

Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Zadání

Verze ze dne 14. října 2021

12 Lineární zobrazení

Cíle cvičení:

- procvičit si lineární zobrazení,
- naučit se počítat matice lineárního zobrazení.

Řešené příklady:

Úloha 12.1. Uvažujme pro matici $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ lineární zobrazení $f_A : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ dané maticovým násobením. Najděte matici f_A vzhledem

(a) ke kanonickým bázím K_3 a K_2 ,

(b) k bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ a K_2 ,

(c) k bázi B a $C = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Úloha 12.2. Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^2 uvažujme bázi $B = ((1, 2)^T, (1, 3)^T)$. Dále $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pro následující lineární zobrazení určete matice jejich zobrazení vzhledem ke specifikovaným bázím:

(a) Pro $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ určete $[f]_{K_2}^{K_2}, [f]_{K_2}^B, [f]_B^{K_2}, [f]_B^B$

(b) Pro $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ určete $[f]_{K_2}^{K_2}, [f]_{K_2}^B, [f]_B^{K_2}, [f]_B^B$

(c) Pro $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisem $f(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2$ určete $[f]_{K_1}^{K_2}, [f]_{K_1}^B$

(d) Pro $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(s) = (s, -s)^T$ určete $[f]_{K_2}^{K_1}, [f]_B^{K_1}$

(e) Pro $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ určete $[f]_{K_2}^{K_2}, [f]_{K_2}^B, [f]_B^B, [f^{-1}]_{K_2}^{K_2}, [f^{-1}]_B^{K_2}$

(f) Pro $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|2\mathbf{x})^T$ určete $[f]_C^B$, kde $C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

Úloha 12.3. Nechť $g : \mathbb{Z}_7^2 \rightarrow \mathbb{Z}_7^3$ je zobrazení určené předpisem

$$g \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 \\ 2x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}.$$

Dokažte, že se jedná o lineární zobrazení, a najděte jeho matici vzhledem ke kanonickým bázím a vzhledem k bázím

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{a} \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right).$$

Úloha 12.4. Označme D první derivaci na vektorovém prostoru $\mathbb{R}[x]_4 = \{\sum_{i=0}^3 a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ reálných polynomů stupně menší než 4 a označme $K = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ bázi $\mathbb{R}[x]_4$. Z matematické analýzy víme, že je D lineární zobrazení.

- (a) Najděte matici $[D]_K^K$,
 (b) je-li B nějaká báze $\mathbb{R}[x]_4$, najděte nejmenší $n \in \mathbb{N}$, pro které $([D]_B^B)^n = \mathbf{0}$.

Úloha 12.5. Nechtě $g : \mathbb{Z}_5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$ lineární zobrazení s maticí $[g]_C^B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázím $B =$

$\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ a $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Spočítejte matici

- (a) $[g]_{K_3}^{K_2}$ lineárního zobrazení g vzhledem ke kanonickým bázím,
 (b) $[fg]_{K_3}^{K_2}$ složeného lineárního zobrazení fg vzhledem ke kanonickým bázím, jestliže $[f]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 12.6. Je-li $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineární zobrazení splňující

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ověřte, že jde o bijekci, a najděte vzhledem ke kanonickým bázím matice zobrazení φ , φ^{-1} a φ^2 .

Obtížnější příklady:

Úloha 12.7. Nechtě $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Najděte matici přechodu od báze $N = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ k bázi $N' = (1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^n)$ a od báze N' k bázi N v prostoru všech reálných polynomů stupně nejvýše n .

Úloha 12.8. Najděte všechna $a, b, c \in \mathbb{Q}$, pro která existuje lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ splňující

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}, \quad \varphi \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2b \end{pmatrix}.$$

Úloha 12.9. Označme $\mathbb{R}[x]_4 = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) < 4\}$ podprostor vektorového prostoru reálných polynomů a definujme zobrazení $\Omega : \mathbb{R}[x]_4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ předpisem

$$\Omega(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \\ p(3) \end{pmatrix}.$$

Ověřte, že je Ω lineární, najděte jeho matici vzhledem k bázím (x^0, x^1, x^2, x^3) a $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ a rozhodněte, zda jde o bijekci.

Úloha 12.10. Pro matici $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ najděte všechna $\lambda \in \mathbb{R}$ taková, že matice $A - \lambda I_2$ je singulární.

Pro každé takové λ najděte nějakou bázi prostoru $\text{Ker}(A - \lambda I_2)$. Sestavte z takto získaných vektorů bázi B prostoru \mathbb{R}^2 . Určete matici $[f_A]_B^B$ a ověřte, že je diagonální. S pomocí této matice a transformační formule pro matici lineárního zobrazení spočítejte, čemu se rovná A^{10} .