Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Řešení

Verze ze dne 1. prosince 2021

11 Hodnost

Cíle cvičení:

- procvičit počítání a použití hodnosti matice,
- procvičit počítání dimenze průniků podprostorů.

Řešené příklady:

Úloha 11.1. Pro matici A nad tělesy $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z}_5$ spočítejte její hodnost, redukovaný odstupňovaný tvar a dimenze prostorů $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} A^T$, $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker} A^T$, jestliže

$$\text{(a)}\quad A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\1&4\end{pmatrix},\qquad \text{(b)}\quad A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&4&3\end{pmatrix},\qquad \text{(c)}\quad A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\4&1&1&2\\2&2&4&3\end{pmatrix},\qquad \text{(d)}\quad A=\mathbf{0}_{n\times m}.$$

Rozhodněte nad jednotlivými tělesy, zda je součet $\operatorname{Ker} A+\operatorname{Im} A^T$ direktní.

Řešení. Podle tvrzení z přednášky a definice platí, že $\operatorname{rank} A=\dim\operatorname{Im} A=\dim\operatorname{Im} A^T$, a tvrzení o hodnosti a nulitě matice typu $n\times m$ říká, že $\dim\operatorname{Ker} A=m-\operatorname{rank}(A)$, $\dim\operatorname{Ker} A^T=n-\operatorname{rank}(A)$. Stačí nám tedy standardním postupem spočítat dimenzi řádkového vektorového prostoru matice:

(a) Upravíme-li $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2\\0&-3\\0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2\\0&-3\\0&0\end{pmatrix}$, vidíme, že nad tělesem $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}_5$ je $\operatorname{rank}(A)=\dim\operatorname{Im} A=\dim\operatorname{Im} A^T=2$ a $\dim\operatorname{Ker} A=2-\operatorname{rank}(A)=0$ a $\dim\operatorname{Ker} A^T=3-\operatorname{rank}(A)=1$. Redukovaný odstupňovaný tvar je nad $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}_5$ roven $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$ Protože $\operatorname{Ker} A$ je nulové, je i podprostor $\operatorname{Ker} A\cap\operatorname{Im} A^T$ nulový, tedy $\operatorname{Ker} A+\operatorname{Im} A^T$ je direktní součet. Podle věty o dimenzi součtu a průniku má dimenzi 2 a protože je podprostorem $\mathbb{Q}^2$, musí mu být roven, tedy $\operatorname{Ker} A\oplus\operatorname{Im} A^T=\mathbb{Q}^2$

(b) Upravujme tedy matici posloupností elementárních úprav nejprve nad tělesem $\mathbb{Q}$:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-5\\0&2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&-5\end{pmatrix}.$$

Protože nad tělesem $\mathbb{Q}$ platí, že $\operatorname{rank}(A)=3$, máme

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A^T)=\dim\operatorname{Im} A=\dim\operatorname{Im} A^T=3.$$

Potom

$$\dim\operatorname{Ker} A=3-\operatorname{rank}(A)=3-3=0,\dim\operatorname{Ker} A^T=3-\operatorname{rank}(A^T)=3-3=0.$$

Podobně určíme hodnost A nad tělesem $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Tedy nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ je $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T) = \dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Im} A^T = 2$ a $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^T = 3 - \operatorname{rank}(A) = 3 - 2 = 1$.

Redukovaný odstupňovaný tvar je $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Q}$ a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_5$.

Protože je nad $\mathbb{Q}$ $\operatorname{Ker} A$ nulové a $\operatorname{Im} A^T = \mathbb{Q}^3$ je i podprostor je $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A^T$ je direktní součet a $\operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A^T = \mathbb{Q}^3$.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ je $\operatorname{Ker} A = \operatorname{LO}((2,0,1)^T)$ a snadno spočítáme, že

$$(2,0,1)^T = 3 \cdot (1,0,3)^T \in \operatorname{Im} A^T = \operatorname{LO}((1,0,3)^T, (0,1,0)^T),$$

proto $\operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Im} A^T$ a součet podprostorů $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A^T$ není direktní.

(c) Opět upravujme matici posloupností elementárních úprav nejprve nad tělesem $\mathbb{Q}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že nad $\mathbb{Q}$ platí $\operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Im} A^T = 3$, a proto $\dim \operatorname{Ker} A = 4 - \operatorname{rank}(A) = 1$ a $\dim \operatorname{Ker} A^T = 3 - \operatorname{rank}(A^T) = 0$. Nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ upravením 5 modulo dostáváme, že $\operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Im} A^T = 2$, a proto $\dim \operatorname{Ker} A = 4 - \operatorname{rank}(A) = 2$ a $\dim \operatorname{Ker} A^T = 3 - \operatorname{rank}(A^T) = 1$.

Redukovaný odstupňovaný tvar je $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Q}$ a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_5$.

