Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Řešení
Verze ze dne 28. listopadu 2021

6 Regulární matice

Cíle cvičení:

- naučit se pro regulární matice hledat (jednostranně) inverzní matice,
- procvičit rozklad na součin elementárních matic.

Řešené příklady:

Úloha 6.1. Existuje-li, najděte nad tělesy $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{R}$ nějakou zprava inverzní matici k matici

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Pro každou z matic A řešíme maticovou rovnici $AX = I_n$ pro jednotkovou matici I_n. Tuto úlohu umíme řešit jako systém soustav rovnic se společnou maticí levých stran A.

(a) Hledáme nějaké řešení rovnice $3x + 4y = 1$. Snadno spočítáme nejprve nad tělesem $\mathbb{R}$ parametrický popis všech řešení ve tvaru $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1-4t}{3} \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$, možným prvým inverzem je tedy například vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pro těleso $\mathbb{Z}_5$ dostáváme parametrický popis všech řešení ve tvaru $\left\{ \begin{pmatrix} 2+2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5 \right\}$ a příkladem je potom vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) Upravujeme posloupností elementárních úprav rozšířenou matici

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Odtud okamžitě vidíme, že zprava inverzní maticí je například matice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$ a $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_5$

(c) Opět upravujeme nad $\mathbb{R}$ rozšířenou matici:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

Odtud vidíme, že zprava inverzní reálnou maticí je matice $\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ dostáváme soustavu,která nemá řešení

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right),$$

tedy zprava inverzní matici v tomto případě nenajdeme.

Úloha 6.2. Rozhodněte, které z následujících matic jsou regulární, a k regulárním maticím najděte jejich inverzní matice.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}, \mathbb{Z}_5$, (b) $\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 2 & -i \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{C}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_7$, (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}^T$ nad $\mathbb{Z}_7$.

Řešení. Potřebujeme obdobnou úvahou jako v předchozí úloze nejprve zjistit, zda odstupňovaná matice každé ze uvedených čtvercových matic obsahuje či neobsahuje nulový řádek. V prvním případě jde o singulární a v druhém o regulární matici. Inverzní matice potom počítáme standardním algoritmem.

(a) Úlohu už jsme vyřešili v předchozím příkladě. Nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ neexistuje zprava inverzní matice, proto neexistuje ani (oboustranně) inverzní matice. Nad tělesem reálných čísel má inverzní matice tvar $\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Označme $D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 2 & -i \end{pmatrix}$ a postupujeme stejně jako výše s využitím aritmetiky komplexních čísel, během výpočtu přitom zjistíme, že inverz existuje:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -i & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & -1+i & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1-i}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1-i & i \end{array}\right)$$

Spočítali jsme, že $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & 0 \\ -1-i & i \end{pmatrix}$.

(c) Položme $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Počítáme tentokrát nad $\mathbb{Z}_7$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 2 \end{array}\right).$$

Dostali jsme $G^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

(d) Stačí využít předchozí výsledek a tvrzení z přednášky, které říká, že

$$(G^T)^{-1} = (G^{-1})^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Úloha 6.3. Napište všechny regulární matice z předchozí úlohy jako součin elementárních matic.

Řešení. Stačí nám zaznamenat inverzní elementární úpravy k těm, které jsme prováděli při převodu matice na inverzní, do elementárních matic:

Matici $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem reálných čísel jsme převedli na jednotkovou tak, že jsme nejprve odečetli trojnásobek prvního řádku k druhému, poté vydělili druhý řádek číslem -5 a nakonec odečetli dvojnásobek druhého řádku od prvního. To znamená, že

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

proto hledané elementární matice dostáváme přenásobením rovnosti zleva příslušnými inverzními elementárními maticemi, které jsou samozřejmě také elementární:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

V případě matice $D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 2 & -i \end{pmatrix}$ nad tělesem komplexních čísel jsme postupně upravovali: nejprve jsme $(1-i)$-násobek prvního řádku odečetli od druhého a poté jsme první řádek vynásobili hodnotou $\frac{1}{1+i}$ a druhý řádek hodnotou i. Nyní zbývá elementární matice opačných elementárních úprav sepsat do matic

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 2 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Podobně pro matici $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ stačí zaznamenat provedené elementární úpravy do inverzních elementárních matic $G =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Konečně pro matici transponovanou ke G stačí transponovat celý součin elementárních matic, tedy $G^T =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Úloha 6.4. Spočítejte součiny reálných matic

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Cílem úlohy je skrze úvahy o maticích elementárních úprav najít jiný (rychlejší) způsob, než spočtení inverze a vynásobení této inverze druhou maticí. (Tento typ úlohy se bude přirozeně objevovat později při práci se zobrazeními a bázemi.)

