

# Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Zadání

Verze ze dne 14. října 2021

## 5 Matice soustavy a zobrazení

**Cíle cvičení:**

- procvičit si násobení matic, maticový zápis soustav rovnic a práci se zobrazeními určenými maticí.

V následujícím značíme  $f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$  pro matici  $A$ .

**Řešené příklady:**

**Úloha 5.1.** Pro matice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  a  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$  nad tělesem  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{Z}_5$  spočítejte pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$  jejich mocniny  $\mathbf{A}^n$ ,  $\mathbf{B}^n$ ,  $\mathbf{C}^n$ ,  $\mathbf{D}^n$ .

**Úloha 5.2.** Pro matici  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  najděte nad tělesem  $\mathbb{Z}_5$  všechna řešení rovnic

$$(a) \quad A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (c) \quad A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (d) \quad AX = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Úloha 5.3.** Uvažujme zobrazení  $f_M : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$  pro matici  $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  nad tělesem  $\mathbb{Z}_5$ . Najděte všechny vektory  $\mathbf{v}$ , pro které

$$(a) \quad f_M(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad f_M(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (c) \quad f_M(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Úloha 5.4.** Uvažujme pro matice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  a  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  nad tělesem  $\mathbb{Z}_5$  dvojici zobrazení  $f_A : \mathbb{Z}_5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$  a  $f_B : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ .

- Najděte všechny vektory  $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_5^3$ , pro něž je  $f_B(\mathbf{v}) = (0, 0)^T$ .
- Najděte všechny vektory  $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_5^3$ , pro něž je  $f_B(\mathbf{v}) = (1, 2)^T$ .
- Rozhodněte, zda jsou  $f_A$  a  $f_B$  prostá zobrazení a zda jsou na.

**Úloha 5.5.** Mějme zobrazení  $f_A : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$  pro racionální matici  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

- Spočítejte jádro matice  $A$ ,
- dokažte, že  $f_A$  je bijekce,
- existuje-li, najděte racionální matici  $X$ , pro niž  $AX = I_2$ ,
- existuje-li, najděte matici  $B$ , pro niž platí  $f_B \circ f_A = f_A \circ f_B = \text{Id}$ , tedy  $f_B = f_A^{-1}$ , kde je  $f_B$  definováno předpisem  $f_B(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$ ,
- spočítejte součin  $X \cdot A$ .

### Další základní příklady k počítání:

**Úloha 5.6.** Uvažujme matici  $M$  nad tělesem  $\mathbb{Z}_5$ . Spočítejte jádro matice  $M$  (zobrazení  $f_M$ ) a najděte úplný vzor vektoru  $\mathbf{v}$  v zobrazení  $f_M$ , jestliže

$$(a) M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (b) M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Úloha 5.7.** Najděte nad tělesem  $\mathbb{Z}_7$  všechny matice  $\mathbf{X}$  splňující rovnost  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ , jestliže

$$(a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (b) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Úloha 5.8.** Pro matici  $B$  z úlohy 5.4

- (a) najděte všechny matice  $X$  nad  $\mathbb{Z}_5$ , pro něž  $BX = I_2$ ,
- (b) najděte všechny matice  $Y$  nad  $\mathbb{Z}_5$ , pro něž  $YB = I_3$ .

### Obtížnější příklady:

**Úloha 5.9.** Najděte takové tři matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ , aby součin žádných dvou nebyl nula a součin všech tří byl nulová matice.

**Úloha 5.10.** Pro libovolné  $k \in \mathbb{N}$  najděte matici typu  $2 \times 2$  takovou, že posloupnost mocnin  $\mathbf{A}^n$  má periodu  $k$ . Úlohu řešte zvlášť nad  $\mathbb{R}$  a zvlášť nad konečným tělesem  $\mathbb{Z}_p$ .

**Úloha 5.11.** Uvažujme zobrazení  $f : \mathbb{C} \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  definované předpisem  $f(a+ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ . Dokažte, že toto zobrazení představuje maticovou realizaci komplexních čísel, tj. pro  $z, w \in \mathbb{C}$  platí

$$\begin{aligned} f(z+w) &= f(z) + f(w) \\ f(zw) &= f(z)f(w) \end{aligned}$$

Najděte zobrazení  $f : \mathbb{H} \rightarrow M_2(\mathbb{C})$  se stejnými vlastnostmi, tedy maticovou realizaci kvaternionů.

**Úloha 5.12.** Označme  $J_n$  čtvercovou  $n \times n$  matici, jejíž  $ij$ -tý element je  $(J_n)_{ij} := \delta_{i+1,j}$ . (Používáme Kroneckerovo delta, ale pozor,  $J_n$  není jednotková matice!)

- (a) Spočítejte  $k$ -té mocniny matice  $J_n$  a  $J_n^T$  pro  $n = 2, 3, 4, 5$  a  $k \in \mathbb{N}$ .
- (b) Ilustrujte pomocí matic  $J_n$  a  $J_n^T$ , že pro maticové násobení obecně neplatí vzorec  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ . Čím je třeba tento vzorec nahradit?
- (c) Je-li  $X$  matice typu  $p \times q$ , pro blokovou matici  $A = \begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$  spočítejte její mocninu  $A^k$  pro libovolné  $k \in \mathbb{N}$  a matici transponovanou  $A^T$ .
- (d) Spočítejte součin dvou  $6 \times 6$  matic v blokovém zápise  $\begin{pmatrix} J_3 & J_3 \\ J_3^T & J_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_3^T & J_3 \\ J_3^2 & J_3 \end{pmatrix}$ . Zapište výsledek také jako (i) blokovou matici s  $3 \times 3$  bloky, (ii)  $6 \times 6$  číselnou matici, (iii) blokovou matici s  $2 \times 2$  bloky.