

## Domácí úkol č. 9 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2016–2017

V příkladech používáme *spektrální normu*, která je pro komplexní matici  $A$  typu  $m \times n$  definovaná vztahem

$$\|A\| = \max\{\|A\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \|\mathbf{x}\| = 1\} ,$$

kde normy na pravé straně jsou vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

**(9.1)** Dokažte, že pro libovolné komplexní matice  $A, B, C$  vhodných typů platí  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ,  $\|BC\| \leq \|B\| \|C\|$ .

**(9.2)** V závislosti na parametru  $a \in \mathbb{R}$  najděte reálnou matici  $B$  hodnosti nejvýše 1 takovou, že  $\|A - B\|$  je co nejmenší, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} .$$

Určete také  $\|A - B\|$ .

**Nápověda:** Pro pohodlnější počítání je dobré si všimnout, že  $A$  je symetrická, takže singulární rozklad je možné spočítat efektivnějším postupem než pro obecnou matici.

**Bonusový problém:** Frobeniova norma matice  $A$  typu  $m \times n$  je definována vzorcem

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} .$$

Dokažte, že platí

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2} ,$$

kde  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  je seznam singulárních hodnot matice  $A$ , každé tolikrát kolik je jeho násobnost.