Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Řešení
Verze ze dne 5. října 2021

4 Tělesa a matice

Cíle cvičení:

- procvičit počítání v tělesech $\mathbb{Z}_p$ a výpočet řešení soustavy lineárních rovnic nad tělesy $\mathbb{Z}_p$,
- naučit se počítat s maticemi nad obecnými tělesy.

Řešené příklady:

Úloha 4.1. Spočítejte v $\mathbb{Z}_p$:

(a) v $\mathbb{Z}_5$ hodnoty 2^{-1}, 3^{-1}, 4^{-1} a $(-2)^{-1} \cdot \big((2+4)\cdot(4+4)^{-1}\big) + 3$,

(b) v $\mathbb{Z}_7$ hodnoty 2^{-1}, 3^{-1}, 4^{-1}, 5^{-1}, 6^{-1} a $(-2)^{-1} \cdot \big((2+4)\cdot(4+4)^{-1}\big) + 3$,

(c) v $\mathbb{Z}_p$ pro liché prvočíslo p hodnoty 2^{-1} a $(p-1)^{-1}$,

(d) v $\mathbb{Z}_5$ hodnotu a splňující rovnici $3a + 4 = 1$ a všechna x a y splňující rovnici $4x - 3y + 1 = 2$.

Řešení. (a) Vidíme, že v $\mathbb{Z}_5$ máme $2 \cdot 3 = 1$, proto $2^{-1} = 3$ a $3^{-1} = 2$, a protože $4 \cdot 4 = 1$, vidíme, že $4^{-1} = 4$. Dále

$$(-2)^{-1} \cdot ((2+4)\cdot(4+4)^{-1}) + 3 = 3^{-1} \cdot (1 \cdot 3^{-1}) + 3 = 2 \cdot 2 + 3 = 2.$$

(b) Podobně dostáváme nad $\mathbb{Z}_7$, že $2^{-1} = 4$, $3^{-1} = 5$, $4^{-1} = 2$, $5^{-1} = 3$ a $6^{-1} = 6$, neboť $2 \cdot 4 = 3 \cdot 5 = 6 \cdot 6 = 1$. Dále

$$(-2)^{-1} \cdot ((2+4)\cdot(4+4)^{-1}) + 3 = 5^{-1} \cdot (6 \cdot 1^{-1}) + 3 = 3 \cdot 6 + 3 = 0.$$

(c) Pro liché p je $\frac{p+1}{2} \in \mathbb{Z}$ a $2 \cdot \frac{p+1}{2} = p + 1$, takže v tělese $\mathbb{Z}_p$ platí, že $2 \cdot \frac{p+1}{2} = 1$. Proto $2^{-1} = \frac{p+1}{2}$.

Víme z přednášky, že v jakémkoli tělese je $(-1) \cdot (-1) = 1$, a tedy $(-1)^{-1} = (-1)$. Protože v tělese $\mathbb{Z}_p$ máme $(p-1) + 1 = 0$, je $p - 1$ číslo opačné k číslu 1. To znamená, že $-1 = p - 1$, a podle předchozí úvahy tedy $(p-1)^{-1} = p - 1$.

(d) Budeme způsobem, na nějž jsme zvyklí například v tělese reálných čísel, upravovat rovnici ekvivalentním úpravami. Nejprve od obou stran odečteme hodnotu 4, což v $\mathbb{Z}_5$ znamená přičíst hodnotu 1 (neboť $-4 = 1$), a dostaneme ekvivalentní rovnici $3a = 2$. Nyní vydělíme trojkou, tj. vynásobíme číslem $\frac{1}{3} = 3^{-1} = 2$, a dostaneme jediné řešení $a = 4$.

V druhé úloze postupujeme obdobně. Nejprve odečteme od obou stran 1 a uvědomíme si, že $-3 = 2$. Obdržíme rovnici $4x + 2y = 1$, kde vezmeme $y = s \in \mathbb{Z}_5$ libovolně a zpětnou substitucí za dalšího využití ekvivalentních úprav dopočítáme

$$4x = 1 - 2s = 1 + 3s \quad \Rightarrow \quad x = 4^{-1}(1 + 3s) = 4(1 + 3s) = 4 + 2s.$$

Množina všech řešení je pětiprvková tvaru

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{Z}_5 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

Úloha 4.2. Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ všechna řešení soustavy rovnic s maticí

$$\text{(a)} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad \text{(b)} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Řešení. Stejně jako v případě soustavy nad reálnými čísly upravíme rozšířené matici soustavy na odstupňované matici s počítáním v $\mathbb{Z}_7$.

