Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Řešení
Verze ze dne 5. října 2021

1 Opakování: analytická geometrie

Cíle cvičení:

- zopakovat středoškolské metody řešení soustav lineárních rovnic v $\mathbb{R}$,
- posílit geometrickou představu řešení soustav jako hledání průniku nadrovin.

Řešené příklady:

Úloha 1.1. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ přímku p s parametrickým vyjádřením $p = \{(1,2) + t \cdot (1,1) | \ t \in \mathbb{R}\}$.

(a) Určete obecné vyjádření přímky p,

(b) najděte průsečíky přímky p s osou x a osou y,

(c) rozhodněte, které z bodů $(2,3)$, $(3,2)$ a $(-1,1)$ leží na p.

Řešení. (a) Určíme vektor $(1,-1)$, který je kolmý na směrový vektor přímky $(1,1)$. To znamená, že rovnice přímky má tvar $x - y = c$ pro vhodné reálné číslo c. Nyní dosazením bodu $(x,y) = (1,2)$ z parametrického zadání dostaneme $c = 1 - 2 = -1$, tedy obecné vyjádření přímky má tvar

$$p = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ x - y = -1\}.$$

Poznamenejme, že vyjádření je určeno jednoznačně až na násobek celé rovnice nenulovým reálným číslem.

(b) Stačí postupně dosadit za y a x nulu do rovnice obecného vyjádření. Pro $y = 0$ dostáváme $x - 0 = -1$ a pro $x = 0$ máme $0 - y = -1$, tudíž hledané průsečíky jsou $(-1,0)$ a $(0,1)$.

(c) Opět využijeme dosazení bodů do obecného vyjádření, abychom zjistili, že

$$2 - 3 = -1, \quad 3 - 2 \neq -1, \quad -1 - 1 \neq -1,$$

a proto bod $(2,3)$ na přímce leží, zatímco body $(3,2)$ a $(-1,1)$ nikoli.

Úloha 1.2. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ přímku q s obecným vyjádřením $q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ x + 2y = 3\}$.

(a) Určete parametrické vyjádření přímky q,

(b) najděte průsečík přímky q s přímkou p z předchozí úlohy,

(c) Vyřešte v reálných číslech soustavu rovnic $\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 3 \\ x & - & y & = & -1 \end{array}$.

Řešení. (a) Tentokrát z obecného tvaru přímky okamžitě vidíme vektor $(1,2)$ kolmý na směrový, snadno tedy určíme směrový vektor $(2,-1)$. Například dosazením $y = 0$ najdeme bod $(3,0)$ přímky q, proto je

$$q = \{(3,0) + t \cdot (2,-1) | \ t \in \mathbb{R}\}$$

jedno z možných parametrických vyjádření přímky q.

(b), (c) Vidíme, že algebraické vyjádření úlohy (b) je právě úloha (c), tedy řešíme soustavu rovnic o dvou neznámých $\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 3 \\ x & - & y & = & -1 \end{array}$. Nejprve některým ze známých způsobů upravíme jednu rovnici pomocí druhé tak, abychom jednu z proměnných odstranili, můžeme si vybrat metodu, kde za proměnnou v jedné rovnici dosadíme její vyjádření z druhé rovnice (dosazovací metoda) nebo metodu, kde vhodný násobek jedné rovnice odečteme ode druhé. S ohledem na pozdější úvahy, kdy budeme schopni efektivně pracovat s libovolně konečně mnoha proměnnými si zvolme odčítací metodu a odečtěme od první rovnice druhou. Dostaneme rovnici $-3y = -4$, která udává jedinou možnou hodnotu neznámé $y = \frac{4}{3}$. Nyní zpětným dosazením hodnoty $y = \frac{4}{3}$ do první rovnice dostáváme $x + 2 \cdot \frac{4}{3} = 3$, odkud dopočítáme $x = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$. Hledaným průsečíkem přímek p a q je bod $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$.

Poznamenejme, že popsaný postup můžeme také zapsat maticově (to znamená pozičně bez přepisování symbolů, x a y) pomocí takzvané matice soustavy $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$. Maticový zápis předchozích úvah bude vypadat následovně:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{array}\right),$$

kde symbol $\sim$ znamená, že soustava napravo i nalevo mají stejnou množinu řešení.

