Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Zadání
Verze ze dne 14. října 2021

8 Lineární (ne)závislost

Cíle cvičení:

- motivovat a procvičit pojmy lineární závislosti a nezávislosti,
- naučit se vybírat lineárně nezávislou generující posloupnost.

Řešené příklady:

Úloha 8.1. Dokažte, že je množina $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} |\ a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ podprostor racionálního vektorového prostoru $\mathbb{R}$, a navíc, že $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

Úloha 8.2. Najděte nenulový polynom stupně (nejvýše) 3 s racionálními koeficienty, jehož kořenem je reálné číslo $1 - \sqrt[3]{2}$. Návod: z druhé části předchozí úlohy víme, že mocniny $1 - \sqrt[3]{2}$ patří do $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$, a tedy každé z nich odpovídá nějaká uspořádaná trojice racionálních čísel a, b, c. Hledaný polynom dává určitou racionální lineární kombinaci těchto trojic a naopak.

Úloha 8.3. Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů X ve vektorovém prostoru V lineárně závislá, či nezávislá, jestliže

(a) $X = ((1, 0, 2, 1)^T, (2, 0, 1, 1)^T, (1, 0, 1, -1)^T)$ a $V = \mathbb{Q}^4$,

(b) $X = ((1, 1)^T, (1, 0)^T, (3, 4)^T)$ a $V = \mathbb{Z}_7^2$,

(c) $X = ((1, 1, 2)^T, (2, 0, 1)^T, (2, 1, 1)^T)$ a $V = \mathbb{Z}_3^3$,

(d) $X = (3 - i, 2 + 3i)$ a $V = \mathbb{C}$ nad tělesem $\mathbb{R}$,

(e) $X = (3 - i, 2 + 3i)$ a $V = \mathbb{C}$ nad tělesem $\mathbb{C}$,

(f) $X = (x^2 + x + 1, x^2 + 2x, x^2 + 2)$ a $V = \mathbb{R}[x]$ nad tělesem $\mathbb{R}$.

Úloha 8.4. Vyberte z posloupnosti

$$X = ((2, 4, 0, 1, 4)^T, (4, 3, 0, 2, 3)^T, (1, 2, 3, 4, 0)^T, (3, 1, 1, 1, 2)^T, (4, 3, 4, 0, 2)^T)$$

lineárně nezávislou podposloupnost, která generuje celý podprostor $U = \mathrm{LO}\, X$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^5$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

Úloha 8.5. Doplňte lineárně nezávislou množinu $B = \{(2, 4, 0, 1, 4)^T, (1, 2, 1, 0, 3)^T\}$ na lineárně nezávislou posloupnost, která generuje celý aritmetický vektorový prostor $\mathbb{Z}_5^5$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 8.6. Dokažte, že je množina reálných polynomů reálným vektorovým prostorem, který neobsahuje žádnou konečnou generující množinu.

Úloha 8.7. Vyberte z množiny

$$X = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

ve vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_2^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ maximální lineárně nezávislou množinu a dokažte, že generuje prostor $\mathbb{Z}_2^4$.

Obtížnější příklady:

Úloha 8.8. Popište podmnožinu $\mathrm{LO}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \right\} \cap \mathrm{LO}\left\{ \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \right\}$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$.

Úloha 8.9. Dokažte, že průnik dvou podprostorů vektorového prostoru V je vždy podprostor. Najděte nějakou množinu generátorů podprostorů $W_1 \cap W_2$, $W_3 \cap W_4$ a $W_1 \cap W_3 \leq \mathbb{Z}_5^5$, kde

$$\begin{aligned}
W_1 &:= \mathrm{Ker} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 4 & 3\\ 3 & 1 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix}\\
W_2 &:= \mathrm{Ker} \begin{pmatrix}2 & 4 & 0 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 2 & 4 & 2\end{pmatrix}\\
W_3 &:= \mathrm{LO}\{(1,2,1,4,3)^T, (0,4,1,1,0)^T, (2,0,1,3,4)^T\}\\
W_4 &:= \mathrm{LO}\{(3,1,3,0,0)^T, (2,0,1,4,1)^T\}
\end{aligned}$$

Platí, že sjednocení dvou podprostorů V je vždy podprostor?

Úloha 8.10. Rozhodněte, zda je posloupnost $(\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x)$ prvků reálného vektorového prostoru všech reálných funkcí reálné proměnné lineárně nezávislá.

Úloha 8.11. Nechť $(a_n)_1^\infty, (b_n)_1^\infty, (c_n)_1^\infty$ jsou tři nekonečné reálné posloupnosti. Za jakých podmínek je posloupnost $((a_n)_1^\infty, (b_n)_1^\infty, (c_n)_1^\infty)$ lineárně nezávislá v prostoru všech reálných posloupností za předpokladu, že jsou všechny tři posloupnosti

(a) aritmetické?

(b) geometrické?

Úloha 8.12. V prostoru $\mathbb{R}^{2\times 2}$ uvažujme matici A. Ukažte, že posloupnost (I_2, A, A^2) je lineárně závislá.

Úloha 8.13. Ukažte, že řádky libovolné 3×3 antisymetrické ($A = -A^T$) matice nad tělesem $\mathbb{T}$, jehož charakteristika je různá od dvou, tvoří lineárně závislou posloupnost. Pro těleso charakteristiky 2 najděte protipříklad.