Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Řešení
Verze ze dne 1. prosince 2021

12 Lineární zobrazení

Cíle cvičení:

- procvičit si lineární zobrazení,
- naučit se počítat matice lineárního zobrazení,.

Řešené příklady:

Úloha 12.1. Uvažujme pro matici $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ lineární zobrazení $f_A : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ dané maticovým násobením. Najděte matici f_A vzhledem

(a) ke kanonickým bázím K_3 a K_2,

(b) k bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ a K_2,

(c) k bázi B a $C = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Řešení. (a) Podle definice nejprve potřebujeme zjistit souřadnice vektorů $f_A(\mathbf{e}_i)$ vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{Z}_5^2$:

$$[f_A(\mathbf{e}_1)]_{K_2} = [\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}]_{K_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$[f_A(\mathbf{e}_2)]_{K_2} = [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}]_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$[f_A(\mathbf{e}_3)]_{K_2} = [\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}]_{K_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nyní zbývá souřadnicové vektory uspořádat do sloupců matice lineárního zobrazení vzhledem ke kanonickým bázím $[f_A]_{K_2}^{K_3} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = A$.

(b) Opět postupujeme podle definice a dostáváme souřadnice

$$[f_A(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})]_{K_2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$[f_A(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})]_{K_2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$[f_A(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})]_{K_2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že $[f_A]^B_{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Tentokrát máme najít souřadnice obrazů $f_A(B)$ vektorů báze B vzhledem k bázi C. Zapíšeme-li získané aritmetické vektory do sloupců matice, dostaneme právě matici hledanou matici $[f_A]^B_C$. Hledáme tedy řešení tří soustav rovnic se společnou maticí levých stran

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

které můžeme standardním postupem řešit najednou:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

(Mimochodem si všimněme, že $[f_A]^B_C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.) Spočítali jsme tedy, že $[f_A]^B_C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Úloha 12.2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažujme bázi $B = ((1,2)^T, (1,3)^T)$. Dále $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pro následující lineární zobrazení určete matice jejich zobrazení vzhledem ke specifikovaným bázím:

(a) Pro $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ určete $[f]^{K_2}_{K_2}$, $[f]^B_{K_2}$, $[f]^{K_2}_B$, $[f]^B_B$

(b) Pro $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ určete $[f]^{K_2}_{K_2}$, $[f]^B_{K_2}$, $[f]^{K_2}_B$, $[f]^B_B$

(c) Pro $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2$ určete $[f]^{K_2}_{K_1}$, $[f]^B_{K_1}$

(d) Pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(s) = (s, -s)^T$ určete $[f]^{K_1}_{K_2}$, $[f]^{K_1}_B$

(e) Pro $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ určete $[f]^{K_2}_{K_2}$, $[f]^B_{K_2}$, $[f]^B_B$, $[f^{-1}]^{K_2}_{K_2}$, $[f^{-1}]^{K_2}_B$

(f) Pro $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|2\mathbf{x})^T$ určete $[f]^B_C$, kde $C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

Řešení. (a) Podle definice jsou všechny čtyři matice rovny $\mathbf{0}_{2\times 2}$.

(b) $[f]^{K_2}_{K_2} = ([f(\mathbf{e}_1)]_{K_2}|[f(\mathbf{e}_2)]_{K_2}) = ([\mathbf{e}_1]_{K_2}|[\mathbf{e}_2]_{K_2}) = (\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2) = I_2$ a podobně i $[f]^B_B = I_2$. Protože $f = \mathrm{id}$, matice $[f]^B_{K_2}$ obsahuje ve sloupcích právě souřadnice vektorů báze B vzhledem ke kanonické bázi, tudíž $[f]^B_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Spočítali jsme tak matici přechodu od báze B k bázi K_2. Matice $[f]^{K_2}_B$, která je maticí přechodu od báze K_2 k bázi B obsahuje ve sloupcích souřadnice vektorů báze B vzhledem ke kanonické bázi, potřebujeme tedy vyřešit dvě soustavy rovnic s maticí levých stran $[\mathrm{id}]^B_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ a s vektory pravých stran z báze K_2. Postupujeme tedy stejně jako při hledání inverzní matice.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Spočítali jsme, že $[\mathrm{id}]^{K_2}_B = ([\mathrm{id}]^B_{K_2})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Protože $K_1 = ((1))$, z definice dostáváme $[f]^{K_2}_{K_1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$, $[f]^B_{K_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(d) Z $f(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ máme, že $[f]^{K_1}_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Pro výpočet $[f]^{K_1}_B$ potřebujeme tento vektor ještě vyjádřit vůči bázi B. K tomu buď vyřešíme soustavu rovnic s levou stranou $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, nebo využijeme matici přechodu:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_B = [\mathrm{id}]^{K_2}_B \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = [f]^{K_1}_B$$

