoty (skládáme zprava doleva):

$$p \circ q = (1495)(27)(368), \quad q \circ p = (129)(3587)(46).$$

Dále snadno nahlédneme, že inverzní permutací je právě „zrcadlový obraz“ permutace, tedy

$$p^{-1} = (62)(8974)(531), \quad q^{-1} = (18)(239674).$$

Úloha 14.2. Určete znaménka permutací $p = (17)(36)(2458)$, p^{-1}, $q = (245)(3687)$, $r = (13)(2675)$, $p \circ q \circ r, q^{-1} \circ r \circ p^{-1} \circ q \in S_8$.

Řešení. Nejprve spočítáme cykly sudé délky nebo počet všech (tedy i triviálních) cyklů, abychom zjistili, že

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn} p &= \operatorname{sgn}((17)(36)(2458)) = (-1)^{8-3} = -1, \\
\operatorname{sgn} q &= \operatorname{sgn}((1)(245)(3687)) = (-1)^{8-3} = -1, \\
\operatorname{sgn} r &= \operatorname{sgn}((13)(2675)(4)(8)) = (-1)^{8-4} = 1.
\end{aligned}$$

V předchozí úloze jsme si mohli všimnout, že inverzní permutace má stejně cyklů jako permutace původní, proto $\operatorname{sgn} p^{-1} = \operatorname{sgn} p = -1$. Konečně tvrzení z přednášky nám říká, že znaménko složení permutací se rovná součinu znamének, proto

$$\operatorname{sgn}(p \circ q \circ r) = \operatorname{sgn} p \cdot \operatorname{sgn} q \cdot \operatorname{sgn} r = (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = 1.$$

Spojením posledních dvou pozorování dostáváme:

$$\operatorname{sgn}(q^{-1} \circ r \circ p^{-1} \circ q) = \operatorname{sgn} q \cdot \operatorname{sgn} r \cdot \operatorname{sgn} p \cdot \operatorname{sgn} q = \operatorname{sgn} r \cdot \operatorname{sgn} p = -1.$$

Úloha 14.3. Napište permutace $p = (13475)$ a $q = (19)(267)(3548)$ z S_9 jako součin transpozic.

Řešení. Připomeňme, že transpozice je permutace, která vyměňuje právě dva prvky, tj. můžeme ji v redukovaném cyklickém zápisu zapsat ve tvaru (ab). Snadno spočítáme, že

$$(13475) = (15) \circ (17) \circ (14) \circ (13) = (13) \circ (34) \circ (47) \circ (75).$$

Přímo z definice cyklického zápisu vidíme, že $(19)(267)(3548) = (19) \circ (267) \circ (3548)$, proto nejprve úlohu vyřešíme pro každý z cyklů (19), (267) a (3548) a poté nalezené transpozice složíme. Dostaneme

$$\begin{aligned}
&(19)(267)(3548) = (19) \circ (267) \circ (3548) = \\
&\qquad = (19) \circ (27) \circ (26) \circ (38) \circ (34) \circ (35) = (19) \circ (26) \circ (67) \circ (35) \circ (54) \circ (48).
\end{aligned}$$

Úloha 14.4. Spočítejte nad tělesy $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ determinanty matic

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{(d)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení. (a) Postupujeme přímo podle definice. Rozmyslíme si, že $S_2 = \{\mathrm{Id}, (12)\}$, proto $\det(A) = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5$ nad tělesy $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Obvyklá úvaha o počítání v tělesech $\mathbb{Z}_p$ nám umožní využít výsledku spočítaného v tělese racionálních čísel, který nakonec stačí upravit modulo p. To znamená, že $\det(A) = 5 \bmod 5 = 0$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a $\det(A) = 5 \bmod 7 = 5$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$.

(b) I tentokrát můžeme fakticky postupovat podle definice. Sudým permutacím Id, (123) a (132) z S_3 odpovídají po řadě součiny $1 \cdot 1 \cdot 4$, $2 \cdot 0 \cdot 1$ a $1 \cdot 2 \cdot 4$ (vždy bereme nejprve hodnotu z prvního řádku, poté z druhého a nakonec z třetího) a lichým permutacím (12), (13) a (23) odpovídají součiny $2 \cdot 2 \cdot 4$, $1 \cdot 1 \cdot 1$ a $1 \cdot 0 \cdot 4$, proto

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = -5.$$

To znamená, že $\det(A) = -5$ nad tělesem $\mathbb{Q}$, $\det(A) = 0$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a $\det(A) = 2$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$.