Nad $\mathbb{Q}$ je $\operatorname{Ker} A = \operatorname{LO}\{(1,3,1,-4)^T\}$ a snadno ověříme, že matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

má hodnost 4. První tři řádky této matice generují $\operatorname{Im} A^T$, všechny čtyři dohromady tedy $\operatorname{Im} A^T + \operatorname{Ker} A$, ale zároveň z hodnosti 4 plyme, že musí generovat i $\mathbb{Q}^4$. Z věty o dimenzi součtu a průniku máme, že

$$\dim(\operatorname{Im} A^T + \operatorname{Ker} A) - \dim \operatorname{Im} A^T - \dim \operatorname{Ker} A = 4 - 1 - 3 = 0 = \dim(\operatorname{Im} A^T \cap \operatorname{Ker} A),$$

tedy $\operatorname{Im} A^T \cap \operatorname{Ker} A$ je nulový podprostor a součet $\operatorname{Im} A^T + \operatorname{Ker} A$ je direktní.

Nad $\mathbb{Z}_5$ je $\operatorname{Ker} A = \operatorname{LO}\{(2,1,1,0)^T, (4,2,0,1)^T\}$. Opět sestavíme matici, jejíž řádky generují $\operatorname{Im} A^T + \operatorname{Ker} A$, například

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a opět nám vyjde, že má hodnost 4. Stejnou úvahou jako u racionálního případu zjistíme, že průnik je nulový a je tedy možné psát $\operatorname{Im} A^T \oplus \operatorname{Ker} A = \mathbb{Z}_5^4$.

(d) Protože má nulová matice hodnost nula, vidíme, že $\operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Im} A^T = 0$ a $\dim \operatorname{Ker} A = m$ a $\dim \operatorname{Ker} A^T = n$. Redukovaným odstupňovaným tvarem je matice A. Součet je direktní, protože $\operatorname{Im} A^T$ je nulový podprostor, další argumentace je analogická jako v bodě (a).

Úloha 11.2. Spočítejte dimenze podprostorů U, V, $U + V$, $U \cap V$, jestliže

(a) $U = \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$ a $V = \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ v prostoru $\mathbb{Q}^3$,

(b) $U = \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ a $V = \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$ v prostoru $\mathbb{Z}_3^4$.

Řešení. (a) Snadno zjistíme, že

$$\dim U = \mathrm{rank}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 0\\1 & 2\end{pmatrix} = 2, \dim V = \mathrm{rank}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix} = 2, \dim(U+V) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\2 & 0 & 1 & -1\\1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix} = 3,$$

proto díky Větě o dimenzi součtu a průniku podprostorů $\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 1$.

(b) Nejprve snadno zjistíme, že posloupnost $B = (\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix})$ je lineárně nezávislá, tudíž báze U a podobně je posloupnost $C = (\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix})$ lineárně nezávislá, a proto báze V. Protože $3 \le \dim U + V \le 4$, stačí nám rozhodnout, zda dimenze $U + V$ je 3 nebo 4. Ukážeme, že tato dimenze je aspoň 4 (a tedy právě 4). K tomu si stačí všimnout, že vektor $\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix}$ leží v $U + V$, ale neleží v U. To znamená, že $U + V$ obsahuje čtyřprvkovou lineárně nezávislou posloupnost $B \cup (\mathbf{e}_4)$, a proto $\dim U + V = 4$. Nyní zbývá použít Větu o dimenzi součtu a průniku podprostorů, abychom zjistili, že

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) = 3 + 3 - 4 = 2.$$

Úloha 11.3. Najděte bázi prostorů $U + V$ a $U \cap V$ z úlohy 11.2 (b).

Řešení. Při počítání dimenzí jsme zjistili, že například kanonická báze je bází $U + V = \mathbb{Z}_3^4$.

Zbývá najít bázi $U \cap V$. Hledáme tedy všechny vektory, které leží zároveň v U i ve V, což si opět vyjádříme rovnicí:

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} = y_1\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix} + y_3\begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix},$$

kterou opět upravíme na

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} + y_1\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix} + y_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Znovu počítáme všechna řešení homogenní soustavy s maticí:

$$D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0\\1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0\\0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1\\0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Nyní obvyklým způsobem spočítáme bázi podprostoru $\operatorname{Ker} D$; tou je například posloupnost vektorů $((1,2,2,1,0,0)^T, (0,2,2,0,1,1)^T)$. Zjistili jsme, že:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Tudíž vektory $(1,2,2,1)^T$ a $(0,1,1,0)^T$ leží v podprostoru $U\cap V$. Konečně si uvědomíme, že libovolné řešení soustavy lze napsat ve tvaru

$$a_1\cdot(1,2,2,1,0,0)^T + a_2\cdot(0,2,2,0,1,1)^T = (a_1, 2a_1+2a_2, 2a_1+2a_2, a_1, a_2, a_2)^T,$$

kde $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_3$, proto lze každý vektor z průniku vyjádřit:

$$a_1\cdot(1,1,1,1)^T + (2a_1+2a_2)\cdot(0,2,1,1)^T + (2a_1+2a_2)\cdot(0,0,1,2)^T = a_1\cdot(1,2,2,1)^T + a_2\cdot(0,1,1,0)^T.$$