(e) Z definice a z vlastností maticového násobení dostáváme, že $[f]^{K_2}_{K_2} = A$. Další dvě matice plynou z transformační formulky:

$$[f]^B_{K_2} = [f]^{K_2}_{K_2}[\mathrm{id}]^B_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$[f]^B_B = [\mathrm{id}]^{K_2}_B [f]^{K_2}_{K_2}[\mathrm{id}]^B_{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Protože matice A je regulární, inverzní zobrazení f^{-1} existuje a jeho matice je inverzní k jisté matici zobrazení f:

$$[f^{-1}]^{K_2}_{K_2} = \left([f]^{K_2}_{K_2}\right)^{-1} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$[f^{-1}]^{K_2}_B = \left([f]^B_{K_2}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(f) Obrazy prvků báze B jsou $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Snadno je zapíšeme jako lineární kombinace matic z báze C a získáváme

$$[f]^B_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Úloha 12.3. Nechť $g : \mathbb{Z}_7^2 \to \mathbb{Z}_7^3$ je zobrazení určené předpisem

$$g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 \\ 2x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}.$$

Dokažte, že se jedná o lineární zobrazení, a najděte jeho matici vzhledem ke kanonickým bázím a vzhledem k bázím

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{a} \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right).$$

Řešení. Snadno zjistíme, že lze předpis definující zobrazení g vyjádřit jako součin matice a aritmetického vektoru: $g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Proto jde o lineární zobrazení a jeho matice vzhledem ke kanonickým bázím je právě tvaru $[g]^{K_2}_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Při výpočtu postupujeme obdobně jako v úloze 12.1. Stačí tedy dosadit vektory báze A do g a najít souřadnice obrazů vzhledem k bázi B. Protože $[g]^A_{K_3} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, řešíme tři soustavy tří rovnic se společnou maticí levých stran, které můžeme zapsat do jedné rozšířené matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Spočítali jsme, že $[g]_B^A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Úloha 12.4. Označme D první derivaci na vektorovém prostoru $\mathbb{R}[x]_4 = \{\sum_{i=0}^3 a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ reálných polynomů stupně menšího než 4 a označme $K = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ bázi $\mathbb{R}[x]_4$. Z matematické analýzy víme, že je D lineární zobrazení.

(a) Najděte matici $[D]_K^K$,

(b) je-li B nějaká báze $\mathbb{R}[x]_4$, najděte nejmenší $n \in \mathbb{N}$, pro které $([D]_B^B)^n = \mathbf{0}$.

Řešení. (a) Stačí derivovat jednotlivé polynomy báze K a určit souřadnice derivací vzhledem k této bázi: $[D(x^0)]_K = [(x^0)']_K = [0]_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[D(x^1)]_K = [(x^1)']_K = [x^0]_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[D(x^2)]_K = [(x^2)']_K = [2x^1]_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[D(x^3)]_K = [(x^3)']_K = [3x^2]_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, takže $[D]_K^K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Všimněme si, že složením n derivací dostaneme právě n-tou derivaci, tj. $(D)^n(p) = p^{(n)}$. Uvědomíme-li si, že polynom x^3 se vynuluje teprve čtvrtou derivací, a na druhé straně čtvrtá derivace už vynuluje každý polynom stupně menšího než čtyři, pak stačí jen opakovaně využít tvrzení o matici složených zobrazení z přednášky, abychom zjistili, že $([D]_B^B)^n = ([D^n]_B^B) = \mathbf{0}$, právě když $n \geq 4$. To ovšem znamená, že nejmenší n, pro které $([D]_B^B)^n = \mathbf{0}$, je $n = 4$. Všimněme si, že tento výsledek je nezávislý na volbě báze B.

