# Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Řešení

Verze ze dne 14. října 2021

## 8 Lineární (ne)závislost

**Cíle cvičení:**

- motivovat a procvičit pojmy lineární závislosti a nezávislosti,
- naučit se vybírat lineárně nezávislou generující posloupnost.

**Řešené příklady:**

**Úloha 8.1.** Dokažte, že je množina $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} |\ a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ podprostor racionálního vektorového prostoru $\mathbb{R}$, a navíc, že $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

**Řešení.** Stačí pro libovolné $d, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_3 \in \mathbb{Q}$ nahlédnout, že

$$(a_1 + b_1\sqrt[3]{2} + c_1\sqrt[3]{4}) + (a_2 + b_2\sqrt[3]{2} + c_2\sqrt[3]{4}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt[3]{2} + (c_1 + c_2)\sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}],$$

a dále, že

$$d(a_1 + b_1\sqrt[3]{2} + c_1\sqrt[3]{4}) = da_1 + db_1\sqrt[3]{2} + dc_1\sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}],$$

a konečně, že

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1\sqrt[3]{2} + c_1\sqrt[3]{4}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt[3]{2} + c_2\sqrt[3]{4}) &= \\ = (a_1a_2 + 2b_1c_2 + 2c_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + 2c_1c_2)\sqrt[3]{2} &+ (a_1c_2 + c_1a_2 + b_1b_2)\sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}].\end{aligned}$$

**Úloha 8.2.** Najděte nenulový polynom stupně (nejvýše) 3 s racionálními koeficienty, jehož kořenem je reálné číslo $1 - \sqrt[3]{2}$. Návod: z druhé části předchozí úlohy víme, že mocniny $1 - \sqrt[3]{2}$ patří do $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$, a tedy každé z nich odpovídá nějaká uspořádaná trojice racionálních čísel $a, b, c$. Hledaný polynom dává určitou racionální lineární kombinaci těchto trojic a naopak.

**Řešení.** Uvážíme vektory

$$(1 - \sqrt[3]{2})^0 = 1,\quad (1 - \sqrt[3]{2})^1 = 1 - \sqrt[3]{2},\quad (1 - \sqrt[3]{2})^2 = 1 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4},\quad (1 - \sqrt[3]{2})^3 = -1 - 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}$$

vektorového prostoru $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ nad tělesem $\mathbb{Q}$ a budeme v tomto prostoru hledat netriviální řešení vektorové rovnice

$$a_0 + a_1(1 - \sqrt[3]{2}) + a_2(1 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) + a_3(-1 - 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}) = 0,$$

která vede na homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že řešením je čtveřice $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (1, 3, -3, 1)$, tudíž je číslo $1 - \sqrt[3]{2}$ kořenem polynomu $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

**Úloha 8.3.** Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů $X$ ve vektorovém prostoru $V$ lineárně závislá, či nezávislá, jestliže

(a) $X = ((1,0,2,1)^T, (2,0,1,1)^T, (1,0,1,-1)^T)$ a $V = \mathbb{Q}^4$,

(b) $X = ((1,1)^T, (1,0)^T, (3,4)^T)$ a $V = \mathbb{Z}_7^2$,

(c) $X = ((1,1,2)^T, (2,0,1)^T, (2,1,1)^T)$ a $V = \mathbb{Z}_3^3$,

(d) $X = (3-i, 2+3i)$ a $V = \mathbb{C}$ nad tělesem $\mathbb{R}$,

(e) $X = (3-i, 2+3i)$ a $V = \mathbb{C}$ nad tělesem $\mathbb{C}$,

(f) $X = (x^2+x+1, x^2+2x, x^2+2)$ a $V = \mathbb{R}[x]$ nad tělesem $\mathbb{R}$.

**Řešení.** (a) Stačí zjistit, zda existuje (a v takovém případě půjde o lineárně závislé vektory), či neexistuje (což by znamenalo, že dané vektory by byly lineárně nezávislé) netriviální řešení vektorové rovnice

$$x_1 \cdot (1,0,2,1)^T + x_2 \cdot (2,0,1,1)^T + x_3 \cdot (1,0,1,-1)^T = (0,0,0,0)^T$$

Úlohu převedeme na otázku, zda existuje jednoznačné (tedy pouze triviální) řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $A$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z upravené soustavy dostáváme jednoznačné řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, tedy vektory $(1,0,2,1)^T$, $(2,0,1,1)^T$, $(1,0,1,-1)^T$ jsou lineárně nezávislé.

(b) Tentokrát nemusíme nic počítat, protože matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, do níž sepíšeme vektory určuje homogenní soustavu s alespoň jedním volným sloupcem. Proto existuje netriviální řešení homogenní soustavy s takovou maticí a posloupnost vektorů je lineárně závislá.

