Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Zadání, verze ze dne 5. října 2021

2 Opakování: zobrazení

Cíl cvičení: zopakovat pojem zobrazení a procvičit zjišťování jeho vlastností

Řešené příklady:

Zaveďme následující značení geometrických zobrazení roviny $\mathbb{R}^2$ do sebe:

R_φ – otočení se středem v počátku $(0,0)$ o úhel φ (proti směru hodinových ručiček),

O_x, resp. O_y – osová souměrnost podle osy x, resp. y,

P_x, resp. P_y – kolmá projekce na osu x, resp. y.

Úloha 2.1. Uvažujme zobrazení O_x, O_y, P_x, P_y a R_φ pro všechna φ (každý úhel určuje jedno zobrazení).

(a) Která ze zobrazení jsou prostá a která jsou na celé $\mathbb{R}^2$?

(b) Pro každé zobrazení najděte úplný vzor bodu $(0,1)$ a úplný vzor bodu $(1,1)$.

(c) Pro všechna bijektivní zobrazení určete zobrazení inverzní.

(d) Popište složená zobrazení $O_x \circ O_y$, $P_x \circ P_y$, $R_\varphi \circ R_\psi$.

(e) Jak zobrazení O_x a P_x transformují přímku s obecným tvarem $\{(x,y) \mid x+2y=1\}$? Nakreslete si obrázek.

Úloha 2.2. Uvažujme zobrazení $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ daná předpisem

$$f((x,y)) = (3x+2y, 2x+y), \quad g((x,y)) = (2x-y, -4x+2y).$$

(a) Rozhodněte, zda jsou zobrazení f a g na (to je jednodušší) a zda jsou prostá.

(b) Najděte úplný vzor bodů $(-1,2)$ a $(1,0)$.

(c) Popište podobným vzorečkem složená zobrazení $f \circ g$, $g \circ f$.

(d) Jak zobrazení f a g transformují přímku s parametrickým vyjádřením $\{(1,1)+s(1,-1) \mid s \in \mathbb{R}\}$?

Úloha 2.3. Jak podobným vzorečkem jako v úloze 2.2 popsat zobrazení O_x, O_y, P_x, P_y a $R_{\frac{\pi}{2}}$?

Další základní příklady k počítání:

Úloha 2.4. Uvažujme zobrazení $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ daná předpisem

$$F((x,y,z)) = (x+y-z, x-2y+z), \quad G((x,y)) = (x+y, x-3y, 2x-y).$$

(a) Rozhodněte, zda jsou zobrazení F a G prostá a zda jsou na.

(b) Najděte úplný vzor bodu $(1,1)$ v zobrazení F.

(c) Popište obraz přímky $p = \{(1,1) + s(1,-1) \mid s \in \mathbb{R}\}$ při zobrazení G.

(d) Popište vzorečkem složená zobrazení $F \circ G$, $G \circ F$ a rozhodněte, zda jsou tato zobrazení prostá a zda jsou na.

Úloha 2.5. Pro zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f((x,y)) = (x+y,y)$ určete (a) obraz čtverce s vrcholy $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, (b) obraz množiny $\mathbb{Z}^2$. Proveďte totéž pro zobrazení $g((x,y)) = (2x,3y)$.

Úloha 2.6. Pro následující zobrazení $f : X \to Y$ určete (i) počet zobrazení $g : Y \to X$, pro která $g \circ f = \mathrm{id}_X$; (ii) počet zobrazení $g : Y \to X$, pro která $f \circ g = \mathrm{id}_Y$; (iii) počet zobrazení $g : Y \to X$, pro která $g \circ f = \mathrm{id}_X$ a $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(a) $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5\}$, $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 5$,

(b) $f : \{1,2,3,4,5,6\} \to \{1,2,3\}$, $f(1) = f(3) = f(5) = 2$, $f(2) = f(6) = 1$, $f(4) = 3$,

(c) $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 3$, $f(4) = 1$.

Obtížnější příklady:

Úloha 2.7. Popište vzorečkem zobrazení R_φ.

Úloha 2.8. Najděte parametrické vyjádření obrazu přímky $\{(x,y) \mid x + 2y = 1\}$ při zobrazení R_φ.

Úloha 2.9. Popište složená zobrazení $O_x \circ R_\varphi$ a $R_\varphi \circ O_x$ a mocniny zobrazení R_φ^n, $n \in \mathbb{Z}$.

Úloha 2.10. Označme $\mathbf{n} = (a,b)$ nenulový vektor v $\mathbb{R}^2$, $O_\mathbf{n}$ osovou souměrnost podle přímky $p : ax + by = 0$ a $P_\mathbf{n}$ kolmou projekci na tuto přímku. Zapište tato zobrazení podobným vzorcem jako v úloze 2.2.

Úloha 2.11. Uvažujte následující zobrazení komplexní roviny do sebe:

(a) $d_k(z) = kz$, kde $k \in \mathbb{R}$;

(b) $r_\varphi(z) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)z$, kde $\varphi \in \mathbb{R}$;

(c) $p_b(z) = z + b$, kde $b \in \mathbb{C}$.

Popište tato zobrazení geometricky a napište vzorce pro reálnou a imaginární část obrazu čísla z pomocí reálné a imaginární části $z = x + iy$. Popište inverzní zobrazení, mocniny těchto zobrazení a porovnejte $r_{\pi/2} \circ p_i$ a $p_i \circ r_{\pi/2}$. Zapište pomocí standardních operací na komplexních číslech osovou souměrnost podle reálné a podle imaginární osy.

Úloha 2.12. Podobně jako v úloze 2.2 popište vzorcem následující zobrazení $\mathbb{R}^3$ do sebe:

(a) Zrcadlení podle roviny obsahující osy x a z.

(b) Zrcadlení podle osy x.

(c) Rotaci okolo osy y o úhel φ.

(d) Rotaci okolo osy prvního oktantu, která cyklicky zobrazuje kladné polopřímky os x, y a z na sebe.

A ještě obtížnější příklady:

Úloha 2.13. Popište zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vzniklá

(a) složením dvou osových symetrií podle přímek procházejících počátkem,

(b) složením rotace kolem počátku a osové symetrie podle přímky procházející počátkem (obě možnosti pořadí skládání).

Úloha 2.14. Najděte zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které je prosté, ale není na.

Úloha 2.15. Najděte zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které je na, ale není prosté.

Úloha 2.16. Mějme zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které splňuje

- pro každou dvojici aritmetických vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ platí $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$
- pro každý aritmetický vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ a každý skalár $t \in \mathbb{R}$ platí $f(t \cdot \mathbf{x}) = t \cdot f(\mathbf{x})$.

Dokažte, že f je prosté právě tehdy, když je na.