Úloha 1.3. Uvažujme v $\mathbb{R}^3$ rovinu r s obecným vyjádřením $r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ x + y - z = 1\}$.

(a) Určete parametrické vyjádření roviny r,

(b) rozhodněte, které z bodů $(1, 1, 1)$ a $(2, 2, 2)$ leží v rovině r.

Řešení. (a) Postupujeme obdobně jako ve dvoudimenzionálním prostoru. Potřebujeme nejprve najít jeden bod roviny r. Pro volbu $y = z = 0$ dopočítáme z rovnice $x+y-z = 1$ hodnotu $x = 1-0+0 = 1$, tedy bod $(1, 0, 0)$ na leží na rovině r. Nyní musíme najít dva vektory určující rovinu, tedy vektory, které jsou kolmé na vektor $(1, 1, -1)$ a nejsou svými násobky. Snadno určíme že vektory $(1, 0, 1)$ a $(0, 1, 1)$ jsou kolmé na vektor $(1, 1, -1)$, tedy, že splňují rovnici $x + y - z = 0$. Nyní již můžeme spočítané údaje sepsat do parametrického vyjádření roviny

$$r = \{(1, 0, 0) + s \cdot (1, 0, 1) + t \cdot (0, 1, 1) | \ s, t \in \mathbb{R}\}$$

.

(b) Stejně jako v 1.1(c) prostým dosazením do obecného vyjádření zjistíme, že bod $(1, 1, 1)$ leží a bod $(2, 2, 2)$ neleží v rovině r.

Úloha 1.4. Uvažujme v $\mathbb{R}^3$ rovinu v s parametrickým vyjádřením

$$v = \{(3, -1, 1) + s \cdot (1, 1, 2) + t \cdot (1, 0, -1) | \ s, t \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Určete obecné vyjádření roviny v,

(b) najděte parametrické vyjádření přímky dané průsečíkem roviny v s rovinou r z předchozího příkladu.

Řešení. (a) Opět stačí najít vektor (a, b, c) kolmý na směrové vektory $(1, 1, 2)$ a $(1, 0, -1)$. Podmínku kolmosti můžeme jednoduše vyjádřit a tudíž i vyřešit v jazyce soustav rovnic:

$$\begin{array}{ccccccc} 1a & + & 1b & + & 2c & = & 0, \\ 1a & + & 0b & - & 1c & = & 0. \end{array}$$

Řešením je je (až na nenulový reálný násobek právě) vektor $(1,-3,1)$. Dosadíme-li do výrazu $x-3y+z$ bod $(3,-1,1)$, získáme konstantu 7 a tedy hledané obecné vyjádření roviny má tvar

$$v = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - 3y + z = 7\}.$$

(b) Podobně jako 1.2(b) řešíme soustavu dvou rovnic tentokrát o třech neznámých:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & 3y & + & z & = & 7 \end{array}$$

Zkusíme úlohu tentokrát zapsat pouze maticově a odčítací metodou upravovat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Druhou rovnici jsme tedy nahradili rovnicí $-2y+z=3$ tak, že soustavy mají stejnou množinu řešení. Nyní jednak po volbě $y=0$ jednoznačně dopočítáme souřadnice bodu přímky $z=3$ a $x=7-0+3=10$ a dále najdeme směrový vektor, který musí být kolmý na vektory $(1,1,-1)$ a $(0,2,-1)$, jímž je vektor $(1,1,2)$. Našli jsme parametrický popis přímky $r \cap v = \{(4,0,3) + t \cdot (1,1,2) |\ t \in \mathbb{R}\}$.

Úloha 1.5. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & + & y & - & z & = & 6. \\ 3x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

Jak lze tuto úlohu geometricky interpretovat?