(a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Protože poslední řádek představuje rovnici $0 = 5$, která neplatí pro žádný vektor neznámých, je množina všech řešení soustavy prázdná.

(b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Tentokrát řešení soustavy existuje a my ho obvyklým způsobem nalezneme zpětnou substitucí pro volbu za volné proměnné $x_3 = r$ a $x_4 = s$:

$$\begin{aligned} x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 1 + x_3 + 3x_4 = 1 + r + 3s, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = 3^{-1}(1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4) = \\ &\qquad = 5(1 + 6(1 + r + 3s) + 2r + 5s) = 5(r + 2s) = 5r + 3s. \end{aligned}$$

Našli jsme množinu všech řešení soustavy:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; r, s \in \mathbb{Z}_7 \right\}.$$

□

Úloha 4.3. Uvažujme vektory

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

nad tělesem $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{Z}_{11}$.

(a) Spočítejte součty $\mathbf{B} + \mathbf{C}$, $\mathbf{C} + \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T$.

(b) Spočítejte součiny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_1$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_2$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_3$, $\mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{B}$, $5 \cdot \mathbf{C}$.

(c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}$,

(d) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T) + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T)^T - \mathbf{A}$.

Řešení. Ve všech případech úlohu vyřešíme nejprve v reálných číslech (což je příklad tělesa charakteristiky 0) a poté výsledek pouze upravíme modulo příslušné prvočíslo.

(a) Postupujeme nejprve přímo podle definice součtu matic:

$$\mathbf{B}+\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&0\\3&5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1&0+2&-1+0\\1+3&2+5&1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&-1\\4&7&2\end{pmatrix}.$$

Na přednášce bylo ukázáno, že je sčítání matic komutativní, tudíž samozřejmě nemusíme druhý součet počítat a přímo vidíme, že $\mathbf{C}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2&2&-1\\4&7&2\end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$ a

$$\mathbf{C}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2&2&6\\4&0&2\end{pmatrix}\text{ nad }\mathbb{Z}_7\quad\text{a}\quad\mathbf{C}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2&2&10\\4&7&2\end{pmatrix}\text{ nad }\mathbb{Z}_{11}.$$

Podobně bylo na přednášce ověřeno, že $\mathbf{B}^T+\mathbf{C}^T=(\mathbf{B}+\mathbf{C})^T$, takže nám stačí jen bez dalšího počítání transponovat matici $\mathbf{B}+\mathbf{C}$, abychom dostali $\mathbf{B}^T+\mathbf{C}^T=\begin{pmatrix}2&4\\2&7\\-1&2\end{pmatrix}$ nad tělesem reálných čísel,

$$\mathbf{B}^T+\mathbf{C}^T=\begin{pmatrix}2&4\\2&0\\6&2\end{pmatrix}\text{ nad }\mathbb{Z}_7\quad\text{a}\quad\mathbf{B}^T+\mathbf{C}^T=\begin{pmatrix}2&4\\2&7\\10&2\end{pmatrix}\text{ nad }\mathbb{Z}_{11}.$$

(b) Pro součin matice se sloupcovým vektorem postupujme podle definice :

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Pro řádkový vektor můžeme k výpočtu využít transpozici součinu

$$\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&10&2\end{pmatrix}.$$

Konečně $\mathbf{C}^T\cdot\mathbf{B}=\mathbf{C}^T\cdot(\mathbf{B}^T)^T=(\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{C})^T=\begin{pmatrix}4&6&2\\7&10&3\\1&2&1\end{pmatrix}$ a

$$5\cdot\mathbf{C}=\begin{pmatrix}5\cdot1&5\cdot2&5\cdot0\\5\cdot3&5\cdot5&5\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&10&0\\15&25&5\end{pmatrix}.$$

Nyní zbývá upravit výsledky modulo 7 v tělese $\mathbb{Z}_7$:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}_1=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}_2=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}_3=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_1^T\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3&4&1\end{pmatrix},\mathbf{a}_2^T\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&3&2\end{pmatrix},5\cdot\mathbf{C}=\begin{pmatrix}5&3&0\\1&4&5\end{pmatrix}$$

a modulo 11 v tělese $\mathbb{Z}_{11}$:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}_1=\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix},\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}_2=\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix},\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}_3=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 2 \end{pmatrix}, 5 \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(c) Postupujme podle definice násobení matic: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 8 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Můžeme si také všimnout, že tento součin jsme již dvakrát spočítali v předchozím bodě (po sloupcích a po řádcích).

