Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Řešení
Verze ze dne 14. října 2021

5 Matice soustavy a zobrazení

Cíle cvičení:

- procvičit si násobení matic, maticový zápis soustav rovnic a práci se zobrazeními určenými maticí.

V následujícím značíme $f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ pro matici A.

Řešené příklady:

Úloha 5.1. Pro matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}_5$ spočítejte pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ jejich mocniny $\mathbf{A}^n$, $\mathbf{B}^n$, $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{D}^n$.

Řešení. Nejprve budeme počítat nad $\mathbb{R}$. Zjistíme, že

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{0}_{n\times n} \text{ pro } n \geq 2, \qquad \mathbf{B}^2 = -\mathbf{I}_2, \mathbf{B}^3 = -\mathbf{B}, \mathbf{B}^4 = \mathbf{I}_2 \text{ a dále } \mathbf{B}^{4q+k} = \mathbf{B}^k \text{ pro } q \in \mathbb{N}, k \in \{0,1,2,3\}$$
$$\mathbf{C}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D}^1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ a dále } \mathbf{D}^n = 8^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Poslední rovnost se nejlépe odvodí s pomocí asociativity maticového násobení, např.

$$\mathbf{D}^2 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} 8 \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = 8\mathbf{D}$$

a podobně i pro vyšší mocniny. Výsledky nad $\mathbf{Z}_5$ jsou pro $\mathbf{A}$ stejné a dále

$$\mathbf{B}^{4q} = \mathbf{I}_2, \mathbf{B}^{4q+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^{4q+2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^{4q+3} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ pro } q \in \mathbb{N}$$
$$\mathbf{C}^{4q} = \mathbf{I}_2, \mathbf{C}^{4q+1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{C}^{4q+2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{C}^{4q+3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ pro } q \in \mathbb{N}$$
$$\mathbf{D}^{4q+1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{4q+2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{4q+3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^{4q+4} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ pro } q \in \mathbb{N}_0$$

□

Úloha 5.2. Pro matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ všechna řešení rovnic

(a) $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (b) $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, (c) $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, (d) $AX = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení. (a) Řešíme homogenní soustavu s maticí A. Tu posloupností elementárních úprav převedeme na odstupňovaný tvar (pro snazší výpočet ji můžeme upravit až do redukované podoby):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nyní zpětnou substitucí zjistíme, že množina všech řešení homogenní soustavy s maticí A, což je právě jádro matice A, má parametrický tvar $\operatorname{Ker} A = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

(b) Řešíme soustavu rovnic, jejíž homogenní variantu jsme vyřešili v úloze (a). To znamená, že stačí najít jedno řešení nebo rozhodnout, že řešení neexistuje. Stejnými úpravami jako v (a) upravujeme rozšířenou matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Protože víme, že každé řešení nehomogenní soustavy je tvaru jedno řešení + řešení homogenní soustavy, tvoří množinu všech řešení právě $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

(c) Řešíme obdobně jako v (b):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Tentokrát vidíme, že řešení soustavy neexistuje.

(d) Sloupce hledané matice X, která je nutně typu 3×2, tvoří právě řešení úloh (a) a (b), proto X řeší naši maticovou rovnici, právě když $X \in \left\{ \begin{pmatrix} s & 1+t \\ 2s & 1+2t \\ s & t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Z}_5 \right\}$. □

Úloha 5.3. Uvažujme zobrazení $f_M : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ pro matici $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$. Najděte všechny vektory $\mathbf{v}$, pro které

$$\text{(a)} \quad f_M(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad f_M(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)} \quad f_M(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Podobně jako v předchozím příkladu řešíme tři soustavy lineárních rovnic se stejnými maticemi pravých stran, z nichž první soustava je homogenní. Pro všechny tři soustavy stačí matici levých stran A upravit (a hlavně zapsat) na odstupňovaný tvar jen jednou. Proto si úlohu sepíšeme do jediné matice a upravíme stejnými řádkovými úpravami oba nenulové vektory pravých stran:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Nyní nejprve zpětnou substitucí zjistíme, že množina všech řešení homogenní soustavy (a) je tvaru $\{t \cdot (4,1,1)^T \mid t \in \mathbb{Z}_5\}$. Nyní zbývá najít zpětnou substitucí jedno řešení pro obě pravé strany a volbu třetí složky například 0. Snadno spočteme, že v případě (b) je řešením vektor $(3,2,0)^T$ a v případě (c) vektor $(1,4,0)^T$, proto jsou množiny všech řešení tvaru

$$\text{(a)} \quad \left\{ t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5 \right\}, \quad \text{(b)} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5 \right\}, \quad \text{(c)} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5 \right\}.$$

□

Úloha 5.4. Uvažujme pro matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ dvojici zobrazení $f_A : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ a $f_B : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$.

(a) Najděte všechny vektory $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_5^3$, pro něž je $f_B(\mathbf{v}) = (0,0)^T$.