Řešení. Podobně jako 1.2(b) řešíme odčítací metodou soustavu rovnic tentokrát o třech neznámých. Nejprve odečteme dvojnásobek první rovnice od druhé a trojnásobek první od třetí. Dostaneme tak novou soustavu se stejnou množinou řešení:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & 5 \\ & - & y & + & 3z & = & -4 \\ & - & 6y & + & 8z & = & -14 \end{array}$$

Odečteme-li nyní od třetí rovnice šestinásobek druhé, dostaneme rovnici $-10z = 10$, z níž okamžitě vidíme, že $z = 1$. Dále postupujeme zpětným dosazením nejprve hodnoty $z=-1$ do druhé (upravené) rovnice $-y + 3 \cdot (-1) = -4$, odkud dostáváme $y=1$ a konečně hodnoty $y=1$ a $z=-1$ dosazené do první rovnice $x + 1 - 2 \cdot (-1) = 5$, nám dávají $x=2$. Zjistili jsme, že soustava má jediné řešení $(x,y,z) = (2,1,-1)$.

Geometricky můžeme úlohu chápat jako hledání průsečíku tří rovin v prostoru daných s obecným vyjádřením. Tímto průsečíkem je v našem případě bod $(2,1,-1)$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 1.6. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ dvě přímky s obecným vyjádřením:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x + 3y = 5\}, T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 2x - y = -4\}$$

(a) Určete parametrické vyjádření přímek S a T,

(b) najděte průsečík přímek $S \cap T$.

Řešení: (a) například $S = \{(5,0) + t \cdot (3,-1) |\ t \in \mathbb{R}\}$ a $T = \{(0,4) + t \cdot (1,2) |\ t \in \mathbb{R}\}$, (b) $S \cap T = \{(-1,2)\}$.

Úloha 1.7. Mějme v $\mathbb{R}^3$ tři roviny s obecným vyjádřením: $R_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 2x + y - z = 1\}$, $R_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y + 2z = 3\}$, $R_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 3x - 3y + 2z = 5\}$.

(a) Určete nějaké parametrické vyjádření těchto rovin.

(b) Najděte parametrický popis průsečíků $R_i \cap R_j$ pro $i \neq j$ a průsečík $R_1 \cap R_2 \cap R_3$. Je-li průsečík přímkou, zapište její parametrický zápis pomocí vektorů.

Úloha 1.8. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic:

$$\text{(a)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} 2x &+& y &-& z &=& 1 \\ x &+& y &+& 2z &=& 2 \\ x &+& 2y &+& 7z &=& 4 \end{array}, \qquad \text{(b)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} 2x &+& y &-& z &=& 1 \\ x &+& y &+& 2z &=& 2. \\ x &+& 2y &+& 7z &=& 5 \end{array}$$

Řešení: (a) $\emptyset$, (b) $T = \{(-1,3,0) + t \cdot (3,-5,1) |\ t \in \mathbb{R}\}$.

Obtížnější příklady:

Úloha 1.9. Najděte v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ všechna reálná řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax &+& y &+& 3z &=& a \\ x &-& ay &+& z &=& 2 \end{array}$$

Řešení: parametrický popis řešení $\{(\frac{2+a^2}{1+a^2}, -\frac{a}{1+a^2}, 0) + s \cdot (-1-3a, a-3, 1+a^2) |\ s \in \mathbb{R}\}$.

Příklady na jiné téma, pokud analytickou geometrii ovládáte:

Úloha 1.10. Spočítejte v komplexním oboru: hodnotu výrazů $c+d$, $c \cdot d$, $\frac{1}{c}$, $\frac{c}{d}$, c^{50} pro komplexní čísla $c = 1+i$, $d = 2-i$ a rovnici $1 + 2i + (2+3i)x = 4 - i$.

Úloha 1.11. Počítání s komplexními čísly lze interpretovat geometricky.

(a) Co znamená geometricky sčítání a odčítání komplexních čísel?

(b) Jak lze interpretovat násobení? Pokud netušíte, připomeňte si goniometrický zápis, v tom je geometrická interpretace násobení vidět lépe.
Návodná otázka: co s nějakým komplexním číslem dělá opakované násobení číslem: i, $2i$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, ...?

Úloha 1.12. Spočítejte v komplexním oboru soustavu rovnic $\begin{array}{rcrcl} ix &+& (1+i)y &=& 2+i \\ (2-i)x &+& 3y &=& 5-4i. \end{array}$

Tady se vyplatí zamyslet: násobení nebo dělení rovnice komplexním dvojčlenem dá spoustu práce, je možné nějakým postupem snížit počet takových úprav?