Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Zadání
Verze ze dne 14. října 2021

9 Báze

Cíle cvičení:

- naučit se hledat báze maticových i obecných vektorových prostorů.

Řešené příklady:

Úloha 9.1. Najděte pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_5$ báze prostorů $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} A^T$, $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker} A^T$.

Úloha 9.2. Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů $M = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ bází vektorového prostoru $\mathbb{Q}^3$ nad tělesem $\mathbb{Q}$.

Úloha 9.3. Najděte nějakou bázi podprostoru U aritmetického vektorového prostoru T^4 nad tělesem T, jestliže

(a) $U = \{(0,0,0,0)^T\}$ pro libovolné těleso T,

(b) $U = T^4$ pro libovolné těleso T,

(c) $U = \mathrm{LO}\{(1,0,2,1)^T, (2,0,1,1)^T, (1,0,1,-1)^T\}$ pro $T = \mathbb{Q}$,

(d) $U = \mathrm{LO}\{(2,1,1,1)^T, (4,2,1,3)^T, (3,4,3,0)^T, (1,3,4,2)^T\}$ pro $T = \mathbb{Z}_5$,

(e) $U = \mathrm{LO}\{(2,0,3,4)^T, (3,3,1,2)^T, (3,1,1,2)^T\}$ pro $T = \mathbb{Z}_5$,

(f) $U = \mathrm{LO}\{(1,1,3,6)^T, (5,5,1,0)^T, (3,3,2,6)^T\}$ pro $T = \mathbb{Z}_7$.

Úloha 9.4. Najděte nějakou bázi podprostorů vektorového prostoru reálných polynomů $\mathbb{R}[x]$ nad tělesem $\mathbb{R}$:

(a) $U_1 = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq 3\}$,

(b) $U_2 = \mathrm{LO}\{x^2+x+1, x^2+2x, x^2+2\}$,

(c) $U_3 = \mathrm{LO}\{x+1, x-2, x^2-x+3, x^2+1\}$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 9.5. Najděte nějakou bázi prostoru $W = \mathrm{LO}\{(0,1,-3,4)^T, (2,2,2,2)^T, (1,-1,3,7)^T\} \leq \mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $(1,4,-4,-1)^T$.

Úloha 9.6. Najděte nějakou bázi následujících podprostorů vektorového prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$:

(a) podprostoru všech diagonálních matic

(b) podprostoru všech horních trojúhelníkových matic

(c) podprostoru všech takových symetrických matic ,že součet prvků na hlavní diagonále je nula.

(d) podprostor všech antisymetrických matic (tj. splňujících $A^T = -A$.)

Úloha 9.7. Najděte bázi podprostoru U reálného vektorového prostoru polynomů $\mathbb{R}[x]$, jestliže

(a) $U = \mathrm{LO}\{x^6+1, x^9+x^3, x^3\}$,

(b) $U = \mathrm{LO}\{x^3+x^2-x+2, x^3+5x^2+x+4, x^3-x^2-2x+1, 2x^2+x+1\}$,

(c) $U = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(0)=0, \deg p < 5\}$,

(d) $U = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(1)=0, \deg p < 5\} \cap \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(3)=0, \deg p < 5\}$.

Úloha 9.8. Vyberte z posloupnosti $X = ((0,0,0,0)^T, (3,1,4,2)^T, (2,3,5,1)^T, (1,5,6,1)^T)$ bázi podprostoru $\mathbf{U} = \mathrm{LO}\,X$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_7^4$ a doplňte ji na bázi celého prostoru $\mathbb{Z}_7^4$.

Úloha 9.9. Určete dimenzi vektorového prostoru

$$W = \mathrm{LO}\{(3,2,3,4)^T, (a,1,3,5)^T, (4,1,2,3)^T, (4,a,4,7)^T\} \leq \mathbb{R}^4$$

v závislosti na $a \in \mathbb{R}$, vyberte z dané množiny generátorů bázi W a případně tuto bázi doplňte na bázi celého $\mathbb{R}^4$.

Obtížnější příklady:

Úloha 9.10. Jestliže

$$\mathbf{U} = \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right\} \quad \text{a} \quad \mathbf{V} = \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$$

jsou podprostory vektorového prostoru $\mathbb{Z}_3^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_3$, najděte báze podprostorů $\mathbf{U}+\mathbf{V}$ a $\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$.

Úloha 9.11. Je-li $U = \mathrm{LO}\{(2,-1,1,1)^T, (4,1,5,1)^T, (1,-2,-1,1)^T, (1,1,2,0)^T\}$ podprostor aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$, najděte bázi takového podprostoru V, aby $U \cap V = 0$ a $U + V = \mathbb{Q}^4$.

Úloha 9.12. Najděte nějakou bázi

(a) vektorového prostoru reálných polynomů $\mathbb{R}[x]$ nad tělesem $\mathbb{R}$,

(b) racionálního vektorového prostoru $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\}$.

Úloha 9.13. Mějme množinu vektorů $M = \{(a_{i1},\ldots,a_{in})^T \in \mathbb{C}^n, i=1,\ldots,n\}$. Dokažte, že pokud pro všechna j platí $|a_{jj}| > \sum_{i=1,i\neq j}^n |a_{ij}|$, pak je M bází $\mathbb{C}^n$.