Řešení. (a) Označme $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Rozšíříme-li matici A o matici B a budeme-li vzniklou matici $(A \mid B)$ upravovat stejně jako v předchozích úlohách takovými elementárními úpravami, abychom vlevo obdrželi jednotkovou matici. Využijeme-li faktu, že

$$(A \mid B) \sim A^{-1} \cdot (A \mid B) = (I_2 \mid A^{-1}B),$$

dostaneme vpravo hledaný součin $A^{-1}B$. Počítejme:

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 5 & -3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & -5 \end{array}\right).$$

Spočítali jsme, že $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 & 7 \\ -3 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$. □

(b) Označme $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Využijeme-li tvrzení z přednášky, dostaneme

$$(C \cdot D^{-1})^T = (D^{-1})^T \cdot C^T = (D^T)^{-1} \cdot C^T,$$

a proto můžeme postupovat stejným způsobem jako v bodu (a), ovšem pro součin transponovaných matic v obráceném pořadí:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 12 & 8 & 8 & -4 & 4 \\ 12 & 9 & 0 & 9 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 2 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 0 & 18 & -27 & -3 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 6 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 2 \end{array}\right).$$

Zjistili jsme, že $(D^T)^{-1} \cdot C^T = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -1 \\ -8 & 13 & 2 \end{pmatrix}$, a proto $C \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -9 & 13 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. □

Další základní příklady k počítání:

Úloha 6.5. Pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ určete A^{-1}, $(A^T)^{-1}$ a $(A^2)^{-1}$ nad tělesy $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{Q}$.

Řešení: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Q}$. Pro $\mathbb{Z}_5$, resp. $\mathbb{Z}_7$ stačí matice upravit modulo 5, resp. 7.

Úloha 6.6. Spočítejte nad tělesy $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}_7$ součin $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Řešení: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -10 & 2 \\ -4 & 15 & -2 \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}$ a $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_7$.

Úloha 6.7. Rozhodněte, pro která a z tělesa je matice A_a regulární, a pro tato a spočítejte A_a^{-1}.

$$\text{(a)} \quad A_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2a-1 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7, \qquad \text{(b)} \quad A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_5.$$

Řešení: (a) $A_a^{-1} = \frac{1}{(a-1)^2}\begin{pmatrix} 1-2a & a \\ a & -1 \end{pmatrix}$ pro $a \in \mathbb{Z}_7 \setminus \{1\}$

(b) $A_a^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 3a^{-1} & 2a^{-1} \\ 0 & 2 & 3 \\ \frac{4}{a^2} & \frac{a+2}{a^2} & \frac{3}{a^2} \end{pmatrix}$ pro $a \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$.

Rozšiřující příklady:

Pojem LU rozkladu, který představuje maticový popis Gaussovy eliminace, letos na přednášce zaveden nebyl, ale seznámíte-li se s ním můžete ve skriptech část 4.5.2, můžete si níže spočítat několik příkladů.

Úloha 6.8. Existuje-li, najděte LU rozklad reálných matic:

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(d)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: (a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Úloha 6.9. Pomocí LU rozkladu reálné matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ (z úlohy 6.8 (c)) spočítejte všechna řešení soustavy rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ pro vektor pravých stran $\mathbf{y} = (-3, 2, -1)^T$.

Úloha 6.10. Pro reálnou matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ověřte, že nemá LU-rozklad, najděte permutační matici P tak, aby matice PA měla LU rozklad, a ten spočítejte.

Řešení: např. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Úloha 6.11. Uvažujme blokovou matici $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, kde A je regulární a $Z := D - CA^{-1}B$ také. Ukažte, že pak je X také regulární a $X^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}(I + BZ^{-1}CA^{-1}) & -A^{-1}BZ^{-1} \\ -Z^{-1}CA^{-1} & Z^{-1} \end{pmatrix}$.

Úloha 6.12. Tvoří množina $\left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$ s operacemi součtu a součinu matic těleso? Pokud ne, který axiom nebo jeho důsledek není splněn? Pokud ano, co je v něm nulovým prvkem a co jednotkovým prvkem? Změnilo by se něco, kdyby x náleželo jinému tělesu než $\mathbb{R}$?

Úloha 6.13. Nechť T je těleso a $\mathbf{a} \in T^n$. Za jakých podmínek je matice $I_n + \mathbf{a}\mathbf{a}^T$ regulární a jak vypadá její inverzní matice?

Úloha 6.14. Nechť B je regulární matice a A je matice splňující $A^5 = B^3$. Musí být A nutně regulární matice?

Úloha 6.15. Jak se změní inverzní matice k regulární matici A, pokud v A vyměníme i-tý a j-tý řádek? A jak, pokud v ní vynásobíme i-tý sloupec nenulovým prvkem tělesa?