(c) Podobně jako v (a) se ptáme, zda existuje netriviální řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Protože $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, vidíme, že existuje netriviální řešení homogenní soustavy s touto maticí, a proto je posloupnost vektorů lineárně závislá.

(d) Dokazujeme podle definice a předpokládáme, že $0 = a(3-i) + b(2+3i) = (3a+2b) + (-a+3b)i$. Potom z reálné i imaginární části dostáváme jednu lineární rovnici nad $\mathbb{R}$:

$\begin{array}{rcrl} 3a & + & 2b & = 0 \\ -a & + & 3b & = 0 \end{array}$ a řešíme homogenní soustavu s maticí $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, která je zjevně regulární, proto má pouze triviální řešení. Tím jsme ovšem dokázali, že je dvojice $3-i$, $2+3i$ nad $\mathbb{R}$ lineárně nezávislá, tedy jde o bázi $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$.

(e) Uvažujeme posloupnost $3-i, 2+3i$ jako vektory nad $\mathbb{C}$, pak vidíme, že

$$2+3i = \frac{2+3i}{3-i} \cdot (3-i) = \left(\frac{3}{10} + \frac{11}{10}i\right) \cdot (3-i),$$

což znamená, že je posloupnost $X$ lineárně závislá.

(f) Podobně jako v (d) uvažujme reálnou lineární kombinaci položenou rovnu nulovému polynomu:

$$0 = (x^2+x+1)a + (x^2+2x)b + (x^2+2)c = x^2(a+b+c) + x(a+2b) + (a+2c) = 0.$$

Protože polynom je nulový, jsou-li jeho koeficienty nulové, dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & + & 2b & & & = & 0 \\ a & & & + & 2c & = & 0. \end{array}$$

Snadno zjistíme, že matice této homogenní soustavy $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ je singulární, tedy existuje její netriviální řešení a posloupnost $X$ je proto lineárně závislá.

**Úloha 8.4.** Vyberte z posloupnosti

$$X = ((2,4,0,1,4)^T, (4,3,0,2,3)^T, (1,2,3,4,0)^T, (3,1,1,1,2)^T, (4,3,4,0,2)^T)$$

lineárně nezávislou podposloupnost, která generuje celý podprostor $U = \mathrm{LO}\, X$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^5$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

**Řešení.** Potřebujeme si uvědomit, které vektory z daného seznamu jsou lineární kombinací předchozích. Seřadíme si tedy vektory do posloupnosti a budeme zjišťovat, které vektory jsou lineární kombinací předchozích členů posloupnosti. Nejprve si tedy seřadíme vektory do řádků matice, čímž máme dánu posloupnost vektorů, a tu budeme upravovat Gaussovou eliminací dokud nezískáme odstupňovanou matici. Jedná se tedy o posloupnost elementárních úprav, kdy k níže položeným řádkům přičítáme výše položené řádky, případně nelze-li nějakým řádkem upravit níže položené řádky, pak takový vektor) vyměníme z níže položeným vektorem přehazujeme násob tvar. Přitom si řádky původní matice označíme římskými číslicemi a budeme zaznamenávat všechna přehazování řádků a stačí zjistit, kterým řádkům původní matice odpovídají nenulové řádky Gaussovy matice (tj. odstupňovaného tvaru).

Poznamenejme, že je podstatné, abychom neměnili pořadí těch vektorů, pomocí nichž jsme upravovali všechny následující, tj. těch řádků matice, které už jsme použili k eliminaci následujících. Takový řádek už totiž odpovídá vektoru, který je lineárně nezávislý na předchozích, a jeho případná záměna za některý z následujících vektorů pro něj samozřejmě podmínku lineární nezávislosti na předchozích řádcích nemusí zachovat. V daném případě nejprve přičteme vhodné násobky prvního řádku k ostatním a poté přehodíme druhý a třetí řádek, jímž stejným způsobem vynulujeme čtvrtý a pátý řádek:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}2 & 4 & 0 & 1 & 4 & \mathrm{i}\\ 4 & 3 & 0 & 2 & 3 & \mathrm{ii}\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & \mathrm{iii}\\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & \mathrm{iv}\\ 4 & 3 & 4 & 0 & 2 & \mathrm{v}\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c}2 & 4 & 0 & 1 & 4 & \mathrm{i}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{ii}\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & \mathrm{iii}\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \mathrm{iv}\\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & \mathrm{v}\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c}2 & 4 & 0 & 1 & 4 & \mathrm{i}\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & \mathrm{iii}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{ii}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{iv}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{v}\end{array}\right).$$

Ukázalo se, že řádek ii je násobkem řádku i a řádky iv a v jsou lineární kombinací řádků i a iii. Naopak řádek iii není lineární kombinací řádku i. Hledanou bázi tvoří například první a třetí vektor posloupnosti $X$, tedy posloupnost $((2,4,0,1,4)^T, (1,2,3,4,0)^T)$.