Úloha 12.5. Nechť $g : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^3$ lineární zobrazení s maticí $[g]_C^B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázím $B = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ a $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Spočítejte matici

(a) $[g]_{K_3}^{K_2}$ lineárního zobrazení g vzhledem ke kanonickým bázím,

(b) $[fg]_{K_3}^{K_2}$ složeného lineárního zobrazení fg vzhledem ke kanonickým bázím, jestliže $[f]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení. (a) Potřebujeme spočítat

$$[g]_{K_3}^{K_2} = [\mathrm{id}]_{K_3}^C \cdot [g]_C^B \cdot [\mathrm{id}]_B^{K_2} = [\mathrm{id}]_{K_3}^C \cdot [g]_C^B \cdot ([\mathrm{id}]_{K_2}^B)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Nyní určíme transponovaný součin $([g]_{K_3}^{K_2})^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 4 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Zjistili jsme, že $[g]_{K_3}^{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Už známe matice obou lineárních zobrazení vzhledem ke kanonickým bázím, proto stačí díky tvrzení z přednášky obě matice vynásobit

$$[fg]_{K_3}^{K_2} = [f]_{K_3}^{K_3} \cdot [g]_{K_3}^{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Další základní příklady k počítání:

Úloha 12.6. Je-li $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineární zobrazení splňující

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ověřte, že jde o bijekci, a najděte vzhledem ke kanonickým bázím matice zobrazení φ, φ^{-1} a φ^2.

Řešení: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Obtížnější příklady:

Úloha 12.7. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Najděte matici přechodu od báze $N = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ k bázi $N' = (1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^n)$ a od báze N' k bázi N v prostoru všech reálných polynomů stupně nejvýše n.

Řešení: S využitím binomické věty zjistíme, že $[\mathrm{id}]_N^{N'}$ má na pozici (i,j) nulu pro $i < j$ a číslo[1] $\binom{i}{j}(-a)^{i-j}$ pro $i \geq j$. Pro určení $[\mathrm{id}]_{N'}^{N}$ není potřeba používat inverzi; šikovnější je zavést substituci $y = x - a$ a postupovat jako v první části. Ukáže se, že $[\mathrm{id}]_{N'}^{N}$ má na pozici (i,j) nulu pro $i < j$ a číslo $\binom{i}{j}a^{i-j}$ pro $i \geq j$.

Úloha 12.8. Najděte všechna $a, b, c \in \mathbb{Q}$, pro která existuje lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ splňující

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2b \end{pmatrix}.$$

Řešení: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{LO}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$.

Úloha 12.9. Označme $\mathbb{R}[x]_4 = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) < 4\}$ podprostor vektorového prostoru reálných polynomů a definujme zobrazení $\Omega : \mathbb{R}[x]_4 \to \mathbb{R}^4$ předpisem

$$\Omega(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \\ p(3) \end{pmatrix}.$$

[1] Zde pochopitelně nejde o dvousložkový vektor, ale o kombinační číslo.

Ověřte, že je Ω lineární, najděte jeho matici vzhledem k bázím (x^0, x^1, x^2, x^3) a $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ a rozhodněte, zda jde o bijekci.

Řešení: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$; ano, jde.

Úloha 12.10. Pro matici $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ najděte všechna $\lambda \in \mathbb{R}$ taková, že matice $A - \lambda I_2$ je singulární. Pro každé takové λ najděte nějakou bázi prostoru $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_2)$. Sestavte z takto získaných vektorů bázi B prostoru $\mathbb{R}^2$. Určete matici $[f_A]_B^B$ a ověřte, že je diagonální. S pomocí této matice a transformační formule pro matici lineárního zobrazení spočtěte, čemu se rovná A^{10}.