(c) Použijeme větu, která říká, že $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$. Už máme spočítaný determinant matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Nyní spočítáme determinant

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 6$$

nad Q, $\det B = 1$ nad $\mathbb{Z}_5$ a $\det B = 6$ nad $\mathbb{Z}_7$. To znamená, že hledaný $\det(A \cdot B)$ je -30 nad tělesem $\mathbb{Q}$, 0 nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a 5 nad tělesem $\mathbb{Z}_7$.

(d) Připomeňme, že tvrzení z přednášky nám říkají, jak se změní determinant matice, provedeme-li některou z řádkových úprav. Snadno si navíc uvědomíme, že determinantem trojúhelníkové matice je součin hodnot na hlavní diagonále. Budeme-li tedy pomocí elementárních úprav řádků převádět matici D do odstupňovaného tvaru, víme v každém kroku, jak jsme původní determinant změnili. Upravujme a počítejme tedy:

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 = 5.$$

Zjistili jsme tedy, že $\det(D) = 5$ nad tělesy $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\det(D) = 0$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a $\det(D) = 5$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$.

Úloha 14.5. Rozhodněte, pro která reálná a jsou regulární reálné matice

$$P(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(a) = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(a) \cdot Q(a), \quad P(a)^{257} \cdot Q(a)^{374}.$$

Řešení. Nejprve spočítáme determinanty $\det(P(a)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} = a - a^2, \quad$ a

$$\det(Q(a)) = \det \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2a-1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 - 2a.$$

Věta 7.22 z přednášky říká, že je matice regulární, právě když je její determinant nenulový. Determinanty matic $P(a)$ a $Q(a)$ už jsme spočítali, zbývá nám s využitím Věty 7.26 spočítat $\det(P(a) \cdot Q(a)) = \det(P(a)) \cdot \det(Q(a)) = a(1-a)(1-2a)$. Vidíme, že je matice $P(a)$ regulární, právě když $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, matice $Q(a)$ je regulární, právě když $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ a součin $P(a) \cdot Q(a)$ je regulární, právě když $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Konečně indukční aplikací Věty 7.26 dostáváme, že

$$\det(P(a)^{257} \cdot Q(a)^{374}) = \det(P(a))^{257} \cdot \det(Q(a))^{374} = a^{257}(1-a)^{257}(1-2a)^{374}.$$

Protože polynom $a^{257}(1-a)^{257}(1-2a)^{374}$ v proměnné a nemá jiné kořeny než 0, $\frac{1}{2}$, 1, vidíme, že je matice $P(a)^{257} \cdot Q(a)^{374}$ regulární opět právě tehdy, když $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 14.6. Spočítejte determinant matice

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

nad tělesem racionálních čísel.

Řešení: Vyjde -344. Práci si výrazně usnadníme, odečteme-li první sloupec od čtvrtého.

Úloha 14.7. Rozhodněte, pro která $x \in \mathbb{Z}_5$ je matice

$$\begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix}$$

nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ singulární.

Řešení: Je singulární, právě když je $x = 3$.

Úloha 14.8. (a) Vyřešte nad reálnými čísly soustavu rovnic $A\mathbf{x} = (1, 0, 0)^T$ s reálným parametrem a, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2a+1 & a & 2a \\ a & 1 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

Použijte Cramerovo pravidlo.

(b) Vyjádřete spočtené $\det A_i$, kde A_i je matice A s i-tým sloupcem nahrazeným pravou stranou soustavy, pomocí algebraických doplňků $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ (viz definice ve skriptech). Už vidíte, že opravdu platí $A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}$? (Nápověda: Determinant A lze spočíst snadno pomocí determinantů A_1 až A_3. Dále $\mathbf{x} = A^{-1}(1, 0, 0)^T$ je první sloupec A^{-1}.)

Řešení: $x_1 = x_2 = \frac{2a}{2a(a+1)} = \frac{1}{a+1}$ a $x_3 = \frac{-2a}{2a(a+1)} = -\frac{1}{a+1}$ pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, řešení neexistuje pro $a = -1$ a $(1,0,0)^T + \mathrm{LO}\{(0,1,-1)^T\}$ pro $a = 0$.

Úloha 14.9. Určete determinant matice $n \times n$, která vznikne jako levý horní roh Pascalova trojúhelníku:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \dots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Řešení: 1 pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 14.10. K matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

určete matici adjungovanou a matici inverzní.

Úloha 14.11. Určete objem rovnoběžnostěnu vytyčeného vektory $(1,1,0)$, $(3,5,-2)$ a $(4,0,7)$.

Obtížnější příklady

Úloha 14.12. Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Úloha 14.13. Spočtěte determinant matice A a pomocí něj element na pozici $(1,1)$ matice A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$