Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Zadání

Verze ze dne 14. října 2021

13 Typy a prostory lineárních zobrazení

Cíle cvičení:

- procvičit hledání jader a obrazů lineárních zobrazení,
- naučit se využívat dimenze jádra a obrazu k popisu typu lineárního zobrazení,
- naučit se pracovat s prostory lineárních zobrazení a s lineárními formami.

Řešené příklady:

Úloha 13.1. Pro lineární zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ s maticí vzhledem ke kanonickým bázím $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ najděte bázi podprostorů $\operatorname{Ker} f$ a $\operatorname{Im} f$ a rozhodněte je f monomorfismus, epimorfismus či izomorfismus.

Úloha 13.2. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ s maticí $[f]^M_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi $M = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ a kanonické bázi K_3. Ověřte, že f je izomorfismus, a najděte matice f a f^{-1} vzhledem ke kanonickým bázím.

Úloha 13.3. Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^2$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ dané podmínkami

$$\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Najděte matici $[\varphi]^{K_3}_{K_2}$ lineárního zobrazení φ vzhledem ke kanonickým bázím, spočítejte dimenze podprostorů $\operatorname{Ker}\varphi$ a $\operatorname{Im}\varphi$ a rozhodněte, zda jde o monomorfismus nebo epimorfismus.

Úloha 13.4. Najděte nějakou bázi reálného vektorového prostoru $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ a rozhodněte, zda jsou ve vektorovém prostoru $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ lineárně nezávislá posloupnost lineární zobrazení f, g, h, pokud

(a) $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, $h(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$,

(b) $[f]^{K_3}_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[g]^{K_3}_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $[h]^{K_3}_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, kde K_3 a K_2 jsou kanonické báze,

(c) $[f]^B_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $[g]^B_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $[h]^B_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, kde B je báze $\mathbb{R}^3$ a C je báze $\mathbb{R}^2$.

Úloha 13.5. Uvažujme lineární formy na vektorovém prostoru $V = \mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$:

$$f_1(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = x + 2z, \quad f_2(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = 3x + y + 2z, \quad f_3(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = 4x + y + z.$$

(a) Ověřte, že posloupnost $B = (f_1, f_2, f_3)$ tvoří bázi duálního vektorového prostoru $V^d = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_5^3, \mathbb{Z}_5)$,

(b) spočítejte souřadnice $[g]_B$ lineární formy $g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = 4z$,

(c) najděte bázi podprostoru $\bigcap_{a,b\in\mathbb{Z}_5} \mathrm{Ker}\,(af_1 + bf_2)$,

(d) najděte bázi podprostoru všech lineárních forem, jejichž jádro obsahuje vektor $(1, 1, 2)^T$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 13.6. Určete dimenzi jádra $\mathrm{Ker}\, h$ a obrazu $\mathrm{Im}\, h$ lineárního zobrazení h nad tělesem T víte-li, že jeho matice vzhledem k (neznámým) bázím B a C je

(a) $[h]_C^B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ pro $T = \mathbb{Z}_{11}$

(b) $[h]_C^B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ pro $T = \mathbb{R}$

(c) $[h]_C^B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ pro $T = \mathbb{Q}$

(d) $[h]_C^B = \begin{pmatrix} 2+i & 1-i & 7+3i & -1 & 6-7i \\ 7-i & 3 & 4-i & 0 & 2i \end{pmatrix}$ pro $T = \mathbb{C}$

Úloha 13.7. Najděte báze jádra a obrazu lineárního zobrazení φ z úlohy 13.3.

Úloha 13.8. Je-li $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{Z}_7^4 \to \mathbb{Z}_7^3$ vzhledem k bázím $M = ((1, 1, 0, 0)^T, (0, 1, 1, 0)^T, (0, 0, 1, 1)^T, (1, 0, 0, 0)^T)$ prostoru $\mathbb{Z}_7^4$ a $N = ((3, 1, 4)^T, (3, 3, 0)^T, (2, 1, 6)^T)$ prostoru $\mathbb{Z}_7^3$. Určete bázi a dimenzi jádra $\mathrm{Ker}\, f$ a obrazu $\mathrm{Im}\, f$.

Obtížnější příklady:

Úloha 13.9. Nechť $k \le n$, V je vektorový prostor V nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ dimenze n a U jeho podprostor dimenze k. Kolik existuje takových lineárních zobrazení $\varphi : V \to U$, že $U \subseteq \mathrm{Ker}\, \varphi$?

Úloha 13.10. Pro parametrické lineární zobrazení $f_{a,b} : \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^3$ najděte všechna $(a, b) \in \mathbb{Z}_7^2$, pro která je $f_{a,b}$ izomorfismus, jestliže $[f_{a,b}]_B^B = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & 1 \\ 2 & b & 1+a \\ 3 & -a & 1 \end{pmatrix}$.

Úloha 13.11. Nechť $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ je báze vektorového prostoru V. Dokažte, že je posloupnost lineárních forem $(f_1, \dots, f_n)$ bází duálu V^d, právě když je matice $(f_i(\mathbf{b}_j))_{ij}$ regulární.