(b) Najděte všechny vektory $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_5^3$, pro něž je $f_B(\mathbf{v}) = (1,2)^T$.

(c) Rozhodněte, zda jsou f_A a f_B prostá zobrazení a zda jsou na.

Řešení. (a) Stačí, abychom obvyklým způsobem vyřešili homogenní soustavu rovnic s maticí

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tedy vidíme, že vektor $\mathbf{v}$ splňuje $f_B(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, právě když leží v množině $\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

(b) Tentokrát standardně řešíme soustavu rovnic tvaru $B\mathbf{x} = (1,2)^T$ s maticovým zápisem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

Spočítáme jedno partikulární řešení $(1,1,0)^T$ a využijeme výsledku (a), proto $\mathbf{v}$ splňuje $f_B(\mathbf{v}) = (1,2)^T$, právě když leží v množině $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

(c) Připomeňme, že je zobrazení f_A prosté, jestliže pro každé dva vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ platí implikace $f_A(\mathbf{u}) = f_A(\mathbf{v}) \implies \mathbf{u} = \mathbf{v}$. Protože $f_A(\mathbf{u}) = f_A(\mathbf{v})$, právě když $f_A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = f_A(\mathbf{u}) - f_A(\mathbf{v}) = 0$, lze ekvivalentně prostotu zobrazení f_A vyjádřit podmínkou $f_A(\mathbf{u}) = 0 \implies \mathbf{u} = 0$. Tedy nám stačí zjistit, zda mají soustavy rovnic $A\mathbf{x} = (0,0)^T$ a $B\mathbf{x} = (0,0)^T$ nějaké nenulové řešení. V obou případech po jediné ekvivalentní úpravě vidíme, že nenulové řešení existují, v prvním případě například $f_A((3,1)^T) = (0,0)^T = f_A((0,0)^T)$ a v druhém příkladě například $f_B((4,1,1)^T) = (0,0)^T = f_B((0,0,0)^T)$, proto zobrazení f_A ani f_B není podle definice prosté.

Konečně, otázku, zda je f_A či f_B na, lze přeložit na otázku, zda pro každou pravou stranu daných soustav existuje řešení. V prvním případě vidíme, že nikoli, například pro pravou stranu $(1,0)^T$ vidíme, že řešení soustavy $A\mathbf{x} = (1,0)^T$ neexistuje. V druhém případě vidíme, že odstupňovaný tvar matice B nemá žádný nulový řádek, tedy pivoty každé soustavy s maticí levých stran B leží v části matice odpovídající levým stranám, proto řešení vždy existuje. Tedy f_A není na, zatímco f_B je zobrazení na $\mathbb{Z}_5^2$. □

Úloha 5.5. Mějme zobrazení $f_A : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ pro racionální matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Spočítejte jádro matice A,

(b) dokažte, že f_A je bijekce,

(c) existuje-li, najděte racionální matici X, pro niž $AX = I_2$,

(d) existuje-li, najděte matici B, pro niž platí $f_B \circ f_A = f_A \circ f_B = \mathrm{Id}$, tedy $f_B = f_A^{-1}$, kde je f_B definováno předpisem $f_B(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$,

(e) spočítejte součin $X \cdot A$.

Řešení. (a) Jádro matice je právě množina všech řešení homogenní soustavy rovnic s danou maticí, tj. $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^2 \mid A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Standardním postupem v jediném kroku upravíme matici A na odstupňovanou

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

a vidíme, že matice levých stran neobsahuje žádný sloupec odpovídající volné proměnné, tudíž jediné řešení soustavy je triviální a $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$.

(b) Máme dokázat, že je zobrazení dané maticí A prosté a na, tedy, že pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^2$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^2$, pro který $f_A(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} = \mathbf{v}$. Opět tedy řešíme soustavy rovnic. Uvědomíme-li si, že podle Věty 4.33 z přednášky je každé řešení soustavy rovnic s maticí A tvaru $\mathbf{u} + \operatorname{Ker} A$ pro nějaké partikulární řešení, stačí pro ověření prostoty zobrazení zjistit, zda je jádro $\operatorname{Ker} A$ jednoprvkové. To jsme ovšem už spočítali v úloze (a). Navíc jsme v (a) zjistili, že odstupňovaný tvar matice A neobsahuje žádný nulový řádek, tedy pro každou pravou stranu $\mathbf{v}$ umíme soustavu $A\,\mathbf{x} = \mathbf{v}$ vyřešit. Tím máme ověřeno, že je zobrazení f_A prosté i na.

(c) Budeme řešit dvě soustavy rovnic se stejnou maticí levých stran

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a hledanou maticí (existují-li obě řešení) sestavíme ze sloupců $X = (\mathbf{x} \mid \mathbf{y})$. Obě soustavy přitom upravujeme společně v jedné rozšířené matici.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right).$$

Postupně jsme odčítali druhý řádek od prvního, přičítali trojnásobek prvního řádku ke druhému, vynásobili první řádek hodnotou -1 a odečetli druhý řádek od prvního, abychom zjistili, že $X = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Všimněme si, že upravením levé strany matice na jednotkovou znamená, že už nemusíme dopočítávat sloupce matice X, protože se na levé straně upravené matice hledaná matice X objeví.