**Úloha 8.5.** Doplňte lineárně nezávislou množinu $B = \{(2,4,0,1,4)^T, (1,2,1,0,3)^T\}$ na lineárně nezávislou posloupnost, která generuje celý aritmetický vektorový prostor $\mathbb{Z}_5^5$.

**Řešení.** Připomeňme, že se řádkový vektorový prostor matice nezmění, upravíme-li ji posloupností elementárních řádkových úprav. Seřadíme-li vektory množiny $B$ do řádků matice, kterou upravíme na odstupňovanou matici, vidíme, že

$$\mathrm{LO}\, B = \mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix}2 & 4 & 0 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix}^T\right) = \mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix}2 & 4 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}^T\right)$$

Nyní snadno doplníme matici na odstupňovanou čtvercovou matici, jejíž všechny řádky jsou nenulové, například vektory standardní báze (i-tý přidáme, právě když i-tý sloupec matice není bázový) a přitom si všimneme, že:

$$\begin{pmatrix}2 & 4 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 4 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 4 & 0 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = A.$$

Protože matice $A$ v odstupňovaném tvaru neobsahuje žádný nulový řádek, tedy je hodnosti 5, generují řádky celý vektorový prostor $\mathbb{Z}_5^5$. Z odstupňovaného tvaru navíc vidíme, že žádný řádek není lineární kombinací předchozích řádků, proto jsou řádky lineárně nezávislé. Tedy množina $\{(0,1,0,0,0)^T$, $(0,0,0,1,0)^T$, $(0,0,0,0,1)^T\}$ doplňuje množinu $B$ na lineárně nezávislou posloupnost, která generuje celý $\mathbb{Z}_5^5$.

**Další základní příklady k počítání:**

**Úloha 8.6.** Dokažte, že je množina reálných polynomů reálným vektorovým prostorem, který neobsahuje žádnou konečnou generující množinu.

**Úloha 8.7.** Vyberte z množiny

$$X = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

ve vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_2^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ maximální lineárně nezávislou množinu a dokažte, že generuje prostor $\mathbb{Z}_2^4$.

Řešení: např. $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$.

**Obtížnější příklady:**

**Úloha 8.8.** Popište podmnožinu $\mathrm{LO}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \right\} \cap \mathrm{LO}\left\{ \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \right\}$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$.

Řešení: $\mathrm{LO}\{(4,3,1)^T\}$

**Úloha 8.9.** Dokažte, že průnik dvou podprostorů vektorového prostoru $V$ je vždy podprostor. Najděte nějakou množinu generátorů podprostorů $W_1 \cap W_2$, $W_3 \cap W_4$ a $W_1 \cap W_3 \leq \mathbb{Z}_5^5$, kde

$$\begin{aligned}
W_1 &:= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 4 & 3\\ 3 & 1 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix}\\
W_2 &:= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}2 & 4 & 0 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 2 & 4 & 2\end{pmatrix}\\
W_3 &:= \mathrm{LO}\{(1,2,1,4,3)^T, (0,4,1,1,0)^T, (2,0,1,3,4)^T\}\\
W_4 &:= \mathrm{LO}\{(3,1,3,0,0)^T, (2,0,1,4,1)^T\}
\end{aligned}$$

Platí, že sjednocení dvou podprostorů $V$ je vždy podprostor?

**Úloha 8.10.** Rozhodněte, zda je posloupnost $(\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x)$ prvků reálného vektorového prostoru všech reálných funkcí reálné proměnné lineárně nezávislá.

**Úloha 8.11.** Nechť $(a_n)_1^\infty, (b_n)_1^\infty, (c_n)_1^\infty$ jsou tři nekonečné reálné posloupnosti. Za jakých podmínek je posloupnost $((a_n)_1^\infty, (b_n)_1^\infty, (c_n)_1^\infty)$ lineárně nezávislá v prostoru všech reálných posloupností za předpokladu, že jsou všechny tři posloupnosti

(a) aritmetické?

(b) geometrické?

**Úloha 8.12.** V prostoru $\mathbb{R}^{2\times 2}$ uvažujme matici $A$. Ukažte, že posloupnost $(I_2, A, A^2)$ je lineárně závislá.

**Úloha 8.13.** Ukažte, že řádky libovolné $3 \times 3$ antisymetrické ($A = -A^T$) matice nad tělesem $\mathbb{T}$, jehož charakteristika je různá od dvou, tvoří lineárně závislou posloupnost. Pro těleso charakteristiky 2 najděte protipříklad.