Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Zadání

Verze ze dne 14. října 2021

11 Hodnost

Cíle cvičení:

- procvičit počítání a použití hodnosti matice,
- procvičit počítání dimenze průniků podprostorů.

Řešené příklady:

Úloha 11.1. Pro matici A nad tělesy $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z}_5$ spočítejte její hodnost, redukovaný odstupňovaný tvar a dimenze prostorů $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} A^T$, $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker} A^T$, jestliže

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{(d)}\quad A = \mathbf{0}_{n\times m}.$$

Rozhodněte nad jednotlivými tělesy, zda je součet $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A^T$ direktní.

Úloha 11.2. Spočítejte dimenze podprostorů U, V, $U+V$, $U\cap V$, jestliže

$$\text{(a)}\ U = \mathrm{LO}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ a } V = \mathrm{LO}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ v prostoru } \mathbb{Q}^3,$$

$$\text{(b)}\ U = \mathrm{LO}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ a } V = \mathrm{LO}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ v prostoru } \mathbb{Z}_3^4.$$

Úloha 11.3. Najděte bázi prostorů $U+V$ a $U\cap V$ z úlohy 11.2 (b).

Další základní příklady k počítání:

Úloha 11.4. Pro matici $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ spočítejte nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ hodnost matice, její redukovaný odstupňovaný tvar a dimenze prostorů $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} A^T$, $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker} A^T$. Rozhodněte nad danými tělesy, zda je součet $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A^T$ direktní.

Úloha 11.5. Rozhodněte, zda lze nad tělesem reálných čísel převést posloupností elementárních řádkových úprav matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ na matici B, jestliže

$$\text{(a)}\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Rozšiřující příklady:

Skeletním rozkladem matice $A \in T^{n\times m}$ hodnosti $r > 0$ rozumíme rozklad tvaru $A = BC$, kde $B \in T^{n\times r}$ a $C \in T^{r\times m}$

Úloha 11.6. Spočítejte skeletní rozklady $A = BC$ matic z úloh 11.1 a 11.4 tak, aby byla matice C redukovaná odstupňovaná.

Úloha 11.7. Označme A_n prostor všech reálných antisymetrických matic řádu n a S_n prostor všech reálných symetrických matic řádu n. Dokažte, že $A_n \oplus S_n = \mathbb{R}^{n\times n}$, a ověřte platnost věty o dimenzi součtu a průniku pro tento případ. Ukažte, že pro matice nad $\mathbb{Z}_2$ součet $A_n + S_n$ není direktní, a s pomocí věty o dimenzi součtu a průniku ukažte, že musí existovat nějaká matice v $\mathbb{Z}_2^{n\times n}$, která se nedá zapsat jako součet matice symetrické a matice antisymetrické.

Úloha 11.8. Najděte dimenze prostorů V, W, $V \cap W$, $V + W \subset \mathbb{R}^5$ v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$, kde

$$V = \mathrm{LO}\{(3,-1,-2,2,1)^T, (1,4,0,1,-1)^T, (\lambda,6,-4,6,0)^T\},$$
$$W = \mathrm{LO}\{(1,-3,2,-3,0)^T, (0,0,0,1,1)^T\}.$$

Úloha 11.9. Najděte nějakou matici A, pro niž součet $\mathrm{Ker}\, A + \mathrm{Im}\, A^T$ není direktní. Můžete nejprve zkusit příklad, kdy $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Im}\, A^T$, a pak nějaký, kde se přímo nerovnají.