Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Zadání
Verze ze dne 5. října 2021

4 Tělesa a matice

Cíle cvičení:

- procvičit počítání v tělesech $\mathbb{Z}_p$ a výpočet řešení soustavy lineárních rovnic nad tělesy $\mathbb{Z}_p$,
- naučit se počítat s maticemi nad obecnými tělesy.

Řešené příklady:

Příklady jsou řazené tak, aby spočtení jednoho podpříkladu pomohlo vyřešit následující. Snažte se práci si usnadnit a nepočítat mechanicky.

Úloha 4.1. Spočítejte v $\mathbb{Z}_p$:

(a) v $\mathbb{Z}_5$ hodnoty 2^{-1}, 3^{-1}, 4^{-1} a $(-2)^{-1} \cdot \big((2+4) \cdot (4+4)^{-1}\big) + 3$,

(b) v $\mathbb{Z}_7$ hodnoty 2^{-1}, 3^{-1}, 4^{-1}, 5^{-1}, 6^{-1} a $(-2)^{-1} \cdot \big((2+4) \cdot (4+4)^{-1}\big) + 3$,

(c) v $\mathbb{Z}_p$ pro liché prvočíslo p hodnoty 2^{-1} a $(p-1)^{-1}$,

(d) v $\mathbb{Z}_5$ hodnotu a splňující rovnici $3a + 4 = 1$ a všechna x a y splňující rovnici $4x - 3y + 1 = 2$.

Úloha 4.2. Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ všechna řešení soustavy rovnic s maticí

$$\text{(a)} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad \text{(b)} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Úloha 4.3. Uvažujme vektory

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

nad tělesem $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{Z}_{11}$.

(a) Spočítejte součty $\mathbf{B} + \mathbf{C}$, $\mathbf{C} + \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T$.

(b) Spočítejte součiny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_1$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_2$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_3$, $\mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{B}$, $5 \cdot \mathbf{C}$.

(c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}$,

(d) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T) + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T)^T - \mathbf{A}$.

Úloha 4.4. Najděte nad tělesy $T = \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ všechny vektory $\mathbf{x} \in T^3$ splňující rovnici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Další základní příklady k počítání:

Úloha 4.5. Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ všechna řešení soustavy rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Úloha 4.6. Uvažujte těleso $\mathbb{Z}_p$ (p je prvočíslo). Platí vždy, že $\forall a, \forall b \neq 0\ \exists c$ takové, že $a = bc$? Proč?

Obtížnější příklady:

Úloha 4.7. Dokažte, že množina $\mathbb{R}^2$ s operacemi

$$\begin{aligned} (x, y) + (r, s) &:= (x + r, y + s) \\ (x, y).(r, s) &:= (x \cdot r, y \cdot s), \end{aligned}$$

kde $x, y, r, s \in \mathbb{R}$ a $+$ a $\cdot$ na pravé straně je běžné sčítání a násobení reálných čísel, není těleso. Které axiomy jsou splněny a které ne? Byla by tělesem množina všech $m \times n$ matic nad tělesem T, na které bychom sčítání zavedli jako běžné maticové a násobení předpisem $(A.B)_{ij} := a_{ij}b_{ij}$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$?

Úloha 4.8. Dokažte, že následující množiny tvoří spolu s běžnými operacemi tělesa:

(i) $\{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$,

(ii) $\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

Proč je v druhé množině člen $c\sqrt[3]{4}$? (Odpověď na tuto otázku není potřeba formálně dokazovat.)