Tím jsme zjistili, že každý vektor z podprostoru $U\cap V$ lze napsat ve tvaru $a_1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} + a_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, takže posloupnost $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ podprostor $U\cap V$ generuje. Zjevně se jedná o posloupnost lineárně nezávislou, tedy jde o bázi $U\cap V$. Není přitom těžké si uvědomit, že výsledné vektory budou jistě lineárně nezávislé, jestliže jsme hledali jejich souřadnice vzhledem k bázím prostorů U a V.

Závěrem si ještě všimněme, že jsme soustavu nemuseli dopočítávat, neboť nám stačilo najít souřadnice báze řešení odpovídající proměnným y_i (tj. poslední 3 souřadnice) nebo x_i (tj. první 3 souřadnice).

Další základní příklady k počítání:

Úloha 11.4. Pro matici $A = \begin{pmatrix}3&1&4&3\\2&4&1&2\\1&2&4&1\end{pmatrix}$ spočítejte nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ hodnost matice, její redukovaný odstupňovaný tvar a dimenze prostorů $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} A^T$, $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker} A^T$. Rozhodněte nad danými tělesy, zda je součet $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A^T$ direktní.

Řešení: nad $\mathbb{R}$: $\operatorname{rank} A = \dim\operatorname{Im} A = \dim\operatorname{Im} A^T = 3, \dim\operatorname{Ker} A = 1, \dim\operatorname{Ker} A^T = 0,$

nad $\mathbb{Z}_5$ a nad $\mathbb{Z}_7$: $\mathbb{R}$: $\operatorname{rank} A = \dim\operatorname{Im} A = \dim\operatorname{Im} A^T = 2, \dim\operatorname{Ker} A = 2, \dim\operatorname{Ker} A^T = 1.$

Redukovaný odstupňovaný tvar je $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$, $\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_5$, $\begin{pmatrix}1&0&5&1\\0&1&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_7$.

Součet je direktní nad všemi třemi tělesy.

Úloha 11.5. Rozhodněte, zda lze nad tělesem reálných čísel převést posloupností elementárních řádkových úprav matici $A = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$ na matici B, jestliže

$$\text{(a)}\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení: (a) $A \not\sim B$, (b) $A \sim B$.

Rozšiřující příklady:

Skeletním rozkladem matice $A \in T^{n\times m}$ hodnosti $r > 0$ rozumíme rozklad tvaru $A = BC$, kde $B \in T^{n\times r}$ a $C \in T^{r\times m}$

Úloha 11.6. Spočítejte skeletní rozklady $A = BC$ matic z úloh 11.1 a 11.4 tak, aby byla matice C redukovaná odstupňovaná.

Řešení: 11.1 (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}_5$,

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Q}$ a $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_5$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Q}$ a $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_5$.

(d) Skeletní rozklad neexistuje, protože hodnost je rovna nule.

11.4 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_5$, $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_7$.

Úloha 11.7. Označme A_n prostor všech reálných antisymetrických matic řádu n a S_n prostor všech reálných symetrických matic řádu n. Dokažte, že $A_n \oplus S_n = \mathbb{R}^{n\times n}$, a ověřte platnost věty o dimenzi součtu a průniku pro tento případ. Ukažte, že pro matice nad $\mathbb{Z}_2$ součet $A_n + S_n$ není direktní, a s pomocí věty o dimenzi součtu a průniku ukažte, že musí existovat nějaká matice v $\mathbb{Z}_2^{n\times n}$, která se nedá zapsat jako součet matice symetrické a matice antisymetrické.

Úloha 11.8. Najděte dimenze prostorů V, W, $V \cap W$, $V + W \subset \mathbb{R}^5$ v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$, kde

$$\begin{aligned} V &= \mathrm{LO}\{(3,-1,-2,2,1)^T, (1,4,0,1,-1)^T, (\lambda,6,-4,6,0)^T\}, \\ W &= \mathrm{LO}\{(1,-3,2,-3,0)^T, (0,0,0,1,1)^T\}. \end{aligned}$$

Úloha 11.9. Najděte nějakou matici A, pro niž součet $\mathrm{Ker}\, A + \mathrm{Im}\, A^T$ není direktní. Můžete nejprve zkusit příklad, kdy $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Im}\, A^T$, a pak nějaký, kde se přímo nerovnají.