Protože bylo na přednášce ověřeno, že $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$, vidíme, že

$$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 8 & 10 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

To nám ovšem nepomůže pro výpočet $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}$, který opět provedeme podle definice, nebo pomocí tvrzení o řádkovém způsobu násobení matic z přednášky

$$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Při výpočtu součinu $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C}$ nám pomůže rozklad matice $\mathbf{C}$ na dva bloky $\mathbf{C} = (\mathbf{A} \mid \mathbf{S})$, kde $\mathbf{A}$ je matice, se kterou pracujeme, a $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Výpočet nám usnadní jednak to, že jsme již spočítali součin $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}$, a dále pozorování, že součin $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{S}$ právě vybere z matice $\mathbf{B}^T$ druhý sloupec:

$$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{S}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 6 & 10 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Konečně

$$\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C})^T = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 7 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Našli jsme výsledky v tělese reálných čísel, nyní je jen upravíme nad tělesem $\mathbb{Z}_7$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledky nad $\mathbb{Z}_{11}$ vypadají stejně jako nad $\mathbb{R}$, protože všechny elementy ve všech maticích jsou celá čísla od 0 do 10 včetně.

(d) Využijeme početních pravidel a nejprve upravíme:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T) + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T)^T - \mathbf{A} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T + (\mathbf{A}^T)^T \cdot (\mathbf{B}^T)^T \cdot \mathbf{C}^T - \mathbf{A} = \\ &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{I}_2). \end{aligned}$$

Nyní snadno dopočítáme $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$ a $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_7$.

□

Úloha 4.4. Najděte nad tělesy $T = \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ všechny vektory $\mathbf{x} \in T^3$ splňující rovnici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Úlohu můžeme snadno přepsat na otázku nalezení řešení soustavy rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Dále úlohu vyřešíme standardním postupem nad reálnými čísly:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Zjistili jsme, že nad $\mathbb{R}$ existuje jediné řešení soustavy $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nad $\mathbb{Z}_3$ upravujeme obdobně, ovšem modulo 3, proto dostaneme odstupňovanou matici v odlišném tvaru:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Zpětnou eliminací tak dostáváme tři řešení s parametrickým popisem

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{Z}_3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zatímco při upravování reálné soustavy jsme dělili třemi, což není „povolená“ úprava v tělese $\mathbb{Z}_3$, nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ k žádné „nepovolené“ úpravě nedošlo, proto výpočet modulo 5 proběhne stejně jako v reálném případě, a tedy stačí modulo 5 upravit výsledek.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

takže nad $\mathbb{Z}_5$ existuje jediné řešení $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 4.5. Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ všechna řešení soustavy rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Řešení: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Z}_5 \right\}$

Úloha 4.6. Uvažujte těleso $\mathbb{Z}_p$ (p je prvočíslo). Platí vždy, že $\forall a, \forall b \neq 0\ \exists c$ takové, že $a = bc$? Proč?

Řešení: Ano, stačí vzít $c := a \cdot b^{-1}$.

Obtížnější příklady:

Úloha 4.7. Dokažte, že množina $\mathbb{R}^2$ s operacemi

$$\begin{aligned}(x, y) + (r, s) &:= (x + r, y + s)\\ (x, y).(r, s) &:= (x \cdot r, y \cdot s),\end{aligned}$$

kde $x, y, r, s \in \mathbb{R}$ a $+$ a $\cdot$ na pravé straně je běžné sčítání a násobení reálných čísel, není těleso. Které axiomy jsou splněny a které ne? Byla by tělesem množina všech $m \times n$ matic nad tělesem T, na které bychom sčítání zavedli jako běžné maticové a násobení předpisem $(A.B)_{ij} := a_{ij}b_{ij}$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$?

Úloha 4.8. Dokažte, že následující množiny tvoří spolu s běžnými operacemi tělesa:

(i) $\{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$,

(ii) $\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

Proč je v druhé množině člen $c\sqrt[3]{4}$? (Odpověď na tuto otázku není potřeba formálně dokazovat.)