(d) Využitím definice zobrazení f_A a f_B pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^2$ dostaneme

$$f_A \circ f_B(\mathbf{v}) = f_A(B \cdot \mathbf{v}) = A \cdot B \cdot \mathbf{v}\,.$$

položíme-li tedy $B = X = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, tj. vezmeme matici nalezenou v úloze (c), obdržíme pro každé $\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^2$

$$f_A \circ f_B(\mathbf{v}) = A \cdot (X \cdot \mathbf{v}) = (A \cdot X) \cdot \mathbf{v} = I_2 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}\,.$$

Tím jsme dokázali, že $f_A \circ f_B = \mathrm{Id}$. Protože je f_A bijekce, víme že existuje f_A^{-1}, proto

$$f_A^{-1} = f_A^{-1} \circ \mathrm{Id} = f_A^{-1} \circ (f_A \circ f_B) = (f_A^{-1} \circ f_A) \circ f_B = \mathrm{Id} \circ f_B = f_B,$$

proto i $f_B \circ f_A = \mathrm{Id}$.

(e) Přímým výpočtem lze snadno zjistit, že $X \cdot A = I_2$. Stejný závěr ovšem plyne také z pozorování úlohy (d), že $f_B \circ f_A = \mathrm{Id}$. □

Další základní příklady k počítání:

Úloha 5.6. Uvažujme matici M nad tělesem $\mathbb{Z}_5$. Spočítejte jádro matice M (zobrazení f_M) a najděte úplný vzor vektoru $\mathbf{v}$ v zobrazení f_M, jestliže

(a) $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, (b) $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Řešení: (a) $\operatorname{Ker} f_M = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{Z}_5 \right\}$, $f_M \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f_M \right\}$

(b) $\operatorname{Ker} f_M = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{Z}_5 \right\}$, $f_M \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f_M \right\}$.

Úloha 5.7. Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ všechny matice $\mathbf{X}$ splňující rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, jestliže

$$\text{(a)} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 4c & 2+4d \\ c & d \end{pmatrix} \mid c,d \in \mathbb{Z}_7 \right\}$, (b) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Úloha 5.8. Pro matici B z úlohy 5.4

(a) najděte všechny matice X nad $\mathbb{Z}_5$, pro něž $BX = I_2$,

(b) najděte všechny matice Y nad $\mathbb{Z}_5$, pro něž $YB = I_3$.

Řešení: (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4s & 4t \\ s & t \\ s & t \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{Z}_5 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4s+1 & 4t \\ s+4 & t+1 \\ s & t \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{Z}_5 \right\}$ (b) $\emptyset$.

Obtížnější příklady:

Úloha 5.9. Najděte takové tři matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, aby součin žádných dvou nebyl nula a součin všech tří byl nulová matice.

Řešení: například $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nebo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Úloha 5.10. Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ najděte matici typu 2×2 takovou, že posloupnost mocnin $\mathbf{A}^n$ má periodu k. Úlohu řešte zvlášť nad $\mathbb{R}$ a zvlášť nad konečným tělesem $\mathbb{Z}_p$.

Úloha 5.11. Uvažujme zobrazení $f : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ definované předpisem $f(a+ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Dokažte, že toto zobrazení představuje maticovou realizaci komplexních čísel, tj. pro $z, w \in \mathbb{C}$ platí

$$f(z+w) = f(z) + f(w)$$
$$f(zw) = f(z)f(w)$$

Najděte zobrazení $f : \mathbb{H} \to M_2(\mathbb{C})$ se stejnými vlastnostmi, tedy maticovou realizaci kvaternionů.

Úloha 5.12. Označme J_n čtvercovou $n \times n$ matici, jejíž ij-tý element je $(J_n)_{ij} := \delta_{i+1,j}$. (Používáme Kroneckerovo delta, ale pozor, J_n není jednotková matice!)

(a) Spočtěte k-té mocniny matice J_n a J_n^T pro $n = 2, 3, 4, 5$ a $k \in \mathbb{N}$.

(b) Ilustrujte pomocí matic J_n a J_n^T, že pro maticové násobení obecně neplatí vzorec $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Čím je třeba tento vzorec nahradit?

(c) Je-li X matice typu $p \times q$, pro blokovou matici $A = \begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ spočtěte její mocninu A^k pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a matici transponovanou A^T.

(d) Spočtěte součin dvou 6×6 matic v blokovém zápise $\begin{pmatrix} J_3 & J_3 \\ J_3^T & J_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_3^T & J_3 \\ J_3^2 & J_3 \end{pmatrix}$. Zapište výsledek také jako (i) blokovou matici s 3×3 bloky, (ii) 6×6 číselnou matici, (iii) blokovou matici s 2×2 bloky.