Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Zadání
Verze ze dne 14. října 2021

10 Báze – pokračování

Cíle cvičení:

- procvičit počítání souřadnic vzhledem k bázi,
- naučit se počítat matice přechodu.

Řešené příklady:

Úloha 10.1. Spočítejte dimenzi podprostorů

(a) $U = \{(0,0,0)^T\}$ aritmetického vektorového prostoru T^3 nad tělesem T,

(b) $U = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq 9\}$ vektorového prostoru reálných polynomů $\mathbb{R}[x]$ nad tělesem $\mathbb{R}$,

(c) $U = \mathrm{LO}\{(3,5,6)^T, (2,4,1)^T, (3,3,1)^T, (1,0,6)^T\}$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_7^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$,

(d) $U = \mathrm{LO}\{(2,1,1,1,1)^T, (1,2,1,1,1)^T, (1,1,2,1,1)^T, (1,1,1,2,1)^T, (1,1,1,1,2)^T\}$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_3^5$ nad tělesem $\mathbb{Z}_3$.

Úloha 10.2. Najděte souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bázi $M = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ vektorového prostoru $\mathbb{Q}^3$ nad tělesem $\mathbb{Q}$, jestliže

$$\text{(a)}\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \text{(c)}\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Úloha 10.3. Ověřte, že posloupnost polynomů $P = (x^2 + x - 1, x^2 + 2x + 2, 2x^2 - x + 1)$ je báze podprostoru $U = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq 2\}$ vektorového prostoru reálných polynomů $\mathbb{R}[x]$ nad tělesem $\mathbb{R}$, a spočítejte souřadnice polynomu $4x$ vzhledem k bázi P.

Úloha 10.4. Ověřte, že obě posloupnosti aritmetických vektorů $B = ((1,4,3)^T,\ (3,1,1)^T)$ a $C = ((1,1,4)^T,\ (1,0,1)^T)$ jsou báze podprostoru $U = \mathrm{LO}\,B$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$, spočítejte souřadnice vektorů C vzhledem k bázi B a určete matici přechodu $[\mathrm{id}]_B^C$.

Úloha 10.5. Najděte matice přechodu:

(a) $[\mathrm{id}]_{K_2}^B$ a $[\mathrm{id}]_B^{K_2}$, kde $B = \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)$ a K_2 je kanonická báze ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ nad tělesem $\mathbb{R}$.

(b) $[\mathrm{id}]_M^N$, kde $N = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ a $M = \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ jsou báze $\mathbb{Z}_3^2$ nad tělesem $\mathbb{Z}_3$.

(c) $[\mathrm{id}]_K^L$ a $[\mathrm{id}]_L^K$, kde $K = (1, i)$ a $L = (3 - 5i, 1 - 2i)$ jsou báze $\mathbb{C}$ nad tělesem $\mathbb{R}$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 10.6. Ověřte, že $B = (3 - i, 1 - 2i)$ tvoří bázi vektorového prostoru komplexních čísel $\mathbb{C}$ nad tělesem $\mathbb{R}$, a spočítejte souřadnice vektoru i.

Úloha 10.7. Uvažme posloupnost reálných funkcí proměnné x (Jak si představit funkci „abstraktně“? Třeba jako graf funkce.) $M = (\cos x, \sin x, \cos^2 x, \sin^2 x)$.

(a) Dokažte, že M je báze podprostoru $\mathrm{LO}\, M$ vektorového prostoru všech reálných funkcí,

(b) dokažte, že $1, \cos 2x \in \mathrm{LO}\, M$,

(c) určete souřadnice vektorů 1, $\cos 2x$ a $3 + 2\cos x + \cos 2x$ vzhledem k bázi M.

Úloha 10.8. Určete v prostoru všech reálných polynomů stupně nejvýše 2 matici přechodu od báze $N = (x^2 + 2x + 1, 2x^2 + 1, x^2 - x)$ k bázi $N' = (x^2 + 2, x^2 - 3x + 1, x^2 + x + 3)$.

Úloha 10.9. V prostoru všech reálných matic 2×2 určete obě matice přechodu mezi bázemi

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \quad B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Obtížnější příklady:

Úloha 10.10. Najděte dimenzi podprostoru $\mathrm{LO}\{(1,1,1,a)^T, (1,1,a,1)^T, (1,a,1,1)^T, (a,1,1,1)^T\}$ v $\mathbb{R}^4$ v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.