

# Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Zadání

Verze ze dne 15. listopadu 2021

## 7 Vektorové prostory

Cíle cvičení:

- porozumět pojmům podprostor, lineární kombinace, lineární obal a množina generátorů.

Řešené příklady:

**Úloha 7.1.** Pro  $U := \text{LO} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  rozhodněte, zda (a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in U$  a (b)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$ , je-li  $U$  podprostor aritmetického vektorového prostoru  $\mathbb{Z}_5^3$  nad tělesem  $\mathbb{Z}_5$ .

**Úloha 7.2.** Rozhodněte, zda je podprostorem reálného vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$  množina vektorů:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ 2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}, & \text{(b)} \quad & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ 2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}, & \text{(c)} \quad & \left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \\ \text{(d)} \quad & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, & \text{(e)} \quad & \mathbb{Q}^3, & \text{(f)} \quad & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ 2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}, & \text{(g)} \quad & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

V případech, kdy se jedná o podprostor, jej zapište jako lineární obal vhodných vektorů.

**Úloha 7.3.** Rozhodněte, zda množina  $X$  generuje vektorový prostor  $\mathbb{Z}_5^3$  nad tělesem  $\mathbb{Z}_5$ , jestliže

$$\text{(a)} \quad X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{(b)} \quad X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{(c)} \quad X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Úloha 7.4.** Rozhodněte, zda je ve vektorovém prostoru  $\mathbb{Z}_7^4$  nad tělesem  $\mathbb{Z}_7$  vektor  $\mathbf{v}$  lineární kombinací vektorů množiny

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

jestliže

$$\text{(a)} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(d)} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

V případě, že ano, určete koeficienty této lineární kombinace.

**Úloha 7.5.** Rozhodněte, zda je množina  $U$  podprostorem aritmetického vektorového prostoru  $\mathbb{Z}_5^3$  nad tělesem  $\mathbb{Z}_5$ , jestliže víte, že

(a)  $U = \{(0, 0, 0)^T\}$ , (b)  $U = \{(0, 0, 0)^T, (1, 2, 3)^T\}$ , (c)  $|U| = 4$  a  $U \subseteq \mathbb{Z}_5^3$ ,

(d)  $U = \{(0, 0, 0)^T, (1, 2, 3)^T, (2, 4, 1)^T, (3, 1, 4)^T, (4, 3, 2)^T\}$ , (e)  $|U| = 125$  a  $U \subseteq \mathbb{Z}_5^3$ , (f)  $U = \emptyset$ .

**Další základní příklady k počítání:**

**Úloha 7.6.** Vyjádřete ve vektorovém prostoru  $\mathbb{Q}^3$  vektor  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  jako lineární kombinaci vektorů

$$(a) \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad (b) \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right), \quad (c) \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

**Úloha 7.7.** Rozhodněte, zda jsou pro obecné těleso  $T$  podprostorem

(a) řešení homogenní soustavy rovnic o  $n$  neznámých v prostoru  $T^n$ ,

(b) řešení nehomogenní soustavy rovnic o  $n$  neznámých v prostoru  $T^n$ ,

(c) čtvercové matice, které komutují s danou čtvercovou maticí  $A$ , ve vektorovém prostoru všech čtvercových matic stejného stupně,

(d) reálné polynomy v reálném vektorovém prostoru spojitých reálných funkcí,

(e) sudé funkce v reálném vektorovém prostoru všech reálných funkcí.

**Úloha 7.8.** Rozhodněte, zda je podprostorem

(a) podmnožina všech reálných posloupností splňujících rekurentní vztah  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} = 5a_{n+1} - a_n$  v prostoru  $\mathbb{R}^\omega$ .

(b) podmnožina všech reálných posloupností splňujících rekurentní vztah  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} = 5a_{n+1} - 1$  v prostoru  $\mathbb{R}^\omega$ .

(c) podmnožina všech horních trojúhelníkových matic v prostoru všech čtvercových matic  $n \times n$  nad  $T$ .

(d) podmnožina všech neklesajících funkcí v prostoru všech funkcí z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$ .

(e) podmnožina všech polynomů, jejichž stupeň není prvočíslo, v prostoru všech polynomů v proměnné  $x$  s koeficienty v obecném tělese  $T$ .

### Obtížnější příklady:

**Úloha 7.9.** Označme  $A, B$  nenulové matice,  $R$  regulární matici. Ukažte na příkladech, že (a)  $\text{Ker } AR$  nemusí být rovno  $\text{Ker } A$ , (b)  $\text{Ker } BA$  nemusí být rovno  $\text{Ker } A$ , (c)  $\text{Im } RA$  nemusí být rovno  $\text{Im } A$ , (d)  $\text{Im } AB$  nemusí být rovno  $\text{Im } A$ .

**Úloha 7.10.** Nechť  $V$  je podprostor aritmetického vektorového prostoru  $T^n$ . Existuje soustava lineárních rovnic nad  $T$ , která má řešení právě všechny vektory z  $V$ ? Nalezněte ji pro podprostory z úlohy 7.2.

**Úloha 7.11.** Ukažte, že pro libovolnou čtvercovou matici  $A$  a libovolné  $n \in \mathbb{N}$  platí  $\text{Ker } A^n \leq \text{Ker } A^{n+1}$ , a  $\text{Im } A^n \geq \text{Im } A^{n+1}$ . Navíc, pokud pro nějaké  $n \in \mathbb{N}$  platí  $\text{Im } A^n = \text{Im } A^{n+1}$ , pak pro všechna  $j \in \mathbb{N}$  platí, že  $\text{Im } A^n = \text{Im } A^{n+j}$ . Zformulujte a dokažte i analogické tvrzení pro  $\text{Ker}$ .

**Úloha 7.12.** Najděte matici  $A$  takovou, aby  $\text{Im } A = \text{Ker } A = \text{Im } A^T = \text{Ker } A^T$ . Může být taková matice reálná? A komplexní?